ECLIPSE TOTAL DE SOL

QUE

SE VERIFICARÁ EL 28 DE MAYO DE 1900.

TRABAJO PRESENTADO
Á LA
SOCIEDAD DE INGENIEROS Y ARQUITECTOS DE MÉXICO

POR EL SOCIO

FRANCISCO RODRIGUEZ REY

Astrónomo del Observatorio
Nacional de Tacubaya, Profesor de la Escuela
N. de Ingenieros.

MÉXICO
OFICINA TIP. DE LA SECRETARÍA DE FOMENTO
Calle de San Andrés núm. 15. (Avenida Oriente 51.)

1898

ECLIPSE TOTAL DE SOL

QUE

SE VERIFICARÁ EL 28 DE MAYO DE 1900.

TRABAJO PRESENTADO

Á LA

SOCIEDAD DE INGENIEROS Y ARQUITECTOS DE MÉXICO

POR EL SOCIO

FRANCISCO RODRIGUEZ REY

Astrónomo del Observatorio

Nacional de Tacubaya, Profesor de la Escuela

N. de Ingenieros.

MÉXICO

OFICINA TIP. DE LA SECRETARÍA DE FOMENTO

Calle de San Andrés núm. 15. (Avenida Oriente 51.)

1898

ECLIPSE TOTAL DE SOL

QUE SE VERIFICARÁ

EL 28 DE MAYO DE 1900.

Es bien sabido que se llama eclipse de sol á la ocultación de este astro á nuestra vista por la interposición de la luna. Ésta, como cuerpo opaco y esférico, proyecta en sentido opuesto al sol dos conos: uno de penumbra y otro de sombra, cuyo eje común es la línea que une los centros de los dos cuerpos, y que arrastrados por el movimiento de la luna pueden encontrar al globo terrestre, produciéndose varias circunstancias que sucintamente vamos á explicar.

La condición para que un eclipse solar sea visto desde la superficie de la tierra, es la siguiente. Si á la hora de la conjunción la latitud de la línea es

$< 1° 24'$ el eclipse es cierto
$> 1° 34'$ no hay eclipse

y entre estos dos límites es dudoso.

El radio de la sección de la penumbra hecha á la distancia de la tierra á la luna es menor que la mitad del radio terrestre, en consecuencia *la penumbra puede quedar contenida enteramente en la superficie de la tierra.*

La distancia de la tierra á la luna varía entre 55.7 y 63.8 radios terrestres; la longitud del cono de sombra lunar varía entre 57.8 y 59.7, en consecuencia podrá suceder que el cono de sombra pura llegue á la tierra cortándola, ó bien que el vértice del cono no alcance á la superficie; pero entonces la encontrará el cono dè sombra prolongado. Evidentémente, todos los puntos que están dentro de la sección en el primer caso verán un eclipse total de sol y en el segundo un eclipse anular. Todos los puntos comprendidos en la penumbra verán un eclipse parcial.

Los dos conos (penumbra y sombra) en virtud del movimiento relativo de la luna, marchan de Occidente á Oriente y el tiempo máximo que emplean en pasar por la superficie de la tierra (8 h. 44 m. para la penumbra) es mayor que el de una semirotación de la tierra (12 horas sidéreas), así pues, la sombra marcha también de Oeste á Este.

Supongamos que en virtud del movimiento é inclinación relativos de la luna, la penumbra quede comprendida en la superficie de la tierra. En el instante en que el cono llega á ser tangente á la superficie de la tierra comienza el eclipse en general; el punto de tangencia es el primero que ve comenzar el eclipse (parcial), el sol está en el horizonte y en su orto.

La penumbra comienza á entrar á la superficie de la tierra marchando al Este. Dos generatrices una al N. y otra al S. del primer punto vienen á ser á su vez tangentes á la superficie de la tierra, y en los puntos de tangencia se verán los discos del sol y de la luna en contacto; el eclipse comienza para dichos puntos con el sol levante. Después vendrán otras dos generatrices á ser tangentes; otros dos puntos para los cuales comienza el eclipse al salir el sol.

En virtud del movimiento de la tierra, estos puntos avanzan hacia el Este, y los nuevos determinados quedan al Oeste.

Llega por último un momento en que las generatrices que están en un plano perpendicular á la dirección del movimiento relativo son tangentes á su vez, y pasado este instante las demás generatrices seguirán siéndolo; mas entonces en los puntos de tangencia respectivos el sol está en su orto pero el eclipse *termina*.

Las generatrices van acercándose ahora; hasta que por último, llega una sola á ser tangente (interiormente) á la tierra.

Este punto es el último que ve terminar el eclipse á la salida del sol. Desde este momento la penumbra se encuentra dentro de la superficie.

El lugar geométrico de los puntos así determinados forma en la superficie una curva cerrada cuya figura es la de un óvalo más ó menos deformado; en la parte del Este el eclipse comienza, y en la del Oeste termina á la salida del sol.

Continuando el cono de penumbra su marcha hacia el Este, llegará un momento en el cual una generatriz es tangente (interiormente) á la tierra, y el punto así determinado será el primero que ve comenzar el eclipse al ponerse el sol; y de una manera análoga á la anterior se determinarán una serie de puntos cuyo lugar geométrico es también un óvalo, en el que la parte Oeste del contorno es la de todos los puntos que ven *comenzar* el eclipse y los del lado Este aquellos que lo ven *terminar* á la puesta del sol. El último punto de contacto será también el último punto de la tierra que ve terminar el eclipse. Después de este instante los dos conos se encuentran en el espacio, fuera de la tierra.

Los dos óvalos llevan el nombre de *curvas límites Este-Oeste* ó también *curvas límites de salida y puesta.*

Puesto que cada óvalo es el límite de los puntos que ven el principio y fin del eclipse á la salida ó puesta del sol, debe existir evidentemente en cada uno una línea, yendo de Norte á Sur y dividiéndolos en dos partes sensiblemente iguales, la cual contendrá todos los puntos que ven el medio del eclipse á la salida del sol en el óvalo del Oeste, y á la puesta en el del Este. Esta línea es la del *medio (ó máximo) del eclipse en el horizonte.*

En un instante dado el cono de penumbra, por su intersección con la superficie de la tierra, determina una sección de forma más ó ménos ovalada, en cuyo perímetro Este el eclipse principia, y en el del Oeste termina en ese mismo instante. Todas las secciones análogas hechas en los instantes sucesivos formarán en la superficie de la tierra una faja ó zona en la cual es visible el eclipse. Los límites de esta zona determinados por las curvas envolventes á todas las secciones, son los *límites Norte y Sur del eclipse general;* ó bien curvas de un solo contacto, Norte ó Sur, puesto que desde un punto cualquiera de ella, sólo se ve un contacto externo de los dos limbos sin eclipse.

Cuando la penumbra no queda toda comprendida en la superficie de la tierra, los dos óvalos, Oeste–Este, se reunen para formar una sola curva, la cual afecta la forma de un 8 más ó menos deformado, lo que depende de la distancia de la luna á la tierra, de la magnitud de la sección del cono de penumbra, de la inclinación de la órbita relativa, etc. En este caso sólo existe un límite Norte ó Sur, según que la penumbra pase á la tierra del lado del polo Sur ó del Norte.

Todo lo que se acaba de explicar respecto al cono de penumbra se aplica enteramente al de sombra; mas la sección de este cono en la superficie de la tierra es de muy pequeñas dimensiones, por lo que no se trazan los óvalos Oeste–Este, y pocas veces sí se determinan los límites Norte y Sur del eclipse total ó anular. En los puntos de estas líneas se verá *un solo contacto interior* de los limbos del sol y de la luna.

El cono de sombra puede no encontrar á la tierra, en cuyo caso sólo habrá eclipse parcial.

En cuanto al eje de los conos, en virtud del movimiento relativo de la luna, llegará un momento en que es tangente á la tierra en un punto que será *el primero que ve el eclipse central* con el sol en el orto, traza en seguida sobre la superficie de la tierra una línea cuyos puntos todos ven en coincidencia los centros de los astros hasta que llegue un momento en el cual volviendo á ser tangente á la tierra en un punto que será el último que ve el eclipse central, y en el cual el sol está en su ocaso. Esta línea lleva el nombre de *línea del eclipse central*, y en ella existe generalmente un punto particular y es aquel que ve el eclipse central á *medio día verdadero.*

Evidentemente los puntos extremos de esta línea pertenecen también á las de máximum en el horizonte.

En resumen las principales cuestiones que tienen que resolverse para la completa predicción de un eclipse de sol, son las siguientes:

1º Determinación de los puntos que ven el principio y de los que ven terminar para la *tierra en general* el eclipse *general, total ó anular* y *central.*

2º Curvas de los puntos que ven el principio y fin del eclipse general á la salida ó puesta del sol.

3º Curvas límites Norte y Sur del eclipse.

4º Curvas de los puntos que ven el medio del eclipse con el sol en el horizonte.

5º Línea del eclipse central.

6º Por último, predecir para un lugar dado en el cual debe ser visible el eclipse, las principales circunstancias del fenómeno.

En el presente trabajo que tengo la honra de presentar á esta ilustrada Sociedad, voy á emplear las fórmulas que sirven para resolver estas cuestiones, siguiendo el elegante método de Woolhouse, haciendo la aplicación al eclipse total de sol que se verificará el día 28 de Mayo de 1900, en el cual la línea central atraviesa la República Mexicana, motivo principal de estos cálculos.

Como hoy las principales Efemérides dan unas tablas que contienen los *elementos de un eclipse* para distintos instantes sucesivos (de 10 en 10 m.) según el método de Bessel, y por cuyo medio se facilitan mucho los cálculos de predicción para un lugar dado, doy las fórmulas que sirven para su determinación y presento un ejemplo de su empleo.

El 28 de Mayo de 1900 la conjunción verdadera en ascención recta se verificará á las 3 h. 00 m. próximamente, tiempo medio de Greenwich.[1] Calculamos los elementos del sol y de la luna para tres horas antes y después de ese instante, obteniendo los siguientes resultados:

1 Todos los cálculos se refieren á este meridiano.

Elementos del Sol.

	α'	δ'	Log. radio vector.
0^h.......	$4^h19^m17^s40$	$+21°26'4''20$	0.0059318
1	27 51	28 54	347
2	37 72	52 84	378
3	47 88	27 17 11	407
4	58 04	41 32	436
5	20 8 20	28 5 50	465
6	18 36	29 64	494

Elementos de la luna.

	α	δ	π
0^h.........	$4^h12^m27^s35$	$+21°41'45''2$	$58'31''80$
1	14 56 50	44 47 1	30 33
2	17 25 62	47 40 4	28 86
3	19 54 72	50 25 3	27 38
4	22 23 79	53 1 6	25 88
5	24 52 81	55 29 4	24 35
6	27 21 79	57 48 7	22 80

Con estos elementos se encuentra lo siguiente:

Hora media de la conjunción en A. R...... $2^h57^m2^s7$ tpo. de Greenwich.

A. R. de la ☾ y del ⊙ = 4 19 47 38

Declinación de la ☾... $\delta = +21°50'17''4$

„ del ⊙...... $\delta' = +21\ 27\ 16\ 0$

Movimiento horario de la ☾ en A. R......... 2^m29^s8

Idem del ⊙ en A. R... 10 16

Idem de la ☾ en declinación .... $+2'41''0$

Idem del ⊙ en declinación................. 24 2

Paralaje horizontal ecuatorial de ☾.....	π =	58 27 4
Idem ídem de ☉.......	π' =	8 7
Semidiámetro verdadero de la ☾..........	δ =	15 55 0
Idem ídem del ☉......	δ' =	15 46 6

Sean ahora, para la hora de la conjunción = $\acute{o}$.

a, a', δ, δ' las ascensiones rectas y declinaciones verdaderas de la luna y del sol respectivamente.

a, movimiento relativo de la luna en ascensión recta.

d, movimiento relativo de la luna en declinación.

δ_0 diferencia de declinaciones de la ☾ y del ☉.

π, π' s, s' las paralajes horizontales ecuatoriales y semidiámetros verdaderos de la luna y del sol.

i = inclinación de la órbita relativa de la luna.

n = la más corta distancia de los centros de los dos astros.

Δ = la distancia verdadera de los centros en el instante de un contacto y

Δ' = la distancia aparente.

En el instante de un contacto se tiene que siendo P′ la paralaje relativa de la luna = $(\pi - \pi')$ que

$$\Delta = P' + \Delta'$$

$\Delta' = s + s'$ contactos externos

$\Delta' = s - s'$ contactos internos, eclipse total

$\Delta' = s' - s$ „ „ „ anular.

Así, pues, se tendrá para

$$\begin{aligned} \text{el eclipse general } \Delta &= P' + s + s' \\ \text{total } \Delta &= P' + s - s' \\ \text{anular } \Delta &= P' - s + s' \\ \text{central } \Delta &= P' \end{aligned}$$

En el momento de un eclipse solar las posiciones aparentes de los astros están muy próximas, y como la paralaje del sol es muy pequeña, se puede suponer á este astro fijo en su posición verdadera y atribuir á la luna todo el efecto de la paralaje relativa. Mas como esta paralaje se refiere á un punto cuya posición geográfica no se conoce, tampoco se sabe el valor del radio terrestre que le corresponde, por lo cual se le reemplaza por el que corresponde á la latitud de 45° teniéndose la fórmula

$$P' = (9.99929)(\pi - \pi')$$

en la que la cantidad dentro del paréntisis es el logaritmo del radio correspondiente á 45°. Determinado así aproximadamente el punto se repetirá el cálculo, *si se juzga necesario*, empleando la paralaje relativa correspondiente.

Determinación de las horas del principio y fin del eclipse, general, total y central, y posiciones geográficas de los puntos correspondientes.

$$\operatorname{tg} i = \frac{d}{a \cos \delta'} \qquad n = \delta_o \cos i \qquad c = \frac{3600\, n \operatorname{sen} i}{d} \qquad t = c \operatorname{tg} i$$

$$\text{Medio del eclipse} = T_m = \delta - t$$

$$\cos \omega = \frac{n}{\Delta}$$

(tomando para Δ el valor que corresponde á cada fase).

Posiciones geográficas de los puntos.

$a = -i - \omega$ para el principio φ' latitud geocéntrica.
$b = -i + \omega$ para el fin φ latitud geográfica.
λ longitud al Este.

$$\operatorname{tg} \varphi = (0.00291) \operatorname{tg} \varphi'$$

Principio: $\operatorname{sen} \varphi' = \cos a \cos \delta'$. Fin: $\operatorname{sen} \varphi' = \cos b \cos \delta'$.

$$\operatorname{tg} h = -\frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{sen} \delta'} \qquad \operatorname{tg} h' = -\frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{sen} \delta'}$$

h y h' son los ángulos horarios del sol y están situados en el mismo semicírculo que a y b.

$$\text{Longitud al E} = h - \text{H}$$
$$\text{,,} \quad \text{,, E} = h' - \text{H}$$

en la que H es la hora del principio ó fin expresada en tiempo solar verdadero

Aplicación al eclipse del 28 de Mayo de 1900.

$d = 2'\,16''\,8 = 136''\,8$ $\qquad a = 138^s\,92 = 2083''\,8$

$\delta - \delta' = +\,23'1''4 = 1381''\,4$ $\qquad \pi - \pi' = 3498''7$

$s + s' = 1901''6$

$s - s' = \quad 8.4$

log d......	2.13609	log δ_0......	3.14032	log $(\pi - \pi')$......	3.54391
log a	—3.31886	log cos i	9.99891	const	9.99929
log cos δ	—9.96766	log n	3.13923	log P′	3.54320
log tg i	8.84957	sen i	8.84849	P′=3493″0 (fase central)	
$i = +\,4°2'44''$		3600	3.55630	$s+s'$=1901.6	
		cp log d	7.86391	$s-s'$	8.4
		log c	3.40793	Δ = 5394.6 fase general.	
		log tg i	8.84957	Δ = 3501.4 fase total.	
		log t	2.25750		

$t = 180^s\,92 = \quad 3^m00^s\,9$

$\acute{o} = 2^h\,57 \quad 02 \quad 7$

Medio del eclipse $= \text{T}_m = 2 \quad 54 \quad 1 \;\, 8$

	Fase general.	Total.	Central.
log n	3.13923	3.13923	3.13923
log Δ	9.73196	3.54424	3.54320
log cos ω	9.40727	9.59499	9.59603
$\omega =$	$75^\circ\ 12'\ 4''$	$66^\circ\ 49'\ 30''$	$60^\circ\ 46'\ 00''$
log tg $\omega =$	0.57808	0.36847	0.36724
log c	3.40793	3.40793	3.40793
log τ	3.98601	3.77640	3.77517
$\tau =$	$\mp$ 9683″0	$\mp$ 5975.9	$\mp$ 5959.0
$=$	$\mp 2^h\, 41^m 23^s 0$	$\mp 1^h\, 39^m 35^s 9$	$\mp 1^h\, 39^m 19^s 0$
$T_m =$	2. 54 1.8	2. 54 1.8	2. 54 1.8
Principio	0. 12 38.8	1. 14 26.9	1. 14 42.8
Fin	5. 35 24.8	4. 33 37.7	4.33 20.8
$-i =$	$4^\circ\ 2'\ 44''$	$-\ 4^\circ\ 2'\ 44''$	$-\ 4^\circ\ 2'\ 44''$
$\omega =$	$\mp$ 75 12 4	$\mp$ 66 49 30	$\mp$ 66 46 00
$a =$	$-$ 79 14 48	$-$ 70 52 14	$-$ 70 48 44
$b =$	$+$ 71 9 20	$+$ 62 46 46	$+$ 62 43 16

Primer punto del eclipse parcial.

cos a........	9.27088	$-$ tg a	0.72143+		$0^h\, 12^m 39^s$
cos δ'	9.96887	sen δ'	9.56281	$\varepsilon =$	2. 59
sen φ'	9.23975	tg h	1.15862+	H=	0. 15. 38
tg φ'	9.24640	$h =$	$-93^\circ 58' 12''$		
const	0.00291	H =	$3^\circ 54' 30''$		
tg φ	9.24931		= 97. 52 42		
φ	$+\ 10^\circ 4'$		al Oeste		

Ultimo punto del eclipse parcial.

$\cos b$........ 9.50920	$-\operatorname{tg} b$ 0.46687—	$5^h35^m24^s8$
$\cos \delta'$ 9.96877	$\operatorname{sen} \delta'$ 9.56345	$\varepsilon =$ 2 59 6
$\operatorname{sen} \varphi'$ 9.47797	$\operatorname{tg} h$ 0.90342—	H = 5.38 24.4
$\operatorname{ta} \varphi'$ 9.49853	$h = 97°\ 7'10''$	
const 0.00291	H = 84 36 6	
$\operatorname{tg} \varphi$ 9.50144	$\lambda =$ 12 31. 4	
$\varphi' = +\ 17°36'.2$	al Este	

Primer punto del eclipse total.

$\cos a$........ 9.51547	$-\operatorname{tg} a$ 0.45985+	$1^h14^m26^s9$
$\cos \delta'$ 9.96887	$\operatorname{sen} \delta'$ 9.56281	2. 59.1
$\operatorname{sen} \varphi'$ 9.48434	$\operatorname{tg} h$ 0.89704+	H=1. 17 26.0
const 0.00291	$h = -97°13'25''$	
$\operatorname{tg} \varphi'$ 9.50556	H = 19 21 37	
$\operatorname{tg} \varphi$ 9.50847	$\lambda =$ 116 35 2	
$\varphi = +\ 17°52'.3$	al Oeste	

Ultimo punto del eclipse total.

$\cos b$........ 9.66032	$-\operatorname{tg} b$ 0.28871—	$4^h33^m37\ 7$
$\cos \delta'$ 9.96887	$\operatorname{sen} \delta'$ 9.56281	2. 59.6
$\operatorname{sen} \varphi'$ 9.62919	$\operatorname{tg} h$ 0.72590—	H=4. 36. 37.3
$\operatorname{tg} \varphi'$ 9.67261	$h = 100°38'45$	
const 0.00291	H = 69 9 19	
$\operatorname{tg} \varphi$ 9.67552	$\lambda =$ 31 29.26	
$\varphi = +\ 25°20'8$	al Este	

Primer punto del eclipse central.

$\cos a$	9.51676	$-\operatorname{tg} a$ 0.45841+	$1^h 14^m 42^s 8$
$\cos \delta'$	9.96887	sen δ' 9.56281	2 59 6
sen φ'	9.48563	$\operatorname{tg} h$ 0.89560	H=1 17 42 4
$\operatorname{tg} \varphi'$	9.50698	$h = -97°14'50''$	
const	0.00291	$H =$ 19 25 36	
$\operatorname{tg} \varphi$	9.50989	$\lambda =$ 116 40 26	
$\varphi = +17°55'37''$		al Oeste	

Ultimo punto del eclipse central.

$\cos b$	9.66123	$-\operatorname{tg} b$ 0.28754—	$4^h 33^m 20^s 8$
$\cos \delta'$	9.86887	sen δ' 9.56281	2 59 6
sen φ'	9.63010	$\operatorname{tg} h$ 0.72473—	H=4 36 20 4
$\operatorname{tg} \varphi'$	9.67373	$h = 100°40'24''$	
const	0.00291	$H =$ 69 5 6	
$\operatorname{tg} \varphi$	9.67664	$\lambda =$ 31 35 18	
$\varphi = +25°24'20''$		al Este	

Punto que ve el eclipse central á medio día verdadero.

Este punto pertenece á la línea del eclipse central, y las fórmulas que sirven para determinarlo son las siguientes:

Como $\Delta = \delta - \delta'$ y $h = 0$, se tiene

$$\text{sen } Z = \frac{\delta - \delta'}{P'} \qquad \text{sen } \varphi' = Z + \delta$$

Longitud al Oeste $= \delta$

$\delta - \delta'$......	3.14032		
P'......	3.54320	$\delta =$	$2^h 57^m 2.7$
sen Z......	9.59712	$\varepsilon =$	2 59.6
Z =	23°17'45"		3 00 2.3
δ =	21 27 16	=	45°00'34"5 al Oeste
φ' =	44 45 01		
Redn =	11 30		
=	44 56 31		

En resúmen se tiene, tomando como primer meridiano el de Tacubaya cuya longitud al O. de Greenwich es $6^h 36^m 46^s 5$.

Principia el eclipse general para la Tierra en general á las $5^h 35^m 52^s 3$ de la mañana, tiempo medio civil de Tacubaya en el punto cuya latitud es 10° 4' Norte y la longitud 1° 18'9 al Este de Tacubaya.

Principia el eclipse total en general á las $6^h 37^m 40^s 4$ de la mañana en el punto cuya lrtitud es 17° 52'3 Norte y la longitud 17°23'4 al Oeste de Tacubaya.

Principia el eclipse total central en general á las $6^h 37^m 56^s$ de la mañana en el punto cuya latitud es 17° 55'6 y la longitud 17°28'8 al Oeste de Tacubaya.

El eclipse *central total* se verificará á *medio día verdadero* á las $8^h 20^m 15^s$ de la mañana en el punto cuya posición es 44°56'5 latitud Norte y 54°11'0 longitud Este de Tacubaya.

Termina el eclipse total central en general á las $9^h 56^m 34^s 3$ de la mañana en el punto cuya latitud es 25° 24'3 Norte y la longitud 130°46'9 al Este de Tacubaya.

Termina el eclipse total en general á las $9^h 56^m 51^s 2$ de la mañana en el punto cuya latitud es 25°20'8 Norte y 130°41'1 longitud Este de Tacubaya.

Termina el eclipse general para la tierra en general á las

$10^h 58^m 38^s.3$ de la mañana en el punto cuya posición es 17°36′2 latitud Norte y 101°42′7 longitud Este de Tacubaya.

El eclipse será visible en Norte América, Colombia, Venezuela, Europa, gran parte de Africa y porción occidental de Asia.

La línea de centralidad, atraviesa la República Mexicana y se dirige á los Estados Unidos, y después á través del Atlántico pasa por la península ibérica, sigue por las costas Norte de Africa y termina en el Egipto cerca del mar Rojo.

Toda la penumbra queda comprendida en la superficie de la tierra.

Determinación de las curvas límites Oeste–Este ó de salida y puesta.

Si $n < P' - (s + s')$ los dos óvalos existen separados, si $n > P' - (s + s')$ los óvalos se reunen en una sola curva cuya figura es de la de un 8 muy deformado.

En nuestro caso del 28 de Mayo de 1900 se tiene.

$$n = 1377''.9 \quad P' - (s + s') = 1591''.4$$

por consiguiente los dos óvalos existen.

Determinemos la duración de cada óvalo. En el cálculo anterior ya se encontraron las horas del principio del primer óvalo y del fin del último. Empleando $P' - (s + s')$ en lugar de $P' + (s + s')$ se obtendrá de un modo análogo.

n	3.13923		
$\Delta' = P' - (s + s')$	3.20178	$P' + s + s' = \Delta_1 =$	5394.6
		$P - (s+s') = \Delta_2 =$	1591.4
$\omega = 30° 1' 10''$ $\cos\omega$	9.93745	$q = \frac{1}{2}\Delta_1 =$	2697.3
$\mathrm{tg}\,\omega$	9.76178	$p = \frac{1}{2}\Delta_2 =$	795.7
c	3.40793		
τ	3.16971		

$\tau = \mp 24^m 38^s 1 = \mp 1478^s.1$

2^h	54	1. 8	= medio del eclipse.
2	29	23. 7	= fin del 1.er óvalo.
3	18	39. 9	principio del 2.º
0	12	38. 8	principio del 1.er óvalo.
5	35	24. 8	fin del 2.º óvalo.
2	16	44. 9	duración de ambos.

Entre estos límites deben suponerse varios instantes sucesivos. Sea t, el intervalo de tiempo comprendido entre el medio del eclipse y el instante supuesto. Calcúlense las fórmulas

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{t}{c} \qquad \Delta = \frac{n}{\cos \omega} \qquad S = -i \mp \omega$$

(ω mayor que 90° cuando n es negativo).

$$\operatorname{sen} \frac{L}{2} = \sqrt{\frac{\left(\frac{\Delta}{2} - p\right)\left(q - \frac{\Delta}{2}\right)}{P' \times \Delta}}$$

Puntos en retardo $\quad \operatorname{sen} \phi' = \cos \delta' \cos (S - L)$

$$\operatorname{tg} h = \frac{-\operatorname{tg}(S - L)}{\operatorname{sen} \delta'}$$

Punto adelantado $\quad \operatorname{sen} \phi' = \cos \delta' \cos (S + L)$

$$\operatorname{tg} h' = \frac{-\operatorname{tg}(S + L)}{\operatorname{sen} \delta'}$$

ϕ' = latitud geocéntrica
h en el mismo semicírculo que $S - L$.

h' en el mismo semicírculo que $S + L$

Aplicación al eclipse del 28 de Mayo de 1900.

Supongamos las épocas $1^h\ 20^m\ 00^s$ y $4^h\ 28^m\ 4^s$ cuyo intervalo respecto al del instante del medio del eclipse es el mismo para ambas.

1º Época $1^h\ 20^m$ Intervalo $t = 1^h\ 34^m\ 2^s$

t	3.75143	$-i = -$	4° 2′ 44″
cp c	6.59207	$-\omega = -$	65 36 35
tg ω	0.34350	$S = -$	69 39 19
cp tg ω	0.38411		
n	3.13923		
Δ	3.52334	$\Delta =$	3336.9
cp Δ	6.47666	$\frac{1}{2}\Delta =$	1668.4
m	2.94086	$p =$	795.7
n	3.01237	$q =$	2697.3
cp P'	6.45680	$m =$	872.7
$\text{sen}^2 \frac{1}{2} L$	8.88669	$n =$	1028.9
sen $\frac{1}{2} L$	9.44334		
$\frac{1}{2} L$	16° 6′ 50″		
$L =$	32 13 40		
$S = -$	69 39 13		
$S - L = -$	101 52 59		
$S + L = -$	37 25 39		

Punto en retardo.

cos $(S - L)$ ...	9.31369 —	$-$tg $(S - L)$	0.67689 —
cos δ'	9.96885	sen δ'	9.56297
sen φ'	9.28254 —	tg h	1.11392 —
tg φ'	9.29067 —	$h = -$	85° 36′ 4″
const	0.00291 —	$H\nu =$	20 44 54
tg φ	9.29358 —	$\lambda = -$	106 20 58
$\varphi = -$	11° 7′ 20″		Oeste.

Punto adelantado.

cos $(S + L)$ ...	9.89988	$-$tg $(S + L)$	9.88385 +
cos δ'	9.96885	sen δ'	9.56297
sen φ'	9.86873	tg h	0.32088 +
tg φ	0.04035	$h = -$	115° 31′ 35″
const	0.00291	$H\nu =$	20° 44′ 54″
tg φ	0.04326	$\lambda =$	136 16 49
$\varphi = +$	47° 50′ 58″		al Oeste.

2º Epoca $4^h\ 28^m\ 4^s$

$$\begin{array}{rr}
-i = & -\ 4^\circ\ \ 2'\ 44'' \\
+\omega = & 65\ \ 36\ \ 35 \\
\hline
S = & +\ 61\ \ 33\ \ 51 \\
L = & 32\ \ 13\ \ 40 \\
\hline
S-L = & +\ 29\ \ 20\ \ 11 \\
S+L = & +\ 93\ \ 47\ \ 31
\end{array}$$

Punto en retardo.

$$\begin{array}{rl}
\cos(S-L)\ldots & 9.94039 \\
\cos\delta'\ldots & 9.96879 \\
\hline
\operatorname{sen}\varphi'\ldots & 9.90918 \\
\operatorname{tg}\varphi'\ldots & 0.14218 \\
\text{const}\ldots & 0.00291 \\
\hline
\operatorname{tg}\varphi\ldots & 0.14509 \\
\varphi = + & 54^\circ\ 23'\ 50''
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
-\operatorname{tg}(S-L) & 9.74974 - \\
\operatorname{sen}\delta'\ldots & 9.56340 \\
\hline
\operatorname{tg}h\ldots & 0.18634 - \\
h = + & 123^\circ\ \ 4'\ \ 8'' \\
H_\nu = & 67\ \ 45\ \ 54 \\
\hline
\lambda = & 55^\circ\ 18'\ 14'' \\
 & \text{al Este.}
\end{array}$$

Punto adelantado.

$$\begin{array}{rl}
\cos(S+L)\ldots & 8.82232 - \\
\cos\delta'\ldots & 9.96879 \\
\hline
\operatorname{sen}'\ldots & 8.79111 - \\
\operatorname{tg}\varphi'\ldots & 8.79194 - \\
\text{const}\ldots & 0.00291 \\
\hline
\operatorname{tg}\varphi\ldots & 8.79485 \\
\varphi = - & 3^\circ\ 33'\ 15''
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
-\operatorname{tg}(S-L) & 1.17672 + \\
\operatorname{sen}\delta' & 9.56340 \\
\hline
\operatorname{tg}h & 1.61332 + \\
h = + & 88^\circ\ 36'\ 16'' \\
H_\nu = & 67\ \ 45\ \ 54 \\
\hline
\lambda = & 20\ \ 50\ \ 22 \\
 & \text{al Este.}
\end{array}$$

Determinación de las curvas límites Norte y Sur del eclipse general.

La condición de la existencia de ambas curvas ó de una sola es evidentemente la misma que la expresada antes, y además, en el caso de una sola, será la Sur, si n es positivo, la Norte si n es negativo.

Determinación de los instantes del principio y fin de cada curva y de la posición geográfica de los puntos correspondientes.

Tómense los valores siguientes para Δ':

$$\begin{array}{lll} \Delta' = P' + (s+s') & \text{eclipse} & \text{parcial.} \\ \Delta' = P' - (s+s') & \text{,,} & \text{total.} \\ \Delta' = P' & \text{,,} & \text{anular.} \end{array}$$

y añádanse 6″ al semidiámetro del Sol, porque esta cantidad representa el medio de los aumentos de los semidiámetros del Sol y de la Luna.

$$\cos \omega = \frac{n \pm \Delta'}{P'}$$

$$\tau = \frac{c\,P}{n} \operatorname{sen} \omega \qquad T = \text{medio del eclipse} \mp \tau \left\{ \begin{array}{l} \text{Principio.} \\ \text{Fin.} \end{array} \right.$$

El signo superior se toma para el límite Norte y el inferior para el Sur.

Posiciones geográficas:

$$\text{Principio.} \left\{ \begin{array}{l} a = -i - \omega \\ \operatorname{sen} \varphi' = \cos a \cos \delta' \\ \operatorname{tg} h = -\dfrac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{sen} \delta'} \end{array} \right. \qquad \text{Fin.} \left\{ \begin{array}{l} b = -i + \omega \\ \operatorname{sen} \varphi' = \cos b \cos \omega \\ \operatorname{tg} h' = \dfrac{-\operatorname{tg} b}{\operatorname{sen} \delta'} \end{array} \right.$$

h, h' en el mismo semicírculo que a y b respectivamente.

Puntos intermedios. Se determinan las siguientes constantes para todo el cálculo: u, D$'$, a', E, W.

$$u = \Delta' \cos i, \qquad D = \delta \mp u,$$

$$a' = \pm \frac{\Delta' \operatorname{sen} i}{\cos D'}, \qquad E = \frac{n}{c(n \pm \Delta')} \qquad \cos W = \frac{n \pm \Delta'}{P'}$$

el signo +, para el límite Norte, el — para el Sur. Sea t el intervalo comprendido entre el medio del eclipse y el instante considerado.

$$\operatorname{tg} \omega = t.\, E \qquad \operatorname{sen} Z = \frac{\cos W}{\cos \omega},$$

debiendo tomar á ω de modo que sen Z sea siempre positivo; Z $< 90°$, esto es, cos ω tiene el mismo signo que cos W.

$$M = -i \mp \omega$$

Coordenadas del punto:

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} Z \cos M \qquad \operatorname{tg}(h - a') = \frac{\operatorname{sen} \theta \operatorname{tg} M}{\cos(\theta + D')}$$

$$\operatorname{tg} \varphi' = \operatorname{tg}(\theta + D') \cos(h - a')$$

Verificación:

$$\frac{\operatorname{sen} \theta}{(\cos \theta + D')} = \frac{\operatorname{sen} Z \cos M}{\cos(h - a') \cos \varphi'}$$

Aplicación.—Determinemos dos puntos en cada curva del eclipse del 28 de Mayo de 1900.

$$\Delta' = s + s' + 6'' = \quad 1907''.6$$
$$n = \quad 1377\ .0 \qquad P' = 3493''.0$$

$$n + \Delta' = \quad 3284\ .6$$
$$n - \Delta' = - \quad 530\ .6$$

Limite Norte.		Límite Sur.	
$n + \Delta'$	3.51648	$n - \Delta'$	2.72477—
P′	3.54320		3.54320
$\cos \omega$	9.97328		9.18157—
ω	19°53′30″		98°44′15″
$\text{sen } \omega$	9.53179		9.99493
c	3.40793		3.40793
P′	3.54320		3.54320
cp n	6.86077		6.86077
τ	3.34369		3.80683+
$\tau = 2204.4 = \mp$	$36^m 44^s .4$	$6409.6 = \mp$	$1^h 46^m 49^s .6$
Medio $= 2^h$	54 1 .8		2 54 1 .8
Principio	2 17 17 .4		1 7 12 .2
Fin	3 30 46 .2		4 40 51 .4

	Limite Norte	Límite Sur
$-i = -$	4° 2′.44″	— 4° 2′44″
$\mp \omega = \mp$	19 53 .30	98 44 15
$a = -$	23 56 .14	— 102 46 59
$b = +$	15 50 .46	+ 94 41 33

LÍMITE NORTE.

Entrada.

$\cos a$	9.96094	$-\operatorname{tg} a$	9.64729+
$\cos \delta'$	9.96883	$\operatorname{sen} \delta'$	9.56311
$\operatorname{sen} \varphi'$	9.92977	$\operatorname{tg} h$	0.08418+
$\operatorname{tg} \varphi'$	0.20905	$h = -$	129°28′53″
const	0.00291	$H =$	35 4.15
$\operatorname{tg} \varphi$	0.21196	$\lambda =$	164 33. 8
$\varphi = +$	58°27′30″		al Oeste.

Salida.

$\cos b$	9.98317	$-\operatorname{tg} b$	9.45316—
$\cos \delta'$	9.96880	$\operatorname{sen} \delta'$	9.56327
$\operatorname{sen} \varphi'$	9.95197	$\operatorname{tg} h$	9.88989—
$\operatorname{tg} \varphi'$	0.30316	$h =$	142° 11′ 12″
const	0.00291	$H_v =$	53 26.30
$\operatorname{tg} \varphi$	0.30607	$\lambda =$	88 44.42
$\varphi = +$	63° 42′		al Este.

LÍMITE SUR.

Entrada.

$\cos a$	9.34488—	$-\operatorname{tg} a$	0.64421—
$\cos \delta'$	9.96885	$\operatorname{sen} \delta'$	9.56296
$\operatorname{sen} \varphi'$	9.31373—	$\operatorname{tg} h$	1.08125—
$\operatorname{tg} \varphi'$	9.32314—	$h = -$	85° 15′ 32″
const	0.00291	$H_v =$	16 48.00
$\operatorname{tg} \varphi$	9.32605—	$\lambda = -$	102 3.32
$\varphi = -$	11° 57′ 43″		al Oeste.

Salida.

$\cos b$	8.91280—	$-\operatorname{tg} b$	1.08574+
$\cos \delta'$	9.96878	$\operatorname{sen} \delta'$	9.56343
$\operatorname{sen} \varphi'$	8.88158—	$\operatorname{tg} h$	1.52231
$\operatorname{tg} \varphi'$	8.88284—	$h =$	88°16′ 40
const	0.00291	$H_v =$	70 12.45
$\operatorname{tg} \varphi$	8.88575	$\lambda =$	18 3.55
$\varphi = -$	4°21′57″		al Este.

Determinación de las constantes.

			Lím. N.		*Lím. S.*
Δ'	3.28049		3.28049		
$\cos i$	9.99891	$\operatorname{sen} i$	8.84849		
μ	3.27940	$\Delta' \operatorname{sen} i$	2.12898		2.12898
$u = \mp$	$31' 42''.8$	$\cos D'$	9.97037	$\cos D'_1$	9.96722
$\delta' =$	$21° 27\ 16\ .0$	a'	2.15861	a''	2.16176
Limite N. $D' =$	$+20° 55' 33\ .2$	$a' = +$	$2' 24''.1$	$a'' = -$	$2' 11''.1$
„ S. $D_1' =$	$21\ 58\ 58\ .8$				

Limite Norte.				*Limite Sur.*			
n	3.13923	$n + \Delta'$	3.51608	n	3.13923	$n - \Delta'$	2.72471—
cp c	6.59207	P′	3.54380	cp c	6.59207	P′	3.54320
cp $(n + \Delta')$	6.48352	cos W.	9.97328	cp $(n - \Delta')$	7.27523—	cos W.	9.18157—
E.	6.21482			E.	7.00658—		

Tomemos las épocas $2^h 20^m 00^s$ y $3^h 28^m 4^s$ cuyo intervalo respecto del medio del eclipse es 2042^s.

Limite Sur.

Epoca $2^h20^m.00^s$		$t = -2042^s$		Epoca $3^h28^m.4^s$		$t = +2042^s$	
t	3.31006−	cos W	9.18157−	t	3.31006	cos W	9.18157−
E	7.00658−	cos ω	9.63874−	E	7.00658−	cos ω	9.63874−
tg ω	0.31664+	sen Z	9.54283+	tg ω	0.31664−	sen Z	9.54283
$\omega = -$	115°48′ 6″	Z =	20°25′35″	$\omega = +$	115°48′ 6″	Z =	20°25′35″
$-i = -$	4 2 44			$-i = -$	4 2 44		
M = −	119°50′50″			M =	111°45′22″		
tg Z	9.57103			tg Z	9.57103		
cos M	9.69696	tg M	0.24124+	cos M	9.56897−	tg M	0.39894−
tg θ	9.26799	sen θ	9.26064+	tg θ	9.14000−	sen θ	9.13590
$\theta =$	169°29′59″	cp cos $(\theta + D')$	0.00878−	$\theta =$	172° 8′26″	cp cos D'_1	0.01333−
$D'_1 =$	21 58 59	tg $(h - a)$	9.51066−	$D_1' =$	21 58 59	tg $(h - a)$	9.44817+
$\theta + D_1' =$	191°28′58″	$h - a = -$	17°57′24″	$\theta + D'_1$	194° 7′25″	$h - a =$	19°27′35″
tg $(\theta + D')$	9.30779+	$a -$	2 11	tg	9.40074	$a = -$	2 11
cos $(h - a)$	9.97831	$h = -$	17°59′35″	cos $(h - a)$	9.97445	$h =$	19°25′24″
tg φ'	9.28610	H =	35 44 54	tg φ'	9.37519+	H =	52 45 54
const	0.00291	$\lambda =$	53°44′29″	const	0.00291	$\lambda =$	33°20′30″
tg φ	9.28901	al Oeste.		tg φ	9 37810	al Oeste.	
$\varphi =$	+11°0′32″			$\varphi = +$	13°25′58″		

Verificación.

sen θ	9.26064	sen Z	9.54283	sen θ	9.13590	cos Z	9.54283
cp cos $(\theta + D')$	0.00878—	cos M	9.69696—	cp cos D′	0.01333—	cos M	9.56897—
	9.26942—		9.23979—		9.14923—		9.11180—
		cos $(h - a)$	9.97831			cos φ	9.98811+
		cos φ'	9.99205			cos $(h - a)$	9.97445+
		Igual	9.26943—			Igual	9.14924—

Límite Norte.

Época $2^h 20^m.00^s$ $t = -2042^s$. Época $3^h 28^m.4^s$ $t = +2042^s$.

t	3.31006—	cos W	9.97328+				
E	6.21482+	cos ω	9.76992				
tg ω	9.52488—	sen Z	9.99636				
$\omega = -$	18°30′51″	Z =	82°35′30″	$\omega = +$	18°30′51″		
$-i = -$	4 2 44			$-i = -$	4 2 44		
M = —	22°33′35″			M =	14°28′07″		
tg Z	0.88597+			tg Z	0.88597+		
cos M	9.96543+	tg M	9.61850—	cos M	9.98600+	tg M	9.41167+

$\mathrm{tg}\,\theta$	0.85140	$\mathrm{sen}\,\theta$	9 99574	$\mathrm{tg}\,\theta$	0.87197+	$\mathrm{sen}\,\theta$	9.99612+
$\theta =$	81°59′ 8″	$\mathrm{cp}\cos D'$	0.65082—	$\theta =$	82°21′06″	$\mathrm{cp}\cos(\theta + D')$	0.63890—
$D' =$	20 55 33	$\mathrm{tg}(h - a)$	0.26506+	$D' =$	20 55 23	$\mathrm{tg}(h - a)$	0.04669—
$\theta + D' =$	102°54′41″	$h - a =$	— 118°30′35″	$\theta + D' =$	103°16′39″	$h - a =$	131°55′33″
$\mathrm{tg}(\theta + D')$	0.63970—	$a =$	+ 2 24	$\mathrm{tg}(\theta + D')$	0.62713—	$a =$	2 24
$\cos(h - a)$	9.67880—	$h =$	— 118°28′11″	$\cos(h - a)$	9.82489—	$h =$	131°57′57″
$\mathrm{tg}\,\varphi'$	0.31850+	$H =$	35 44 54	$\mathrm{tg}\,\varphi'$	0.45202+	$H =$	52 45 54
const	0.00291	$\lambda =$	154°13′05″	const	0.00291	$\lambda =$	79°12′03″
$\mathrm{tg}\,\varphi$	0.32141		al Oeste.	$\mathrm{tg}\,\varphi$	0.45493		al Este.
$\varphi = +$	64°29′41″			$\varphi = +$	70°40′07″		

Verificación.

sen θ	9.99574
cp cos $(\theta+D')$	0.65082—
	0.64656—

sen Z	9.99636+
cos M	9.96543+
	9.96179
cos φ'	9.63643
cos $(h-a)$	9.67880—
Igual	0,64656—

sen θ	9.99612
cp cos $(\theta+D')$	0.63890—
	0.63502—

sen Z	9.99636
cos M	9.98600
	9.98236
cos φ	9.52245
cos $(h-a)$	9.82482—
Igual	0.63502—

Curvas del máximun en el horizonte.

Si $P' > n + (s + s')$ la curva es interrumpida.

Si $P' < n - (s + s')$ la curva es continua.

lo que es conforme á lo dicho antes. Además, debe tenerse presente la desigualdad $n <$ ó $>(s+s')$ y combinarla con la que exista de las dos anteriores.

En el caso que nos ocupa ya vimos que $P' > n+(s+s')$, y cómo, además, que $n=1377{,}9$ y $s+s'=1901.6$, $n<(s+s')$.

Se calculan las fórmulas siguientes. (τ es el intervalo de tiempo respecto al medio del eclipse.)

Primera posición.

$$\omega = 90^\circ \qquad \tau = \frac{c\,P'}{n}$$

Principio:

$$a = -i - 90^\circ, \qquad \operatorname{sen}\varphi' = -\operatorname{sen} i \cos\delta' \qquad \operatorname{tg} h = -\frac{\cot i}{\operatorname{sen}\delta'}$$

(h entre 0° $y - 180^\circ$.)

Fin:

$$b = -i + 90^\circ,$$

(cámbiese el signo de la latitud, y al ángulo horario h aplíquesele $\pm 180^\circ$.)

Segunda posición.

$$\cos\omega_2 = \frac{n \pm (s+s')}{P'} \qquad \tau = \frac{c\,P'}{n} \operatorname{sen}\omega_2$$

($\omega > 90^\circ$ si $\delta - \delta'$ es negativo).

Principio:

$$a = -i - \omega_2 \qquad \operatorname{sen}\varphi' = \cos a \cos\delta' \qquad \operatorname{tg} h = -\frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{sen}\delta'}$$

Fin:

$$b = -i + \omega_2 \qquad \operatorname{sen}\varphi' = \cos b \cos\delta' \qquad \operatorname{tg} h' = -\frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{sen}\delta'}$$

($\omega_2 > 90°$ si $\delta - \delta'$ es negativo, n se considera positivo) h en el mismo semicírculo que a ó b.

De estas épocas, dos son los extremos en los cuales tiene lugar la fase, y las otras cuatro son los límites N. y S. del eclipse general. Determinadas así las épocas límites entre las cuales se verifica el fenómeno, para tener otros puntos intermedios se calculan las fórmulas (t intervalo de tiempo entre el medio del eclipse y la época supuesta):

$$\operatorname{sen} \omega = \frac{n}{c\,P'}\,t \qquad (\omega > 90° \text{ si } \delta - \delta' \text{ es negativo})$$

y para las posiciones geográficas, fórmulas análogas á las dadas anteriormente.

Aplicación.—En el eclipse del 28 de Mayo de 1900 existen los dos óvalos, y por lo tanto dos curvas para el máximum en el horizonte. Además, $n < (s + s')$.

1º $\omega = 90°$	c	3.40793	Medio =	2 54 1.8
	π_0	3.54320	$\tau = \mp$	1 48 4.9
	cp n	6.86077	1ª época	1 5 56.9
	τ	3.81190	6ª „	4 42 6.7

$\tau = 6484.9$

Las épocas son:

		1ª	$1^h\ 5^m 57^s$
Principio	límite N.	2ª	2 17 17
„	„ S.	3ª	1 7 12
Fin	„ S.	4ª	4 40 51
„	„ N.	5ª	3 30 46
		6ª	4 42 07

Constante $\dfrac{n}{c\,P'}$ 6.18810

Sean las épocas $2^h 4^m 00^s$ y $3^h 44^m 4^s$, $t = 3002$ para ambas.

Epoca $2^h 4^m 00^s$.

t	3.47741	$\cos a$	9.93020	$-\operatorname{tg} a$	9.78938+
const	6.18810	$\cos \delta'$	9.96881	$\operatorname{sen} \delta'$	9.59439
$\operatorname{sen} \omega$	9.66551	$\operatorname{sen} \varphi'$	9.89901	$\operatorname{tg} h$	0.19499+
$\omega =$	17°34′32″	$\operatorname{tg} \varphi'$	0.11380	$h = -$	122°32′58″
$i =$	4 02 44	const	0.00291	$H_v =$	31 44 54
$a =$	31°37′16″	$\operatorname{tg} \varphi$	0.11671	$\lambda =$	154°17′52″
$b = +$	23 31 48	$\varphi =$	52°36′28″		al Oeste.

Epoca: $3^h 44^m 4^s$

$\cos b$	9.96230	$-\operatorname{tg} b$	9.63892—
$\cos \delta'$	9.96881	$\operatorname{sen} \delta'$	9.59439
$\operatorname{sen} \varphi'$	9.93111	$\operatorname{tg} h$	0.04453—
$\operatorname{tg} \varphi'$	0.21396	$h =$	132°04′05″
const	0.00291	$H_v =$	56 45 54
$\operatorname{tg} \varphi$	0.21687	$\lambda =$	75°18′11″
$\varphi =$	58°44′45″		al Este.

Línea del eclipse central.

Designando como antes por t el intervalo de tiempo comprendido entre el medio del eclipse y una época supuesta, calcúlense las fórmulas siguientes:

$$\operatorname{tang} \omega = \frac{t}{c} \qquad \Delta = \frac{n}{\cos \omega}$$

$\omega > 90°$ cuando n es negativo.

$$S = -i \mp \omega$$

el signo superior se emplea para la época *anterior* al medio del eclipse y el inferior para la época posterior. En seguida:

$$\operatorname{sen} Z = \frac{\Delta}{P'} \qquad \operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} Z \cos S$$

$$\operatorname{tg} h = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos(\theta + \delta')} \operatorname{tg} S \qquad \operatorname{tg} \varphi' = \operatorname{tg}(\theta + \delta') \cos h$$

en las que θ, tiene el mismo signo que cos S y *menor* que 90°, h en el mismo semicírculo que S.

Eclipse central á medio día verdadero.

Evidentemente para este instante

$$h = 0 \qquad \Delta = \delta - \delta' \qquad S = 0$$

$$\operatorname{sen} Z = \frac{\delta - \delta'}{P'} \qquad \varphi' = \delta' + Z$$

longitud Oeste = hora verdadera de la ☉ en A.R.
(Z tiene el mismo signo que $\delta - \delta'$.)

Aplicación.

Sea determinar dos puntos de la línea central en el eclipse del 28 de Mayo de 1900.

El cálculo para el eclipse en general dió para los extremos de la línea las horas $1^h\ 14^m\ 43^s$ y $4^h\ 33^m\ 21^s$. Entre estas horas debe elegirse la época.

Sean éstas $2^h\ 20^m\ 00^s$ y $3^h\ 28^m\ 4^s$. Entonces $t = 2042^s$.

1º Época $= 2^h\ 20^m\ 00^s$

t…………	3.31006	cp cos ω	0.10704	tg Z	9.76691	tg $(\theta + \delta)$	9.99583
cp c……	6.59207	n………	3.13923	cos S_1	9.86663	cos h	9.94943
tg ω……	9.90213	Δ	3.24627	tg θ	9.63354	tg φ'	9.94526
$\omega =$	38° 35′ 50″	cp P'	6.45680	sen θ	9.59668	const	0.00291
$-i = -$	4 2 44			tg S_1	9.96423 —		
		sen Z	9.70307	cp cos $(\theta + \delta)$	0.14844	tg φ	9.94817
$S_1 =$	− 42 38 34	$Z =$	30° 18′ 50″			$\varphi =$	+ 45° 35′ 20″
$S_2 =$	+ 34 33 6	$\theta =$	23 16 15	tg h	9.70935 —		
		$\delta' =$	21 27 16	$h = -$	27° 7′ 00″		
				$H\nu =$	35 44 54		
		$\theta + \delta = +$	44 43 31				
				$\lambda =$	62 51 51		
					al Oeste.		

2º Época $3^h\ 28^m\ 4^s$

tg Z	9.76691	sen θ	9.63735	tg $(\theta + \delta')$	0.03287
cos S_2	9.91572	tg S_2	7.83797	cos h	9.96166
		cp cos $(\theta + \delta)$.	0.16758		
tg θ	9.68263			tg φ'	9.99453
$\theta =$	$25° 42' 45''$	tg h	9.64290	const	0.00291
$\delta =$	$21° 27' 15''$	$h =$	$25° 43' 20''$		
		$H_\flat =$	52 45 54	tg φ	9.99744
$\theta + \delta' =$	47 10 1			$\varphi =$	$+ 44° 49' 50''$
		$\lambda =$	27 2 34		
			al Oeste.		

Los datos que constan en las tablas que van á continuación fueron calculados de un modo semejante á lo que hemos expuesto. Con estos datos, mi apreciable amigo y compañero el Sr. Ingeniero Guillermo B y Puga tuvo la amabilidad de dibujar las cartas que se acompañan y trazar en ellas las curvas del eclipse.

Principia el eclipse al Orto.		*Fin del eclipse al Orto.*	
Latitud.	**Longitud.**	**Latitud.**	**Longitud.**
—10° 19′ 8	99° 10′ 6 O.	—11° 38′ 3	100° 47′ 9 O.
— 5 43 3	96 0 6	—11 49 3	103 33 9
— 0 45 2	95 27 2	—11 7 3	106 20 9
— 8 43 9	97 19 0	— 9 27 8	109 31 2
+22 3 9	105 50 6	— 6 29 7	113 2 1
28 4 3	110 37 9	— 2 1 3	117 27 5
33 49 8	115 54 8	+ 4 29 4	122 0 3
37 39 0	120 45 7	13 45 4	128 43 9
41 39 0	127 25 4	27 1 5	137 13 9
44 54 8	131 8 1	58 10 0	164 41 8

Principia el eclipse al Ocaso.		*Fin del eclipse al Ocaso.*	
Latitud.	**Longitud.**	**Latitud.**	**Longitud.**
— 3° 33′ 3	20° 50′ 4 E.	— 2° 45′ 5	13° 39′ 4 E.
— 3 45 7	23 15 8	— 1 9 3	11 47 0
— 4 15 2	18 4 4	+ 6 49 5	9 54 8
+ 5 33 4	31 54 8	+29 29 1	19 59 5
+ 1 4 4	27 39 5	+36 6 5	26 17 7
+12 3 2	37 1 1	41 0 3	32 5 5
21 16 3	43 28 7	51 39 4	49 20 6
34 22 2	52 29 4	54 23 8	55 18 2
+63 17 5	85 37 3	58 58 8	67 44 1
+63 28 2	88 27 6	55 22 2	59 10 3

Línea del eclipse central.

Latitud.	Longitud.
+ 17° 55′ 6	116° 40′ 4 O
22 10 4	106 45 0
23 19 0	104 10 4
24 48 6	100 59 1
25 59 6	98 27 7
27 36 8	95 12 8
28 32 3	93 20 7
29 47 5	90 47 9
30 33 3	89 14 8
31 37 3	87 4 7
33 13 2	83 46 6
35 55 8	77 56 0
38 10 1	72 39 6
41 35 3	62 51 9
42 47 6	58 5 6
43 51 3	53 18 7
44 48 3	46 29 8
44 56 5	45 00 6
45 13 3	39 29 6
44 49 8	27 2 6
44 9 5	23 31 4
43 7 0	17 44 3
41 38 0	11 33 0
39 37 6	4 51 9 O.
36 48 0	3 25 6 E.
32 17 3	14 49 8 „
25 24 3	31 35 3 „

Límite Norte del eclipse general.

Lat.	Long.	Lat.	Long.
+58° 27′ 5	164° 33′ 1 O.	+ 87° 59′ 2	169° 38′ 3 O.
64 29 7	154 13 1	85 30 4	77 30 7 E.
72 18 8	147 18 2	80 53 3	78 41 4
78 34 0	141 40 9	70 40 1	79 12 1
84 0 2	133 10 9	63 42 0	88 44 7

Límite Sur del eclipse general.

Lat.	Long.	Lat.	Long.
—11° 57′ 7	102° 3′ 5 O.	+ 13° 28′ 8	42° 58′ 6 O.
— 6 55 8	91 20 6	13 39 9	39 30 3
— 1 15 9	79 49 0	13 35 3	36 26 5
+ 2 8 1	73 14 0	13 25 9	33 20 5
3 59 8	67 31 2	12 59 0	29 12 9
6 44 9	64 3 8	12 16 9	26 23 2
9 19 3	60 25 2	11 17 0	22 26 3
9 50 8	56 57 7	9 54 9	18 0 9
11 0 5	53 44 5	8 1 4	12 42 0
11 56 0	50 44 5	5 18 5	5 22 0
12 39 6	47 46 8	+ 0 18 4	5 55 8 E.
13 11 5	44 50 7	— 4 22 0	18 3 9 „
13 21 1	43 17 5		

Máximum en el horizonte.

Lat.	Long.	Lat.	Long.
+17° 0′ 5	106° 36′ 7 O.	+ 24° 29′ 5	31° 43′ 4 E.
27 28 5	124 18 4	34 48 8	40 5 7
35 18 8	131 25 3	42 27 3	48 4 2
41 50 4	138 35 5	48 45 1	56 20 7
47 32 5	146 9 7	57 7 6	65 18 4
52 36 5	154 17 9	48 54 8	75 17 7
57 6 5	163 22 5	62 36 9	86 38 9

Elementos de Bessel.

Vamos ahora á presentar las fórmulas que sirven para determinar los elementos llamados de Bessel, por cuyo medio se facilita mucho el cálculo de predicción, para un lugar determinado de la superficie de la tierra, de un eclipse solar; cuyos elementos publican hoy las principales Efemérides.

Sean a, δ, r, la ascensión recta, la declinación del centro de la luna y su distancia al centro de la tierra.

a', δ', r' lo mismo respecto al sol.

π, π' paralajes ecuatoriales horizontales de la luna y del sol.

π_0 la paralaje horizontal media del sol, cuyo valor es 8.″80 (Conferencia de Paris de 1896).

s_0 el semidiámetro del sol á la distancia media, cuyo valor es 959.″63 (*Auwer*).

El eje de los conos prolongado de la luna hacia el sol encuentra á la esfera celeste en un punto que designaremos por Z, y cuya ascensión recta es a, la declinación d, y μ el ángulo horario en un instante del primer meridiano. Estos elementos se calculan por las fórmulas siguientes: Poniendo

$$b = \frac{r}{r'} = \frac{\text{sen}\,\pi'}{\text{sen}\,\pi} = \frac{\text{sen}\,\pi_0}{r'\,\text{sen}\,\pi} \qquad (\log\,\text{sen}\,\pi_0 = 5{,}6300576)$$

$$g = 1 - b$$

$$a = a' - g\cos\delta\sec\delta'\,(a - a') \qquad d = \delta' - g\,(\delta - \delta')$$

$$\mu = T - a\,, \qquad (T \text{ hora sidérea})$$

Por el centro de la tierra tomado como origen de coordenadas hagamos pasar un plano perpendicular al eje de los conos, plano que lleva el nombre de *principal, de referencia* ó *fundamental.* Por eje de las x tomaremos la intersección del plano principal con el del ecuador terrestre, la parte positiva hacia el punto cuya ascensión recta es $90° + a$; el eje de las y perpendicular al anterior y la parte positiva hacia el Norte; el eje de las z es la perpendicular al plano principal, siendo la parte positiva de la tierra á la luna. En consecuencia x, y, z, son las coordenadas de la luna, cuyos valores se encuentran por las fórmulas

$$x = r \cos \delta \operatorname{sen} (\alpha - a)$$
$$y = r \operatorname{sen} (\delta - d) \cos^2 \tfrac{1}{2} (\alpha - a) + \operatorname{sen} (\delta + d) \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} (\alpha - a)$$
$$z = r \cos (\delta - d) \cos^2 \tfrac{1}{2} (\alpha - a) - \cos (\delta - d) \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} (\alpha - a)$$

y si se toma el radio ecuatorial de la tierra por unidad r

$$r = \frac{1}{\operatorname{sen} \pi}$$

Sea $k = 0.272274$ la relación del radio de la luna al ecuatorial terrestre.

f, f' los semiángulos de los conos de penumbra y de sombra.

l, l' los radios de la penumbra y de la sombra en el plano fundamental (l' debe tomarse negativo en un eclipse total).

Calcúlese el ángulo de los conos por la expresión

$$\operatorname{sen} f = \frac{\operatorname{sen} s_o \pm k \operatorname{sen} \pi_o}{r' g}$$

empleando el signo superior para la penumbra y el inferior para la sombra.

El numerador es una cantidad constante cuyo logaritmo es el siguiente, que se obtiene poniendo los valores de los términos que lo componen:

7.6687585 penumbra
7.6665929 sombra

designando por c la distancia del vértice de un cono al plano principal, se tiene

$$c = z \pm \frac{k}{\operatorname{sen} f}$$

y como antes, el signo + es para la penumbra, el — para la sombra.

Los radios de penumbra y de sombra quedan determinados por las expresiones

$$l = c \operatorname{tg} f \qquad \text{ó} \quad l' = c \operatorname{tg} f'.$$

Las cantidades x, y, sen d, cos d, μ, l, l', tg f y tg f' son independientes del lugar de observación y se calculan disponiéndolas en tablas para intervalos equidistantes (de 1^h generalmente) antes y después de la hora de la conjunción.

Como x é y no varían uniformemente, se determinan sus variaciones horarias x', y' para cada una de las épocas, facilitando así la interpolación para un instante cualquiera.

Aplicación.—Calcular los elementos del eclipse de sol que sucederá el día 28 de Mayo de 1900.

Ya dimos los valores de $\alpha, \delta, \pi, \alpha', \delta', r'$, para las épocas de 0^h á 6^h. Presentamos aquí el cálculo solamente para la hora 2^h. Reuniremos todos los datos que necesitamos.

$$\alpha = 64° \; 21' \; 24.''30 \qquad \delta = +\; 21° \; 47' \; 40.''4$$
$$\alpha' = 64 \;\; 54 \;\; 25.\; 80 \qquad \delta' = 21 \;\; 25 \;\; 52.\; 8$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha - \alpha' = -\;\; 33 \;\;\; 1.\; 50 \\ = -\;\; 1981.50\end{array}\right\} \qquad \begin{array}{r}\delta - \delta' = \qquad 20 \;\; 47.\; 6 \\ 1247.6\end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \log \operatorname{sen} \pi_o & 5.6300576 & \log g \quad 9.9989242 \\ \log \operatorname{sen} \pi & 8.2307199 & \\ \log r' & 0.0059378 & \text{cp} \log \operatorname{sen} \pi = \log r = 1.7692801 \\ \hline \log b = & 7.3933999 & \\ b = & 0.002474 & \\ 1 - b = g = & 0.997526 & \end{array}$$

Elementos del punto Z.

$\log b =$	7.3933999		
$\log (1 - b)$	9.9989242		
$\log \left(- \frac{b}{1-b} \right)$	7.3944757 ....41..............		7.3944757 — 4
$\log \cos \delta$	9.9677917	$\log (d - \delta')$	3.0960754
$\log \sec \delta'$	0.0311670		
$\log (a - a')$	3.2969941 —	$\log (d - \delta')$	0.4915511 — o
		$d - \delta' =$	$- 3''09$
ol $\log (a - a')$	0.6914285 +	$\delta' =$	$21^\circ\ 26'\ 52''80$
$a - a' =$	$+ 4''90$		
$a' =$	$64^\circ\ 54'\ 25''80$	$d =$	21 26 49.7
$a =$	64 54 30 70		
$A. R. m =$	$4^h\ 22^m\ 16^s\ 98$		
2^h en tpo. sidéreo	2 0 19 71		
Hora sid.ª	6 22 36 69		
en arco	$95^\circ\ 39'\ 10''35$		
$\mu =$	$30\ 44'\ 39''65$		

Coordenadas de la luna.

$a = 64^\circ\ 21'\ 24''30$	$\delta = 21^\circ\ 47'\ 40''4$	$\log \operatorname{sen} (a - a) = 7.9836349$ —
$a = 64\ 54\ 30\ 70$	$d = 21\ 26\ 49\ 7$	
$a - a = -\ 0\ 33\ 6\ 40$	$\delta - d = +\ 20\ 50\ 7$	
$-\ 1986.40$	$+\ 1250.7$	
$\frac{1}{2}(a - a) = -\ 0\ 16\ 33\ 20$	$\delta + d = 42^\circ\ 14'\ 30''1$	

$\log r$..................	1.7692801	....	1.7692801	....	1.7692801
$\log \cos \delta$..............	9.9677917	$\log \operatorname{sen} (\delta - d)$	7.7827253	$\log \operatorname{sen} (\delta + d)$	9.8357396
$\log \operatorname{sen} (\alpha - a)$......	7.9836349 —	$\log \cos^2 \frac{1}{2} (\alpha - a)$	9.9999900	$\log \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} (\alpha - a)$	5.3652198
$\log x$	9.7207067 —	(1)	9.5519954	(2)	6.9702395
$x = -$	0.52566	(1) =	0.356447		
		(2) =	0.000934		
		$y = +$	0.357381		
		r........................	1.7692801	....	1.7692801
		$\log \cos \quad (\delta - d)$....	9.9999920	$\log \cos (\delta + d)$	9.8624118
		$\log \cos^2 \frac{1}{2} (\alpha - a)$....	9.9999900	$\log \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} (\alpha - a)$	5.3652198
		(1)	1.7692621		6.9969117
		(1) =	58.78440		
		(2) =	0.00099		
		$(1) - (2) = z = +$	58.78341		

Semiángulos de los conos y radios de la penumbra y sombra.

const.	7.6687585	....	7.6665929
$\log r'$..................	0.0059378		0.0059378
$\log g$....................	9.9989242		9.9989242
$\log \operatorname{sen} f$	7.6638965	$\log \operatorname{sen} f'$	7.6617309
$\log. \operatorname{tg} f$..............	7.6639010	$\log \operatorname{tg} f'$	7.6617354
$\log k$....................	9.4349998	....	9.4349998
$\log \dfrac{k}{\operatorname{sen} f}$	1.7711033	$\log \dfrac{k}{\operatorname{sen} f'}$...	1.7732689
	$= 59.03415$		$= 59.32925$
	$z = 58.78341$		58.78341
$c' = z + \dfrac{k}{\operatorname{sen} f} =$	117.81756	$c = z - \dfrac{k}{\operatorname{sen} f'} =$	0.54584
$\log c$....................	2.0712100	....	9.7370654 —
$\log \operatorname{tg} f$..............	7.6639010	$\log \operatorname{tg} f'$......	7.6617354
$\log l$....................	9.7351110	$\log l'$.........	7.3988008 —
$l = +$	0.54339	$l' = -$	0.00250

De la misma manera fueron calculados los elementos correspondientes á las demás horas cuyo resumen consta en la tabla adjunta, en la cual se hizo la interpolación de 10^m en 10^m determinando las variaciones por minuto de x, y, μ.

Elementos del eclipse total de sol de Mayo 28 de 1900.

Tiempo medio de Greenwich.	x	y	log sen d	log cos d.	μ	l	l'
h m					° ′		
0 0	− 1,63125	+ 0,27752	+ 9.56280	+ 9.96888	0.44,6	+ 0.54308	− 0.00282
10	1.53913	0.28423	9.56282	9.96887	3.14,6	0.54311	0 00279
20	1 44701	0.29092	9.56284	9.96887	5.44,6	0.54314	0 00276
30	1.35483	0.29761	9.56287	9.96887	8.14,6	0.54316	0.00273
40	1,26276	0.30429	9.56289	9.96886	10.44,6	0.54319	0.00270
50	1.17063	0.31095	9.56291	9.96886	13.14,7	0.54322	0.00268
1 0	− 1.07849	+ 0.31761	+ 9.56293	+ 9.96886	15.44,7	+ 0.54325	− 0 00265
10	0.98686	0.32426	9.56295	9.96885	18.14,7	0.54328	0.00263
20	0.89422	0.33090	9.56297	9.96885	20.44,7	0.54330	0.00260
30	0.80208	0.33753	9.56299	9.96885	23 14,7	0.54332	0.00258
40	0.70994	0.34415	9.56302	9.96884	25.44,7	0.54334	0.00255
50	0.61780	0.35076	9.56364	9.96884	28.14,7	0.54337	0.00253
2 0	− 0.52566	+ 0.35738	+ 9.56306	+ 9.96884	30.44,7	+ 0.54339	− 0.00250
10	0.43351	0.36396	9.56308	9.96883	33.14,7	0.54341	0.00248
20	0.34136	0.37054	9.56310	9.96883	35.44,7	0.54344	0.00246
30	0.24922	0.37712	9.56312	9.96883	38.14,7	0.54346	0.00243
40	0.15707	0.38368	9.56314	9.96882	40.44,7	0.54348	0.00241
50	0.06492	0.39024	9.56317	9.96882	43.14,7	0.54350	0.00239
3 0	+ 0.02722	+ 0.39678	+ 9.56319	+ 9.96882	45.44,7	+ 0.54352	− 0,00237
10	0.11937	0.40332	9.56321	9.96881	48.14,7	0.54354	0.00236
20	0.21151	0.40985	9.56323	9.96881	50.44,7	0.54356	0.00234
30	0.30366	0.41637	9.56325	9.96881	53.14,7	0.54357	0.00232
40	0.39580	0.42287	9.56327	9.96880	55.44,7	0.54359	0.00231
50	0.48794	0.42937	9.56329	9.96880	58.14,7	0,54361	0.00229
4 0	+ 0 58008	+ 0.43586	+ 9.56331	+ 9.96880	60.44,7	+ 0.54362	− 0.00228
10	0.67222	0.44234	9.56334	9.96879	63.14,7	0.54364	0.00226
20	0.76436	0.44881	9.56336	9.96879	65.44,7	0.54365	0.00225
30	0.85650	0.45527	9.56338	9.96879	68.14,7	0.54366	0.00224
40	0.94863	0.46172	9 56340	9.96878	70.44,7	0.54367	0.00222
50	1.04076	0.46817	9.56342	9.96878	73.14,7	0.54368	0.00221
5 0	+ 1.13288	+ 0.47460	+ 9.56344	+ 9.96878	75.44,7	+ 0.54369	− 0.00220
10	1,22501	0.48102	9.56346	9.96877	78.14,7	0.54370	0.00219
20	1,31713	0.48743	9.56348	9.96877	80.44,7	0.54371	0.00218
30	1,40925	0.49384	9.56351	9.96877	83.14,7	0.54372	0.00217
40	1.50136	0.50023	9.56353	9.96876	85.44,7	0.54373	0.00216
50	+ 1.59347	0.50668	9.56355	9.96876	88.14,7	0.54374	0.00215

Tiempo medio de Greenwich.	x'	y'	μ'	log tg f.	log tg f'.
h m					
0	0 00921	0,00067	15′	+ 7.66391	+ 7.66174
1	921	67	15	390	174
2	921	66	15	390	173
3	921	65	15	390	173
4	921	65	15	390	173
5	921	64	15	389	173
6	921	64	15	389	173

Sean ahora:

ξ, η, ζ, las coordenadas rectilíneas del punto de observación referidas á los mismos ejes anteriores.

λ su longitud Oeste del primer meridiano.

φ, φ', ρ, las latitudes geográfica y geocéntrica y el radio central correspondiente.

Calcúlense las constantes ρ sen φ', ρ cos φ'.

Es evidente que en el instante de una fase *(principio ó fin)* la distancia del punto de observación al eje de los conos es justamente igual al radio de la penumbra ó sombra en un plano que pasa por dicho punto paralelamente al fundamental. Representémoslo por L, su expresión estará dada por la fórmula

$$L^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$$

que es la ecuación fundamental de los eclipses. Con el objeto de resolverla elíjase como primera aproximación una hora T próxima al medio del eclipse, ó bien la hora misma de la conjunción verdadera en ascensión recta y tómense para ese instante de las tablas generales los valores de x, y, log sen d, log cos d, μ, l, log tg f (l', log tg f' cuando sea necesario). Se calculan las coordenadas ξ, η, ζ, por las fórmulas

$$\xi = \rho \cos \varphi' \operatorname{sen} (\mu - \lambda)$$
$$\eta = \rho \operatorname{sen} \varphi' \cos d - \rho \cos \varphi' \operatorname{sen} d \cos (\mu - \lambda)$$
$$\zeta = \rho \operatorname{sen} \varphi' \operatorname{sen} d + \rho \cos \varphi' \cos d \cos (\mu - \lambda)$$

y sus variaciones por minuto

$$\xi' = (7.63992)\ \rho \cos \varphi' \cos (\mu - \lambda)$$
$$\eta' = (7.63992)\ \rho \cos \varphi' \operatorname{sen} d \operatorname{sen} (\mu - \lambda) = (7.63992)\ \xi \operatorname{sen} d$$

El radio de penumbra ó de sombra está dado por la expresión

$$L = l - \zeta \operatorname{tg} f$$

y la ecuación fundamental de los eclipses debe verificarse si á la hora supuesta el punto de observación se encuentra en la superficie de uno de los dos conos. Mas no siendo así generalmente, y sobre todo en la primera aproximación, la hora supuesta diferirá de la real un intervalo de tiempo que expresado en minutos designaremos por τ. La nueva hora será $T + \tau$ y las cordenadas x, y, ξ, η, serán

$$(x + x' \tau), (y + y' \tau), (\xi + \xi' \tau), (\eta + \eta' \tau)$$

y la ecuación fundamental tomará la forma

$$L^2 = \left((x + x'\tau) - (\xi + \xi'\tau)\right)^2 + \left((y + y'\tau) - (\eta + \eta'\tau)\right)^2$$

que debe verificarse. Esta ecuación es equivalente á las dos siguientes, en las que Q representa el ángulo de posición del punto de contacto sobre el limbo del sol:

$$L \text{ sen } Q = (x - \xi) + (x' - \xi')\tau$$
$$L \cos Q = (y - \eta) + (y' - \eta')\tau$$

Pongamos ahora

$$m \text{ sen } M = x - \xi \qquad n \text{ sen } N = x' - \xi'$$
$$m \cos M = y - \eta \qquad n \cos N = y' - \eta'$$

en las que m y M representan *la distancia* y el ángulo de posición del eje de los conos respecto al punto de observación; n y N son los movimientos relativos. Se consideran siempre positivas á m y n, lo cual determina enteramente á M y N.

Las ecuaciones anteriores quedan entonces así:

$$L \text{ sen } Q = m \text{ sen } M + n \text{ sen } N \tau$$
$$L \cos Q = m \cos M + n \cos N \tau$$

y poniendo

$$\psi = Q - N$$

se encuentra fácilmente

$$L \text{ sen } \psi = m \text{ sen } (M - N)$$
$$L \cos \psi = m \cos (M - N) + n \tau$$

las que dan

$$\operatorname{sen} \psi = \frac{m \operatorname{sen} (M - N)}{L}$$

$$\tau = -\frac{m \cos (M - N)}{n} \mp \frac{L \cos \psi}{n}$$

y como el signo de cos ψ no está determinado se tomará el signo negativo para el principio, y el positivo para el fin del eclipse, lo que quiere decir que ψ se tomará en el 1º ó 2º cuadrante si sen ψ es positivo; ó bien en el 3º ó 4º cuadrante si sen ψ es negativo. Más sencillo, ψ en el mismo cuadrante que $M - N$.

Puede también tomarse á cos ψ siempre positivo, y entonces á ψ en el 1º ó 4º cuadrante; esto es, entre los límites $+90°$ y $-90°$ lo cual es todavía más sencillo.

En esta primera aproximación los dos valores de la corrección τ resultan con un error de varios minutos. Para obtener mayor exactitud deberán repetirse los cálculos *separadamente* para cada fase, tomando por argumento la hora encontrada $T + \tau$ que para cada una de ellas dió la prueba anterior. Nuevas aproximaciones podrán ejecutarse á juicio del calculador, advirtiendo que dado el significado de m y L, si la hora supuesta en el cálculo de cada fase es exacta, debe tenerse

$$m = L \text{ (*)}$$

mas por regla general diremos que cuando log m y log l difieren en una ó dos unidades de la cuarta cifra decimal, la hora que se obtiene para la fase que se calcula resulta con uno ó dos segundos de error. En cada cálculo, y parece inútil el decirlo, se obtendrán siempre dos valores para τ: uno pequeño, que es el exacto, ó casi exacto, corresponde á la fase que se calcula; y el otro, grande, correspondiente á la otra fase y el cual es muy erróneo.

El ángulo de posición Q se obtiene por la fórmula

(*) Si se llena esta condición $m = L$, la corrección τ para la fase que se calcula es necesariamente igual á 0. En efecto, se tiene sen $\psi = (M - N)$, por consiguiente cos $(M - N) = \cos \psi$ lo que da el valor $\tau = 0.00$.

$$Q = N + \psi$$

contado del Norte al Este; ψ en el mismo cuadrante que $M - N$ y tomando el valor que corresponda al principio ó fin. Más sencillo, tomando á ψ entre los límites $+ 90°$ y $- 90°$ se tendrá

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Principio} & Q = N - \psi \pm 180° \\ \text{Fin} & Q = N + \psi \end{array}\right\} \text{del Norte al Este.}$$

Es también conveniente conocer este ángulo contándolo desde el vértice superior del sol. (Se entiende por vértice superior el punto del disco solar que se encuentra más cerca del zenit.)

Representémoslo por V y calcúlense las fórmulas

$$c \operatorname{sen} C = \xi + \xi' \tau$$
$$c \cos C = \eta + \eta' \tau$$

$V = Q - C$ del vértice superior á la izquierda, debiéndose tomar los valores de ξ, η, ξ', η', que corresponden á cada fase en la última aproximación.

Puede ponerse sin ningún inconveniente

$$c \operatorname{sen} C = \xi \qquad c \cos C = \eta$$

porqne los ángulos de posición bastan con grados enteros. (*)

La magnitud del eclipse (cuando es parcial) se estima por la fracción máxima del diámetro solar que cubre la luna. Se determina por la fórmula

$$\text{Magnitud} = \frac{L - L \operatorname{sen} \psi}{2\,(L - k)}$$

en la que $k = 0.2723$ debiendo tomar de preferencia para L y ψ los valores obtenidos por la primera aproximación.

(*) Estos ángulos podrían determinarse con mayor exactitud por medio de las fórmulas siguientes:

$$p \operatorname{sen} P = \operatorname{sen} \psi \qquad c \operatorname{sen} C = \cos P \operatorname{tg} (\mu - \lambda)$$
$$p \cos P = \cos (\mu - \lambda) \qquad c \cos C = \operatorname{sen} (P - \delta')$$

($\delta' =$ declinación del sol).

$V = Q - C$ del vértice superior á la izquierda.

Teniendo los ángulos de posición del N. al E. para ambas ases, se puede calcular también la magnitud por la fórmula

$$\text{magnitud} = \begin{cases} (1+n)\,\text{sen}^2\tfrac{1}{2}\,\theta \\ (1+n)\cos^2\tfrac{1}{2}\,\theta \end{cases}$$

2 θ representa la diferencia entre los ángulos de posición.

$$n = \frac{\text{semidiámetro} \ ☾}{\text{semidiámetro} \ ☉}$$

y usando sen$^2\frac{1}{2}\,\theta$ ó $\cos^2\frac{1}{2}\,\theta$, según que θ sea agudo ú obtuso.

Algunas veces se expresa la magnitud en *dígitos*, y para esto basta multiplicar el número encontrado por 12, porque se supone que el diámetro solar tiene 12 dígitos.

El instante de la magnitud ó sea de la fase máxima se encuentra por la expresión

$$-\frac{m\cos(M-N)}{n}$$

sumada con su *signo* á la hora T empleando de preferencia la primera aproximación.

Ejemplo.—Calcular las horas del principio y fin, etc., del eclipse de sol de 28 de Mayo de 1900, para Reynosa, E. de Tamaulipas.

La posición geográfica es:

$\lambda = 6^h\ 32^m\ 46.^s4 = 98°\ 11'\ 6$ Oeste de Greenwich. } A. y L. Díaz.
$\phi = +\ 26°\ 5'\ 50''$.. }

Las constantes son

$\log\rho\ \text{sen}\ \varphi' = 9.64068$ $\qquad \rho\cos\varphi'$..... 9.95358

Por dos aproximaciones se obtuvo:

Principio..... $0^h\ 22.^m36$
Fin........... 2 29. 3

cuyas horas ya son suficientemente exactas. Sin embargo, tomemos estas horas como supuestas y repitamos el cálculo.

Principio $0^h\ 22.^m36$

De las tablas de los elementos se deducen los valores siguientes:

$$
\begin{array}{llllll}
x = - & 1.42538 & \text{sen}\ d\ 9.56285 & \mu = & 6^\circ\ 19'0 & l = 0.54314 \\
y = + & 0.29248 & \cos d\ 9.96887 & \lambda = & 98\ \ 11'6 & \text{tg}\, f = 7.66390 \\
\hline
 & & & \mu - \lambda = - & 91\ \ 52.6 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rl}
\varphi \cos \varphi' \ldots\ldots\ldots\ldots & 9.95358 \\
\text{sen}\ (\mu - \lambda) \ldots\ldots\ldots & 9.99977- \\
\hline
\xi \ldots\ldots\ldots & 9.95335- \\
\xi = - & 0.89816 \\
x = - & 1.42538 \\
\hline
x - \xi = - & 0.52722
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\rho\ \text{sen}\ \varphi' & 9.64068 \\
\cos d & 9.96887 \\
\hline
 & 9.60955 \\
 & 0.40696 \\
 & -0.01073\ - \\
\hline
\eta = & +\,0.41769 \\
y = & +\,0.29248 \\
\hline
y - \eta = & -\,0.12521
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\rho \cos \varphi' & 9.95358 \\
\text{sen}\ d & 9.56285 \\
\cos\ (\mu - \lambda) & 8.51325- \\
\hline
 & 8.02968-
\end{array}
$$

		ρ sen φ'.............	9.64068	ρ cos φ'	9.95358
		sen d..................	9.56285	cos d	9.96887
			9.20353	cos $(\mu - \lambda)$	8.51325 —
			0.15978		
			— 0.02727		8.43570 —
		$\zeta = +$	0.13251	log ζ	9.12225
				tg f	7.66390
const.................	7.63992		7.63992		
ρ cos φ'..............	9.95358	ξ	9.95335 —	ζ tg f	6.78615
cos $(\mu - \lambda)$.............	8.51325 —	sen d	9.64068	$=$	0.00061
				$l =$	0.54314
ξ'	6.10675 —	η'	7.23395 —		
$\xi' = -$	0.00013	$\eta' = -$	0.00171	$L =$	0.54253
$x' = +$	0.00921	$y' = +$	0.00066	log L	9.73442
				cp n	2.01616
$x' - \xi' =$	0.00934	$y' - \eta' = +$	0.00237	cos φ	9.99995
					1.75047

Principio.

m sen M	9.72199 —	n sen N	7.97035 +	$M = 256°\ 38'\ 24''$	$T = 0^h\ 22^m\ 36$
m cos M	9.09764 —	n cos N	7.37475 +	$N = 75\ \ 45\ \ 53$	$\tau = -\ 0\ \ 036$
tg M	0.62435 +	tg N	0.59560 +	$M - N = 180\ \ 52\ \ 31$	0 22 324
sen M	9.98808 —	sen N	9.98645		$0^h\ 22^m\ 19^s.44$ tpo. de Greenwich.
					$\lambda = 6\ \ 32\ \ 46.4$
m	9.73391 +	cp n	2.01610		
sen $(M—N)$	8.18401 —	cos $(M - N)$	9.99995 —		17 49 33.0 Mayo 27.
cp L	0.26558	m	9.73391		Tiempo medio de Reynosa.
sen ψ	8.18350 —		1.74996 —		
$\psi = -$	0° 52′ 27″		+ 56.229		
$N =$	75 45 53		∓ 56.295		
	180°				
		$\tau = -$	0.036		
$Q =$	256 38 20				
	Norte al Este.				

La hora encontrada es suficientemente exacta, lo que hace ver ya la diferencia entre log m y log L: τ, en efecto, es muy pequeño.

$Fin = 2^h\ 29^m3$

$x = -$	0.25567	sen d..........	9.56312	$\mu =$	38° 4′2	$l =$	0.54346
$y = +$	0.37666	cos d..........	9.96883	$\lambda =$	98 11.6	tg $f =$	7.66390
				$\mu - \lambda = -$	60 7.4		

$\rho \cos \varphi'$............	9.95358	$\rho \cos \varphi'$.........	9.64068	$\rho \cos \varphi'$...........	9.95358
sen $(\mu - \lambda)$........	9.93807 —	cos d............	9.96883	sen d..............	9.56312
				cos $(\mu - \lambda)$......	9.69734
	9.89165 —		9.60951		9.21404
$\xi = -$	0.77920		0.40692		
$x = -$	0.25567		0.16370		
$x - \xi = +$	0.52353	$\eta = +$	0.24322		
		$y =$	0.37666		
		$y - \eta =$	0.13344		

ρ sen ϕ'	9.64068	ρ cos ϕ'	9.95358
sen d	9.56312	cos d	9.96883
		cos $(\mu - \lambda)$	9.69734
	9.20380		
	0.15988		9.61975
	0.41663		
$\zeta =$	0.57651............	log ζ	9.76081

const.	7.63992..................		7.63992	tg f	7.66390
ρ cos ϕ'	9.95358	ξ	9.89165 —		
cos $(\mu - \lambda)$	9.69734	sen d	9.56312	ζ tg f	7.42471
				$=$	0.00266
ξ'	7.29084	η'	7.09469	$l =$	0.54346
$\xi' =$	0.00195	$\eta' =$	— 0.00124		
$x' =$	0.00921	$y' =$	0.00066	$L =$	0.54080
				log $L =$	9.73304
$x' - \xi' =$	$+$ 0.00726	$y' - \eta' =$	0.00190	cp n	2.12467
				cos ψ	9.99925
					1.85696

m sen M	9.71894 $+$	n sen N	7.86094		
m cos M	9.12529 $+$	n cos N	7.27875	$M =$	75° 42′
tg M	0.59365	tg N	0.58219	$N =$	72 20
sen M	9.98633	sen N	9.98561	M-$N =$	3° 22′
					Fin.
m	9.73261	cp n	2.12467		
sen $(M$-$N)$	8.76883	cos $(M$-$N)$	9.99925	T	2^h 29^m 30
cp L	0.26696	m	9.73261	τ	$+$ 0 07
sen ψ	8.76840		1.85653 $+$		2 29 37
$\psi =$	3° 21′48″		— 71.867		2^h 29^m 22^s 2 tiempo de Greenwich.
$N =$	72 20		$\mp$ 71.939	$\lambda =$	6 32 46. 4
$Q =$	75 42	$\tau_1 =$	— 143.806		19 56 35.8 Mayo 27
del Norte al Este.		$\tau_2 =$	$+$ 0.072		tiempo medio de Reynosa.

	Principio.	*Fin.*
c sen $C = \xi$	9.95335 —	9.77920 —
c cos $C = \eta$	9.62085	9.38600 $+$
tg C	0.33250 —	0.39320 —
$C =$	— 65° 3′	$=$ — 67° 59′
$Q =$	256 38	75 42
$V =$	321° 41′ á la izquierda.	143° 41′ á la izquierda.
	38 19 ,, derecha.	

Cálculo del eclipse total.

$T = 1^h\ 21^m\ 38$

$x = -\ 0.88151$	sen d $+\ 9.56298$	$\mu = 21°\ 5'\ 4$	$l' = -\ 0.00260$
$y = +\ 0.33177$	cos d 9.96885	$\lambda = 98°\ 11\ 6$	log tg $f' = +\ 7.66174$
		$\mu - \lambda = -\ 77°\ 6'\ 2$	

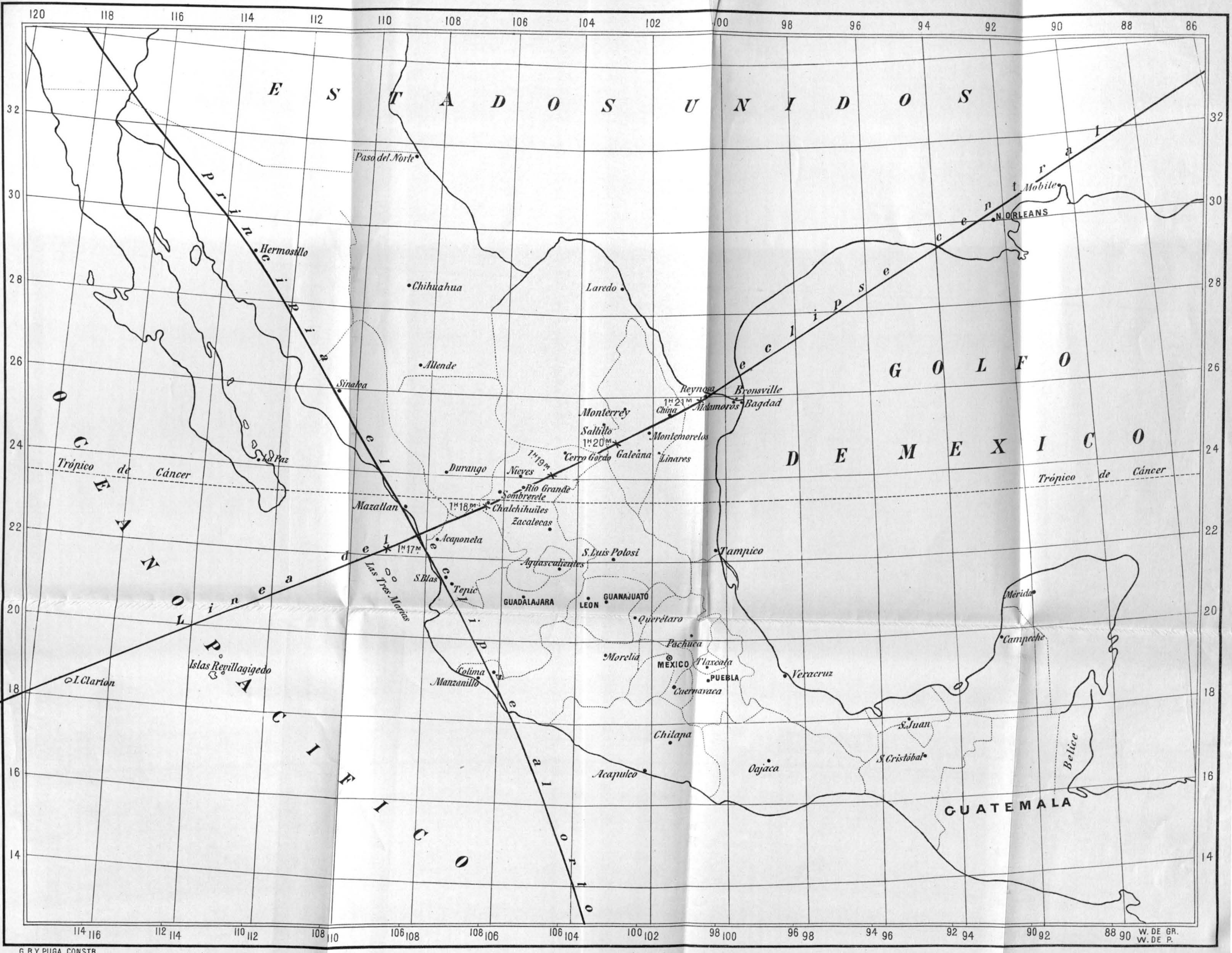
$\rho \cos \phi'$	9.95358	ρ sen ϕ'	9.64068	$\rho \cos \phi'$	9.95358
sen $(\mu - \lambda)$	9.98890 —	cos d	9.96885	sen d	9.56298
				$\cos(\mu - \lambda)$	9.34868
ξ	9.94248 —		9.60953		
	$-$ 0.87595		0.40694		8.86524
$x =$	$-$ 0.88151		0,07332		
$x - \xi =$	$-$ 0.00556	$\eta =$	0.33362		
		$y =$	0.33177		
		$y - \eta =$	$-$ 0.00185		

ρ sen ϕ'	9.64068	$\rho \cos \phi'$	9.95358
sen d	9.56298	cos d	9.96885
		$\cos(\mu - \lambda)$	9.34868
	9.20366		9.27111
	0.15983		
	0.18669		
$\zeta =$	0.34652	log ζ	9.53973
		tg f'	7.66174

cons............	7.63992........................		7.63992		7.20147
$\rho \cos \phi'$........	9.95358	ξ	9.94248 —		0.00159
$\cos(\mu - \lambda)$..	9.34868	sen d	9.56298	$l' = -$	0.00260
ξ'	6.94218	η'	7.14538—	$L =$	0.00419—
$\xi' =$	0.00087	$\eta' = -$	0.00140	log L	7.62221—
$x' =$	0.00921	$y' = +$	0.00066	$\cos \psi$	9.99723
				cp n	2.06598
$x' - \xi' =$	0.00834 +	$y' - \eta' = +$	0.00206		
					9.68542

m sen M......	7.74507—	n sen N	7.92116 +	$M =$	251 35 46
m cos M......	7.26717—	n cos N	7.31387 +	$N =$	76 7 30
tg M	0.47790	tg N	0.60729		175 28 16
sen M	9.99719—	sen N	9.98714		
m	7.76788	cp n	2.06598	$T =$	$1^h\ 21^m\ 38$
sen $(M-N)$	8.89742	cos $(M-N)$	9.99864 —	$\tau_1 +$	0 20
cp L	2.37779—	m	7.76788		
				Principio	1 21 58
sen ψ	9.04309—		9.83250 —	$\tau_2 +$	1 17
$\psi =$	6°20′25″		$+\ 0^m680$		
$N =$	76 7 30		$\mp$ 0 485	Fin	1 22 55
	82 27	$\tau_1 =$	+ 0.195	Principio	$1^h\ 21^m\ 34^s\ 8$ } Tiempo de Greenwich.
	180	$\tau_2 =$	+ 1.165	Fin	1 22 33.0
Principio	262 27 N. al E.			$\lambda =$	6 32 46.4
Fin	69 47 N. al E.				
				Principio	18 48 48.4 } Mayo 27 Tiempo de Reynosa.
				Fin	18 49 46.6
				Duración	58^s 2

FRANCISCO RODRÍGUEZ REY.



G. B Y PUGA CONSTR.

TRAZADO DE LAS CURVAS DEL ECLIPSE TOTAL DE SOL EL 28 DE MAYO DE 1900.