

30 APR 1934

DE ELASTISCHE STABILITEIT
VAN DEN
DUNWANDIGEN BOL

UNAM



79

TESIS-BCCT



INSTITUTO DE GEOLOGIA
BIBLIOTECA

A. VAN DER NEUT

820
Ne 8e

19



F-29

CLASIF. VDA-1932 I3

ADQUIS I-29

FECHA enero. 1908.

PROCED. A

DE ELASTISCHE STABILITEIT
VAN DEN DUNWANDIGEN BOL

TRIEBWERK VAN DE KONINKLIJKE HOOGESCHOOL
TE AMSTERDAM, IN VERBAND MET DE
TECHNISCHE HOOGESCHOOL TE Delft,
TE DITTEL, DE BUREAU VAN DE KONINKLIJKE
ACADEMIE VAN WETENSCHAPPEN, HOOGESCHOOL
TE DEN HAAG, EN DE VERENIGING VAN
WETENSCHAPPELIJKE VERENIGINGEN, DIE DE WERKING
VAN DE WETENSCHAPPELIJKE VERENIGINGEN
TE AMSTERDAM, DITTEL, DEN HAAG, EN
Delft, IN VERBAND MET DE

DOOR

ARIE VAN DER VEKKE

DE ELASTISCHE STABILITEIT
VAN DEN DUNWANDIGEN BOL



INSTITUUT DE RECHTEN
BIBLIOTHECA

DE PARIS

RECHTEN, BIBLIOTHECA

1917

DE ELASTISCHE STABILITEIT VAN DEN DUNWANDIGEN BOL

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN
GRAAD VAN DOCTOR IN DE TECHNISCHE WE-
TENSCHAP AAN DE TECHNISCHE HOOGESCHOOL
TE DELFT, OP GEZAG VAN DEN RECTOR MAG-
NIFICUS, Ir J. A. GRUTTERINK, HOOGLEERAAR
IN DE AFDEELING DER MIJNBOWWKUNDE,
VOOR EEN COMMISSIE UIT DEN SENAAAT TE
VERDEDIGEN OP DINSDAG 13 DECEMBER 1932,
DES NAMIDDAGS TE 4 UUR

DOOR

ARIE VAN DER NEUT

WERKTUIGKUNDIG INGENIEUR
GEBOREN TE ROTTERDAM



INSTITUTO DE GEOLOGIA
BIBLIOTECA

H. J. PARIS
AMSTERDAM MCMXXXII

1932

79

714

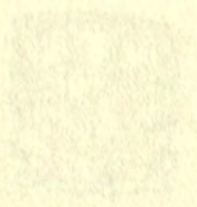
DE ELASTISCHE STABILITEIT
VAN DEN DUNNVANDIGEN BOL

VERVOLG VAN DE VERKIJKING VAN DEN
NEDERLANDSCHEN HOOGESCHOOL
TE ROTTERDAM
DE 2de DEELT VAN DEN
NEDERLANDSCHEN HOOGESCHOOL
TE ROTTERDAM
DE 2de DEELT VAN DEN
NEDERLANDSCHEN HOOGESCHOOL
TE ROTTERDAM

820
№ 80

AKTIE VAN DER NEUT

WANTUUR VAN DE
GEZONDEN IN ROTTERDAM



INSTITUUT DE
ROTTERDAM

H. F. PARIS
AMSTERDAM NOKKXIII

Faint, illegible text, likely bleed-through from the reverse side of the page.

AAN MIJN OUDERS

INHOUD

	Blz.
INLEIDING	1
HOOFDSTUK I – DE ALGEMEENE STABILITEITSVERGELIJKINGEN	2
§ 1 – <i>Inleiding</i>	2
§ 2 – <i>De stabiliteitsvergelijkingen in rechthoekige orthogonale coördinaten</i>	7
<i>a</i> – Het evenwicht	7
<i>b</i> – De elasticiteitswet	12
<i>c</i> – De stabiliteitsvergelijkingen	16
§ 3 – <i>De stabiliteitsvergelijkingen in andere orthogonale coördinaten</i>	18
<i>a</i> – Willekeurige orthogonale coördinaten	18
<i>b</i> – Poolcoördinaten.	20
HOOFDSTUK II – DE STABILITEITSVERGELIJKINGEN VAN DEN DUNNEN WAND	23
§ 1 – <i>Het kinematisch schema van den dunnen wand</i>	23
§ 2 – <i>Het kinematisch schema en de stabiliteitsvergelijkingen</i>	24
§ 3 – <i>Aantal der onbekende functies en der vergelijkingen</i>	29
§ 4 – <i>Integratie van de stabiliteitsvergelijkingen van den bolwand</i>	31
<i>a</i> – Eliminatie van $\sigma_{\theta r}$, $\sigma_{\phi r}$ en σ_{rr}	31
<i>b</i> – Splitsing der stabiliteitsvergelijkingen in I_1 en I_2	35
<i>c</i> – De integralen I_1	37
<i>d</i> – De integralen I_2	39
HOOFDSTUK III – DE STABILITEITSVERGELIJKINGEN BIJ GELIJKMATIGVERDEELDEN UITWENDIGEN DRUK.	41
§ 1 – <i>De spanningstoestand I</i>	41
§ 2 – <i>De stabiliteitsvergelijkingen en haar randvoorwaarden</i>	42
<i>a</i> – Opstelling der stabiliteitsvergelijkingen	42
<i>b</i> – Transformatie van de stabiliteitsvergelijkingen	45
<i>c</i> – De voorwaarden, waaraan de oplossing moet voldoen	47
§ 3 – <i>Algemeene kenmerken van de oplossing</i>	50

INHOUD

	Blz.
HOOFDSTUK IV – KNIKVORMEN, VERWANT AAN DE REGEL- MATIGE VEELVLAKKEN	61
§ 1 – <i>De beteekenis van de regelmatige veelvlakken voor het knik- probleem</i>	61
§ 2 – <i>Methode voor de bepaling van de polyedrische vervormingen.</i>	62
<i>a</i> – Algemeene symmetrievoorwaarden	62
<i>b</i> – Analyse van de symmetrische funkties	66
§ 3 – <i>Het regelmatig viervlak</i>	71
§ 4 – <i>Kubus en regelmatig achthek</i>	76
§ 5 – <i>Regelmatig twaalfvlak en twintigvlak</i>	80
 HOOFDSTUK V – DE ALGEMEENE OPLOSSING.	 90
§ 1 – <i>Oplossingen van den vorm (99)</i>	90
<i>a</i> – De substitutie van (99) in de differentiaalvergelijkingen.	90
<i>b</i> – De eigenfunkties	92
<i>c</i> – De eigenwaarden	95
§ 2 – <i>De algemeenheid van de verkregen oplossing.</i>	99
<i>a</i> – Algemeene substitutie	99
<i>b</i> – De potentiaal der verplaatsingen in het bolvlak	102

INLEIDING

Sedert BRYAN ¹⁾ de stabiliteit van de vlakke rechthoekige plaat, die aan haar randen is ondersteund en daar ter plaatse door normaalkrachten in haar vlak belast wordt, onderzocht, is door tal van onderzoekers aandacht geschonken aan dit vraagstuk, zoodat een uitgebreide literatuur over dit onderwerp bestaat, waarin voor verschillende randvoorwaarden en belastingen zoowel theoretisch als experimenteel waardevol materiaal is verzameld ²⁾.

Het stabiliteitsprobleem van gewelfde wanden vond het eerst bij LORENZ ³⁾ behandeling, en wel in verband met het vraagstuk van de axiaal gedrukte buis. Eerst uit den lateren tijd dateert het onderzoek van de buis onder andere belastingen ⁴⁾.

In aansluiting aan de oplossingsmethode, die MEISSNER ⁵⁾ gaf voor het elasticiteitsvraagstuk bij dunwandige omwentelingslichamen onder axiaal symmetrische belasting, publiceerde in 1915 ZOELLY zijn verhandeling over de elastische stabiliteit van den dunwandigen bol, die uitwendig door continu verdeelde normaalkrachten gedrukt wordt ⁶⁾.

Daar hij zich, overeenkomstig den aan MEISSNER ontleenden

1) G. H. BRYAN, London Math. Soc., Proc., vol. 22, 1891, p. 54.

2) Vergel. het referaat van S. TIMOSHENKO: Stability and strength of thin-walled constructions, Verhandl. des 3. internat. Kongr. für techn. Mech., Stockholm, vol. 3, S. 3.

3) R. LORENZ, Zeitschr. des V. d. I., vol. 52, 1908, S. 1706.

R. LORENZ, Phys. Zeitschr., 1911, S. 225.

4) R. V. SOUTHWELL, Phil. Mag. (6), vol. 25, 1913, p. 687.

R. VON MISES, Zeitschr. des V. d. I., vol. 58, 1914, S. 750.

R. VON MISES, Stodola's Festschrift, Zürich 1929, S. 418.

E. SCHWERIN, Zeitschr. für angewandte Math. u. Mech., vol. 5, 1925, S. 235.

L. G. BRAZIER, Proc. Roy. Soc., London, vol. 116 A, 1927, p. 104.

5) E. MEISSNER, Phys. Zeitschr., vol. 14, 1913, S. 343.

6) R. ZOELLY, Ueber ein Knickungsproblem an der Kugelschale, Züricher Diss. 1915.

grondslag bepaalde tot die knikvormen, welke omwentelings-symmetrie bezitten, en welke bovendien symmetrisch zijn ten opzichte van den aequator, leverde deze verhandeling niet de algemeene oplossing van het probleem.

SCHWERIN bracht de oplossing van hetzelfde vraagstuk in een volgend stadium door de laatstgenoemde beperking te laten vervallen; ook door hem bleef echter de rotatorische symmetrie als beperking gehandhaafd ¹⁾. Zooals zich — na de overweging, dat bij knik van dunne gewelfde platen het aantal der plooiën steeds zeer groot is — laat verwachten, kunnen de minimum kniklasten volgens ZOELLY en volgens SCHWERIN elkaar niet veel ontloopen.

Voor zoover schrijver dezes bekend is vond het knikvraagstuk van den alzijdig gedrukten bol echter nog geen algemeene oplossing. Deze wordt in de volgende verhandeling gegeven en wel exact, zoodat geen gebruik gemaakt is van het voorstel door FÖPPL bij de bespreking van het onderwerp in „Drang und Zwang” gedaan, n.l. om de algemeene oplossing te benaderen volgens de methode van RITZ ²⁾.

De sleutel tot de algemeene oplossingsmethode werd geleverd door het onderzoek van enkele speciale knikvormen, welke symmetrie-eigenschappen overeenstemden met die van de regelmatige veelvlakken. Wanneer in de volgende verhandeling aan deze bijzondere knikvormen meer aandacht wordt geschonken dan in verband met de weergave van de algemeene oplossingsmethode strikt noodzakelijk is, is dit eensdeels geschied om den ontwikkelingsgang van de gevonden methode duidelijker in het licht te stellen, doch andersdeels ook vanwege de merkwaardigheid, die deze knikvormen in meetkundig opzicht bezitten.

Bij de opstelling van de stabiliteitsvergelijkingen is uitgegaan van de algemeene stabiliteitstheorie, zooals deze door BIEZENO en HENCKY gegeven is. Met behulp hiervan worden de stabiliteitsvergelijkingen voor het geval van den bolwand van constante dikte algemeen, d. w. z. voor iedere willekeurige belasting, afgeleid. Vervolgens wordt voor het speciale geval eener continu

1) E. SCHWERIN, Zur Stabilität der dünnwandigen Hohlkugel unter gleichmäßigem Auszendruck, Zeitschr. für angewandte Math. u. Mech. vol. 2, 1922, S. 81.

2) A. u. L. FÖPPL, Drang und Zwang, vol. 2, 2. Aufl. S. 375.

verdeelde normale belasting, de oplossing der stabiliteitsvergelijkingen gegeven. De methode, die daarbij gevolgd wordt, laat een meer algemeene toepassing toe op andere stabiliteitsproblemen van den bolwand, waarbij het van den aard der knikbelasting afhangt of deze methode tot een exacte, dan wel tot een benaderende oplossing in staat stelt.

...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...
...the ... of ...

HOOFDSTUK I

DE ALGEMEENE STABILITEITSVERGELIJKINGEN

§ 1 - INLEIDING

Het stabiliteitsprobleem kan op verschillende wijzen behandeld worden, al naar gelang men er de energetische beschouwingwijze op toepast, of wel de statische beschouwingwijze. Uitgaande van de eerstgenoemde of van de laatste methode, wordt het knikvraagstuk geformuleerd met:

- a) bij welken belastingstoestand zijn zoowel de eerste als de tweede variatie van de energie van het systeem gelijk aan nul.
- b) bij welke belasting is de evenwichtstoestand niet ondubbelzinnig bepaald.

Daar het volgende onderzoek gebruik maakt van de algemeene stabiliteitsvergelijkingen voor het elastisch continuum, zooals deze gegeven worden door BIEZENO en HENCKY, die in hun desbetreffende verhandeling ¹⁾ de statische beschouwingwijze den voorrang geven, wordt ook hier het probleem volgens deze laatste methode behandeld.

Het karakteristieke van den kniktoestand is gelegen in de verscheidenheid van mogelijke vervormingstoestanden, bij welke het evenwicht gehandhaafd blijft onder een uitwendige belasting, die door een voorgeschreven gelijkblijvend krachtenveld op het lichaam wordt uitgeoefend. Twee van zulke vervormingen mogen niet als evenwichtstoestanden geïsoleerd liggen; tusschen hen moet een continu verloopende reeks van vervormingstoestanden mogelijk zijn, bij welke eveneens evenwicht aanwezig is.

1) C. B. BIEZENO and H. HENCKY, On the general theory of elastic stability, Proceedings of the „Koninklijke Akademie van Wetenschappen” te Amsterdam. Vol. XXXI, No. 6, and Vol. XXXII, No. 4.

Zoolang de vervormingen beschouwd worden verwaarloosbaar klein te zijn tegenover de afmetingen van het systeem, zooals dit inderdaad bij de afleiding van de algemeene elasticiteitsvergelijkingen

$$\Delta u + \frac{m}{m-2} \cdot \frac{\partial \epsilon_v}{\partial x} + \frac{X}{G} = 0 \quad \text{cycl.}$$

gedaan wordt, zijn de spanningen, die het gevolg zijn van een zekere belasting ondubbelzinnig bepaald.

Uitgaande van deze vergelijkingen is het dan ook niet mogelijk het knikprobleem algemeen te bestudeeren. Daartoe is noodig dat meer algemeene vergelijkingen worden opgesteld, welke rekening houden met de eindigheid der vervormingen, die als gevolg van een eindige belasting optreden.

De wet van HOOKE geeft zoolang deze vervormingen klein blijven voor tal van materialen een goede omschrijving van het verband tusschen spanning en vervorming. Toegepast op grootere vervormingen voert zij echter tot ongerijmdheden, zooals geïllustreerd kan worden aan het voorbeeld van een lichaam onder alzijdigen gelijken druk, dat bij eindige spanningen zelfs een negatief volume zou kunnen innemen. Inderdaad is ook uit nauwkeurige metingen gebleken, dat slechts in eerste benadering van een lineair verband tusschen vervorming en spanning kan worden gesproken. Daarom verdient het aanbeveling, indien de eindigheid der vervormingen een essentieel element der overwegingen vormt, de wet van HOOKE te vervangen door een andere elasticiteitswet.

BIEZENO en HENCKY hebben de algemeene stabiliteitsvergelijkingen opgesteld, zoowel met gebruikmaking van den wet van HOOKE ¹⁾, als met toepassing van een elasticiteitswet, die ook bij grootere vervormingen niet tot inwendige tegenspraken, als de boven aangeduide, aanleiding geeft ²⁾.

Wanneer in het volgende de op de tweede wijze afgeleide vergelijkingen worden gebezigd, is dit voornamelijk geschied, omdat de knikmogelijkheid bij den bol eerst bij groote belastingen en dus bij groote vervormingen optreedt.

1) Proc. K. A. v. W., Vol. XXXI, No. 6.

2) Proc. K. A. v. W., Vol. XXXII, No. 4.

§ 2 - DE STABILITEITSVERGELIJKINGEN IN RECHTLIJNIGE
ORTHOGONALE COÖRDINATEN

Het knikprobleem van den dunwandigen bol zal het eenvoudigst geformuleerd worden, indien gebruik wordt gemaakt van poolcoördinaten. Daar BIEZENO en HENCKY de algemeene stabiliteitsvergelijkingen afleiden in rechte lijnige coördinaten moet worden nagegaan op welke punten hun beschouwingen aanvulling behoeven om te komen tot de stabiliteitsvergelijkingen in poolcoördinaten. Te dien einde wordt eerst een beschrijving gegeven van den weg, dien gevolgd wordt ter afleiding der algemeene stabiliteitsvergelijkingen in gewone coördinaten. Deze beschrijving bedoelt niet in details te treden, doch wil slechts de voornaamste punten uit den gedachtengang naar voren brengen.

a - Het evenwicht

Onder invloed van een stelsel van belastingen vervormt zich het lichaam, dat in onbelasten toestand spanningsvrij gedacht is. De spanningen, die in dezen vervormingstoestand (verder aan te duiden met I) optreden, worden gerekend per oppervlakteëenheid van den toestand I, en beschreven ten opzichte van het assenstelsel xyz . Zij worden aangeduid met het symbool S_{mn} , waarmede bedoeld wordt de component, in de richting van de as m , van de spanning op het vlakkelement dat de n -as tot normaal heeft (m en n is een willekeurig tweetal assen van het systeem xyz).

Indien de component van de massakracht, per eenheid van volume in toestand I, volgens één der coördinaatrichtingen wordt aangeduid met de hoofdletter, behoorende bij deze coördinaatrichting, (b.v. de massakracht in de richting der y -as met Y), wordt de voorwaarde voor het evenwicht in de richting der m -as gegeven door de vergelijkingen

$$\sum_{n=x,y,z} \frac{\partial S_{mn}}{\partial n} + M = 0 \quad m = x, y, z. \quad (1)$$

Met de notatie van deze vergelijking wordt bedoeld, dat in de vergelijking eerst voor m één der letters x, y, z , en voor M de bijbehorende letter X, Y of Z wordt gezet, en daarna over n wordt

gesommeerd, in dien zin, dat n achtereenvolgens door x , y en z wordt vervangen.

De verplaatsingen, welke het lichaam uit den onbelasten toestand 0 overbrachten in den toestand I worden aangegeven door hun componenten U_m ($m = x, y, z$). De vormveranderingen, die met deze verplaatsingen samenhangen worden overeenkomstig § 1 als eindige grootheden beschouwd, waarvan echter verondersteld blijft dat zij klein zijn, in dier voege dat hun kwadraten en hogere machten tegenover de eenheid verwaarloosd kunnen worden.

Als knikbelasting is gedefinieerd de belasting waarbij het lichaam niet alleen in den toestand I in evenwicht verkeert, doch tevens in een naburigen vervormingstoestand II, welke bereikt wordt door ieder punt uit den toestand I over zeer kleine afstanden u_m ($m = x, y, z$) te verplaatsen. Daar de *mogelijkheid* van de zeer kleine verplaatsingen reeds het stabiliteitscriterium vormt, worden de extra-verplaatsingen zoodanig klein verondersteld, dat hun grootte, tot de eerste macht genomen, verwaarloosbaar is tegenover de eenheid, zoodat zij ten opzichte van de verplaatsingen U_m als klein zijn te beschouwen.

De vormverandering wordt beschreven met de grootheden:

$$f_{mn} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_n}{\partial m} + \frac{\partial u_m}{\partial n} \right) \quad (2a)$$

en de standsverandering — wel te onderscheiden van de plaatsverandering — door de rotatiecomponenten

$$\omega_{mn} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_n}{\partial m} - \frac{\partial u_m}{\partial n} \right). \quad (2b)$$

Blijkens deze definitie is de richting, waarin ω_{mn} positief gerekend wordt, gelijk aan de richting volgens welke draaiing van de positieve m -as over een hoek $\frac{\pi}{2}$ deze as tot dekking brengt met de positieve n -as. De grootheden ω_{mn} en ω_{nm} hebben op dezelfde rotatiecomponente betrekking, welke zij echter met tegengesteld teeken beschrijven. Tevens volgt uit (2b) $\omega_{mm} = 0$.

Het volume-element, dat in den toestand I de afmetingen

dx, dy, dz had, heeft in den toestand II zijn rechthoekig parallelepipedischen vorm verloren, terwijl andere spankrachten op zijn zijvlakken aangrijpen; de massakracht zal echter ongewijzigd zijn. Tusschen deze gewijzigde spankrachten en de massakracht moet evenwicht bestaan.

De spanningen in den toestand II worden gedefinieerd met behulp van de spanningscomponenten M_n . In deze notatie duidt de hoofdletter (M) aan, dat de bedoelde componente in toestand II in de richting van de gelijknamige as (m) werkt; de index (n) geeft aan dat het vlakke-element, waarop de componente aangrijpt in toestand I loodrecht op de gelijknamige as (n) stond. In het algemeen is dan dit vlakke-element in den toestand II ten opzichte van het coördinatensysteem gedraaid. Bovendien wordt de spanning niet gedefinieerd per oppervlakte-eenheid van den toestand II, waarop zij betrekking heeft, doch per oppervlakte-eenheid van het element in den toestand I.

Doordat op deze wijze de spanningen in den toestand II beschreven zijn met behulp van de coördinaten, die de punten in den toestand I bezitten, wordt het evenwicht in ieder der richtingen $m = x, y, z$ voor den toestand II uitgedrukt door de vergelijkingen

$$\sum_{n=x,y,z} \frac{\partial M_n}{\partial n} + M = 0 \quad m = x, y, z. \quad (3)$$

Ten behoeve van het verband tusschen de spanning M_n en de vervormingen, dat in vergelijking (15) zal worden verkregen, wordt een tweetal hulpsystemen van spanningen S^*_{mn} en \bar{S}_{mn} , welke beide den spanningstoestand II beschrijven, ingevoerd.

De spanning S^*_{mn} is gedefinieerd per oppervlakte-eenheid van het lichaam in den toestand II; haar richting is die van de m -as, en het oppervlak, waarop zij betrekking heeft, staat normaal op de n -as.

Het verband tusschen de spanning M_n en de spanningen S^*_{mn} wordt geleverd door de voorwaarde voor het evenwicht in de richting der m -as van een tetraedrisch element in den toestand II, dat begrensd wordt door een vlak, dat in den toestand I normaal op de n -as stond, en door drie normaal georiënteerde coördinaatvlakken (fig. 1).

Indien het zijvlak, dat de richting \bar{n} tot normaal heeft, het oppervlak dO heeft, is het oppervlak van het zijvlak, dat de m -as tot normaal heeft, $\cos(\bar{n}m) dO$.

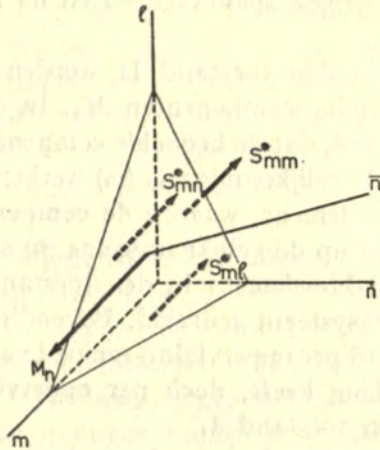


Fig. 1.

Het zijvlak dO had in toestand I de grootte

$$\frac{dO}{1 + \Delta - \frac{\partial u_n}{\partial n}},$$

indien onder Δ de dilatatie der extra-vervorming verstaan wordt

$$\Delta = \sum_{i=x,y,z} \frac{\partial u_i}{\partial i},$$

De evenwichtsvoorwaarde voor het tetraedrisch element in m -richting is dus

$$\frac{M_n}{1 + \Delta - \frac{\partial u_n}{\partial n}} - \sum_{i=x,y,z} S^*_{mi} \cos(\bar{n}i) = 0. \quad (4)$$

In aanmerking nemend dat de hoek (mn) van de orde der extra-vervormingen is, volgt dat $\cos(\bar{n}i)$ onder verwaarloozing van termen, die kwadratisch zijn in deze vervormingen, gelijk is aan den cosinus van den hoek, die de projectie van \bar{n} op het vlak ni maakt met de i -as

$$\cos(\bar{n}i) = -\frac{\partial u_n}{\partial i}.$$

Hierdoor neemt de evenwichtsvergelijking (4) den vorm aan:

$$M_n = S^*_{mn} + S^*_{mn} \Delta - \sum_{i=x,y,z} S^*_{mi} \cdot \frac{\partial u_n}{\partial i} \quad m = x, y, z; n = x, y, z. \quad (5)$$

Ter invoering van het tweede hulpsysteem van spanningen wordt aan het punt met de coördinaten x, y, z in den toestand I een assenkruis, dat gericht is volgens de coördinaat-assen, vast verbonden gedacht. Bij overgang naar den toestand II ondergaat dit assenkruis de verdraaiingen ω_{mn} van het materieele deeltje in dit punt. De spanning \bar{S}_{mn} is gedefinieerd per oppervlakte-eenheid van het lichaam in den toestand II, haar richting m is gelijk aan de richting der m -as van het gedraaide assenkruis, en het oppervlak n , waarop zij aangrijpt, is eveneens georiënteerd volgens dit assenkruis ¹⁾.

De spanningssystemen \bar{S}_{mn} en S^*_{mn} zijn daarom de hoeken ω_{mn} ten opzichte van elkaar gedraaid. De relatie tusschen de spanning S^*_{mn} en de spanningen \bar{S}_{mn} wordt geleverd door de evenwichtsvoorwaarde in de richting der m -as voor een tetraedrisch element, dat begrensd wordt door een vlak loodrecht op de m -as en door

1) Bij wijze van samenvatting wordt hier een overzicht gegeven van alle in het voorgaande ingevoerde spanningssystemen:

$$S_{mn}, M_n, S^*_{mn}, \bar{S}_{mn}.$$

Het eerste systeem beschrijft den spanningstoestand I, de overige beschrijven den spanningstoestand II. De eerste twee systemen zijn betrokken op de oppervlakte-eenheid van, in toestand I volgens de coördinaatrichtingen georiënteerde vlakken; het derde is betrokken op de oppervlakte-eenheid van, in toestand II volgens de coördinaatrichtingen georiënteerde, vlakken; en het vierde op de oppervlakte-eenheid van vlakken, die in toestand II de hoeken ω_{mn} ten opzichte van het algemeene coördinatensysteem gedraaid zijn. De richting van de spanningscomponenten is in alle systemen gelijk aan die van de normaal der vlakken, waarop deze systemen betrokken zijn. Bij alle systemen, uitgezonderd het tweede, duidt de eerste index op de richting, volgens welke de spanning werkt, de tweede index op de normaalrichting van het vlak, ten opzichte waarvan de spanning gedefinieerd is. In het tweede systeem vervult de hoofdletter de taak van de eerste index, en de index de taak van de tweede index bij de andere systemen.

drie vlakken, georiënteerd volgens de richtingen van het gedraaide assenkruis.

Als voorwaarde voor het evenwicht in de richting der m -as wordt gevonden, indien wederom in aanmerking wordt genomen dat de hoeken ω_{mn} van de orde der extra-vervormingen zijn:

$$S^*_{mn} = \bar{S}_{mn} - \sum_{i=x, y, z} (\bar{S}_{mi} \cdot \omega_{ni} + \bar{S}_{in} \omega_{mi}) \quad (6)$$

$m = x, y, z; n = x, y, z.$

De vergelijking (6) in (5) gesubstitueerd geeft, wanneer de termen die kwadratisch zijn in de differentiaalquotiënten van u verwaarloosd worden tegenover de termen, welke die grootheden tot de eerste macht bevatten:

$$M_n = \bar{S}_{mn} + \bar{S}_{mn} \cdot \Delta - \sum_{i=x, y, z} (\bar{S}_{mi} \cdot f_{in} + \bar{S}_{in} \omega_{mi}) \quad (7)$$

$m = x, y, z; n = x, y, z.$

b - De elasticiteitswet

De afhankelijkheid tusschen spanning en vervorming kan eerst worden vastgesteld, nadat een elasticiteitswet is geformuleerd. Zooals in § 1 van dit hoofdstuk werd uiteengezet, is er aanleiding de wet van HOOKE te vervangen door een andere elasticiteitswet, welke beter rekenschap geeft van de verschijnselen bij eindige vervormingen.

Aan deze elasticiteitswet worden de eischen gesteld:

1. dat de volumeverandering van een element slechts afhankelijk is van het hydrostatische deel der spanningen;
2. dat de elastische energie A gelijk is aan de som van de energie, afkomstig van het hydrostatische deel der spanningen, en de energie, geleverd door het deviatorische deel der spanningen.

HENCKY ¹⁾ heeft aangetoond, dat aan deze voorwaarden kan worden voldaan indien als maat voor de specifieke verlenging van een lijnelement de grootheid

1) H. HENCKY, Ueber die Form des Elastizitätsgesetzes. Zeitschrift für technische Physik. 9 Jahrgang 1928, S. 215—220. Berichtigung S. 457.

$$\varepsilon = \ln \left(\frac{\text{eindlengte}}{\text{oorspronkelijke lengte}} \right)$$

wordt ingevoerd, en de elastische energie gelijk wordt gesteld aan:

$$2A = 2G \{(\varepsilon_1 - \varepsilon)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon)^2\} + 9K\varepsilon^2. \quad (8)$$

In deze uitdrukking zijn G en K materiaalconstanten en $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ de maatgetallen voor de specifieke verlengingen in de richting der hoofdspansingen, welke in het vervolg korthedshalve specifieke rekken worden genoemd, voorts is

$$\varepsilon = \frac{1}{3} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3).$$

Uit de vereischte gelijkheid van uitwendig verrichten arbeid en toename der elastische energie bij iedere virtueele verplaatsing uit den evenwichtstoestand volgt het verband tusschen de hoofdspansingen S_i en de specifieke rekken ε_i .

De uitwendig verrichte arbeid betrokken op de volume-eenheid van het niet gedeformeerde lichaam is

$$\delta A = \frac{1}{d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 d\bar{x}_3} \{S_1 d\bar{x}_2 d\bar{x}_3 \delta d\bar{x}_1 + S_2 d\bar{x}_3 d\bar{x}_1 \delta d\bar{x}_2 + S_3 d\bar{x}_1 d\bar{x}_2 \delta d\bar{x}_3\} \quad (9a)$$

Volgens definitie is:

$$\varepsilon_i = \ln \frac{d\bar{x}_i}{dx_i},$$

zoodat

$$\delta \varepsilon_i = \frac{dx_i}{d\bar{x}_i} \frac{\delta d\bar{x}_i}{dx_i} = \frac{\delta d\bar{x}_i}{d\bar{x}_i}.$$

Dit gesubstitueerd in (9a) geeft:

$$\delta A = e^{3\varepsilon} \sum_{i=1,2,3} S_i \delta \varepsilon_i,$$

waarvoor geschreven kan worden onder invoering van

$$S = \frac{1}{3} (S_1 + S_2 + S_3)$$

$$\delta A = e^{3\varepsilon} \sum_{i=1,2,3} (S_i - S) \delta (\varepsilon_i - \varepsilon) + e^{3\varepsilon} \cdot 3S \delta \varepsilon. \quad (9b)$$

Volgens (8) is de variatie der elastische energie:

$$\delta A = 2G \sum_{i=1,2,3} (\varepsilon_i - \varepsilon) \delta (\varepsilon_i - \varepsilon) + 9K\varepsilon\delta\varepsilon. \quad (9c)$$

Uit de identiteit van (9b) en (9c) voor iedere variatie volgt de relatie tusschen spanning en vervorming:

$$\begin{aligned} e^{3\varepsilon} (S_i - S) &= 2G (\varepsilon_i - \varepsilon) \\ e^{3\varepsilon} S &= 3K\varepsilon, \end{aligned}$$

of onder invoering van de „gereduceerde spanning” S'_i ,

$$\left. \begin{aligned} S'_i &= e^{3\varepsilon} S_i \\ S'_i - S' &= 2G (\varepsilon_i - \varepsilon) \\ S' &= 3K\varepsilon. \end{aligned} \right\} (10)$$

De elastische constanten G en K kunnen in eenvoudig verband gebracht worden tot de elastische constanten, die bepalend zijn voor de elasticiteitswet van HOOKE.

In het limietgeval, waar de deformatie oneindig klein is, moeten n.l. de spanningen volgens de wet van HOOKE en volgens de door HENCKY ingevoerde elasticiteitswet op gelijke wijze met de vervormingen samenhangen. Het getal ε_i wordt in het limietgeval gelijk aan den rek in de meer gebruikelijke beteekenis, terwijl gereduceerde spanning en werkelijke spanning eveneens aan elkaar gelijk worden.

Volgens de wet van HOOKE geldt:

$$S_i = 2G \left(\varepsilon_i + \frac{3}{m-2} \varepsilon \right).$$

Uit (10) volgt:

$$S_i = 2G\varepsilon_i + (3K - 2G) \varepsilon.$$

Aan de bovenuitgesproken eisch wordt voldaan indien

$$K = \frac{2(m+1)}{3(m-2)} G.$$

Dit resultaat in (10) gesubstitueerd geeft:

$$S'_i = 2G \left(\varepsilon_i + \frac{3}{m-2} \varepsilon \right). \quad (11)$$

De elasticiteitswet (11) levert het verband tusschen de spanningssystemen van de toestanden I en II en de bijbehorende vervormingen. Tusschen de gereduceerde spanningen S'_{mn} , \bar{S}'_{mn} en de verplaatsingen u blijkt het verband te bestaan

$$\sigma'_{mn} = \bar{S}'_{mn} - S'_{mn} = 2G \left(f_{mn} + g_{mn} \cdot \frac{1}{m-2} \Delta \right), \quad (12)$$

waarin g_{mn} gedefinieerd is door

$$\begin{aligned} m = n &: g_{mn} = 1 \\ m \neq n &: g_{mn} = 0. \end{aligned}$$

Voor de afleiding van (12), welke hier te veel plaatsruimte zou innemen, wordt verwezen naar de verhandeling van BIEZENO en HENCKY ¹⁾.

Uit de definitie van de „gereduceerde spanning” volgt:

$$\bar{S}_{mn} - S_{mn} = \frac{1}{(e^{3\epsilon})_I} \left(\frac{\bar{S}'_{mn}}{1+\Delta} \right) - S'_{mn} = \frac{1}{(e^{3\epsilon})_{II}} (\bar{S}'_{mn} - S'_{mn} - \Delta S'_{mn}). \quad (13)$$

Worden kwadraten en hogere machten van U of van haar differentiaalquotienten, en wordt eveneens u met haar differentiaalquotienten tegenover de eenheid verwaarloosd, dan geldt:

$$\left(\frac{1}{e^{3\epsilon}} \right)_{II} = (1 - \Delta),$$

waarin

$$\Delta = \sum_{i=x,y,z} \frac{\partial U_i}{\partial i}$$

de dilatatie in toestand I voorstelt.

Na invoering van de spanning σ_{mn} , die gedefinieerd wordt door:

$$\sigma_{mn} = (1 - \Delta) \sigma'_{mn}, \quad (14a)$$

volgt uit (13):

$$\bar{S}_{mn} - S_{mn} = \sigma_{mn} - \Delta S_{mn}. \quad (14b)$$

1) Proceedings K. A. v. W., Vol. XXXII, No. 4, pg. 445—452.

c - De stabiliteitsvergelijkingen

Het is de bedoeling de drie evenwichtsvergelijkingen (3), die voor den toestand II gelden te transformeeren tot voorwaarden, welke het evenwicht aan de verplaatsingen u_i stelt. De spanningen M_n moeten dan eerst worden gekend in hun afhankelijkheid van u_i . Daartoe wordt (14b) gesubstitueerd in (7), welke substitutie onder verwaarloozing van termen van de orde u^2 oplevert:

$$M_n - S_{mn} = \sigma_{mn} - \sum_{i=x,y,z} (S_{mi} \cdot f_{in} + S_{in} \cdot \omega_{mi}) \quad (15)$$

$m = x, y, z \quad n = x, y, z.$

De substitutie van (15) in de evenwichtsvergelijking levert een iets eenvoudiger resultaat, indien in de plaats van (3) als evenwichtsvergelijking voor den toestand II het verschil van (3) en (1) gebezigt wordt:

$$\sum_{n=x,y,z} \frac{\partial (M_n - S_{mn})}{\partial n} = 0 \quad m = x, y, z. \quad (16)$$

Hierna geeft substitutie van (15) de eindvergelijkingen:

$$\sum_{n=x,y,z} \left\{ \frac{\partial \sigma_{mn}}{\partial n} - \sum_{i=x,y,z} \left[\frac{\partial}{\partial n} (S_{mi} f_{in}) + S_{in} \frac{\partial \omega_{mi}}{\partial n} + \frac{1}{3} I \omega_{in} \right] \right\} = 0$$

$m = x, y, z, \quad (17)$

welke homogeen en lineair zijn in de verplaatsingen

$$u_i, \quad i = x, y, z,$$

zooals mede blijkt uit de vergelijkingen (2a), (2b), (12) en (14a)¹).

De vergelijkingen (17) gelden algemeen voor iedere kleine verplaatsing uit een gegeven evenwichtstoestand I, zoowel voor het gewone elasticiteitsprobleem als voor het stabiliteitsprobleem.

1) De vergelijkingen (17) geven in verkorte notatie de evenwichtsvergelijkingen weer, die door BIEZENO en HENCKY zijn gevonden. In hun verhandeling definiëeren de schrijvers σ_{mn} met $\sigma_{mn} = \bar{S}'_{mn} - S'_{mn}$, dus als toename van gereduceerde spanning, van welke definitie de hier ge-gene, (14a), afwijkt. Ten einde een rekenfout te compenseeren, die in hun verhandeling bij de vergelijkingen (18a, b) insloep, is de gewijzigde be-tekenis van σ_{mn} hier ingevoerd.

In het algemeen worden aan het buitenoppervlak van het lichaam ten gevolge der extra-vervormingen extra-spanningen vereischt, die evenredig zijn met de plaatselijke extra-vervormingen aan den rand. Een willekeurige extra-vervorming is daarom altijd mogelijk, indien aan den rand slechts de noodige extra-belasting aanwezig is, die, zoolang de vervorming klein blijft, met deze evenredig is.

De oppervlaktespanningen van een lichaam, dat zich in een krachtenveld bevindt, zijn in het algemeen afhankelijk van den vorm van dat lichaam. Indien het lichaam, zich vervormt verandert daarmee tegelijkertijd de plaatselijke uitwendige belasting, die het gevolg is van het belastende krachtenveld. Hoe de verandering van de uitwendige belasting met de vervorming samenhangt is bekend uit den aard van het gegeven krachtenveld; zij wordt bepaald door de verplaatsingen van de punten van het oppervlak en hun differentiaalquotienten.

De extra-vervorming leidt in het bijzonder dan knik in, indien de extra-belasting, die voor deze vervorming noodig is, geleverd wordt door hetzelfde krachtenveld, dat in het lichaam den spanningstoestand I opwekt.

Indien de verandering der uitwendige belasting evenredig is met de randverplaatsingen en haar afgeleiden, ontstaat de mogelijkheid voor een geheele reeks van extra-vervormingen onder gelijkblijvend krachtenveld. De bij knik vereischte gelijkheid van belastingsverandering en verandering der randspanning stelt dan aan het systeem van verplaatsingen u_i een randvoorwaarde, die homogeen en lineair is in de randverplaatsingen, zoodat het stabiliteitsprobleem bestaat in het bepalen van de oplossingen van de homogene lineaire differentiaalvergelijkingen (17), die aan zekere homogene lineaire randvoorwaarden voldoen.

Hoewel het stabiliteitsprobleem zich van het gewone elasticiteitsprobleem slechts onderscheidt in den vorm der randvoorwaarden, terwijl de differentiaalvergelijkingen dezelfde zijn, worden in verband met het speciale onderwerp van deze verhandeling de evenwichtsvergelijkingen (17) in het vervolg stabiliteitsvergelijkingen genoemd.

§ 3 – DE STABILITEITSVERGELIJKINGEN IN ANDERE ORTHOGONALE COÖRDINATEN

Evenals het in de vorige § gebezigde assenstelsel vormen de poolcoördinaten een orthogonaal systeem. Dit belangrijke punt van overeenkomst stelt in staat na enkele eenvoudige overwegingen de stabiliteitsvergelijkingen (17) te transformeeren op poolcoördinaten. Doch ook de overgang naar ieder ander orthogonaal systeem laat zich op grond van deze overwegingen volvoeren, en daarom zal in het algemeen worden onderzocht op welke wijze deze overgang verkregen wordt.

a – Willekeurige orthogonale coördinaten

Er worden weer de drie toestanden 0, I en II onderscheiden, welke dezelfde beteekenis hebben als in de voorgaande §. De spanningstoestand I wordt beschreven met de componenten S_{mn} . Ook hier beteekent S_{mn} de spanningscomponente welke gericht is volgens de m -coördinaat in het beschouwde punt en die aangrijpt op een vlakke-element, dat de n -coördinaat tot normaal heeft. Onder de spanningen S_{mn} en de eventueel aanwezige massakracht is een element, dat in den toestand I begrensd is door vlakken loodrecht op de coördinaatrichtingen, in evenwicht.

De evenwichtsbetrekkingen, welke algemeen gelden bij kromlijnige coördinaten zijn van meer gecompliceerden bouw dan de overeenkomstige vergelijkingen (1) bij gebruik van orthogonale rechtlijnige coördinaten ¹⁾. Zij worden in het vervolg aangeduid met:

$$F_m(S_{kn}) + M = 0 \quad m = x, y, z, \quad (18)$$

waarin $F_m(S_{kn})$ een lineaire uitdrukking is in de spanningen S_{kn} ($k = x, y, z$; $n = x, y, z$) en hun afgeleiden. In tegenstelling tot de vergelijking (1) kan in (18) niet eenzelfde gebruik gemaakt worden van den index m , omdat in het algemeen door iedere spanningscomponente een bijdrage wordt geleverd onder het symbool F_m , zoodat m in S_{mn} vervangen moet worden door den index k , die evenals n ieder der coördinaatrichtingen kan representeren.

1) vergel. A. E. H. LOVE, A treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, 4th edition, Chap. II, art. 58.

Het volume-element, dat in den toestand I georiënteerd was volgens de coördinaatrichtingen, wordt beschouwd nadat het is overgegaan in den toestand II. Het zijvlak dat in toestand I normaal op de n -richting stond, die bij dit bepaalde punt behoorde, heeft bij den overgang naar toestand II een wijziging ondergaan in stand, vorm en grootte. Ook de erop werkende spanning is in grootte en richting veranderd. De spanning in toestand II wordt

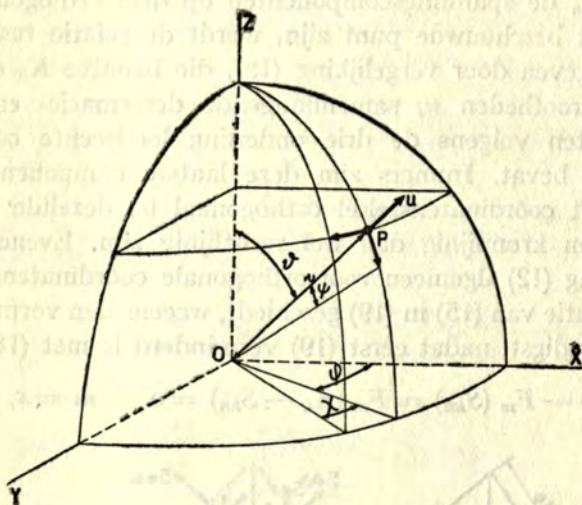


Fig. 2.

nu uitgedrukt met behulp van spanningscomponenten K_n , welke evenwijdig zijn aan de spanningen S_{in} van toestand I, — zij zijn dus niet langer evenwijdig aan de plaatselijke coördinaatrichtingen —, terwijl zij evenals in § 2 betrokken worden op het overeenkomstige oppervlakte-element in toestand I. Ten opzichte van de gebezigde notatie geldt hetzelfde als hetgeen in § 2 werd vastgesteld betreffende de spanning M_n .

Na deze definitie van den spanningstoestand II geldt voor het element, dat in den toestand I begrensd was door vlakken normaal op de coördinaatrichtingen, als voorwaarde voor het evenwicht in de richting der m coördinaat:

$$F_m(K_n) + M = 0 \quad m = x, y, z, \quad (19)$$

waarin F_m hetzelfde symbool is als in vergelijking (18), doch nu,

inplaats van op de spanningen S_{kn} , betrekking hebbend op de spanningen K_n .

Daar F_m een bekende uitdrukking is, behoeft nog slechts vastgesteld te worden, hoe K_n afhangt van de, den spanningstoestand I bepalende, grootheden S_{kn} en de verplaatsingen u_i , om de met (17) analoge evenwichtsvergelijkingen voor den toestand II te kunnen verkrijgen.

Daar S_{kn} de spanningscomponenten op drie orthogonale vlakken in het beschouwde punt zijn, wordt de relatie tusschen K_n en S_{kn} gegeven door vergelijking (15), die behalve K_n en S_{kn} de met de grootheden u_i samenhangende deformatie- en rotatiecomponenten volgens de drie onderling loodrechte coördinaat-richtingen bevat. Immers zijn deze laatste componenten, mits slechts het coördinatenstelsel orthogonaal is, dezelfde of nu de coördinaten kromlijinig dan wel rechtlijinig zijn. Eveneens geldt vergelijking (12) algemeen voor orthogonale coördinatensystemen.

Substitutie van (15) in (19) geschiedt, wegens den vorm van (15), het eenvoudigst, nadat eerst (19) verminderd is met (18).

$$F_m(K_n) - F_m(S_{kn}) = F_m(K_n - S_{kn}) = 0 \quad m = x, y, z. \quad (20)$$

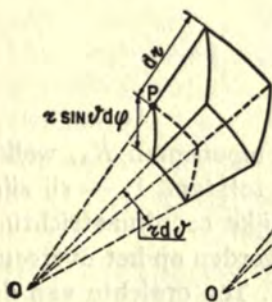


Fig. 3a.

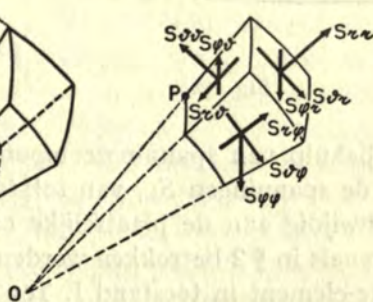


Fig. 3b.

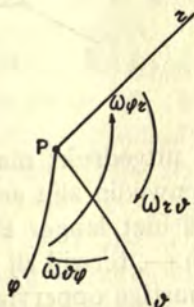


Fig. 3c.

b - Poolcoördinaten

De coördinaten van een punt der ruimte zijn de hoeken ϑ en φ , en de lengte r van zijn voerstraal; de verplaatsingen, die een punt ondergaat bij overgang van toestand I naar toestand II zijn in de richtingen der genoemde coördinaten resp.: de hoeken ψ en χ en de lengte u (fig. 2).

Na wat in het algemeen kon worden opgemerkt over ortho-

gonale systemen, moet nu nog in het bijzonder vastgesteld worden, op welke wijze de vervormingen f_{kn} en de rotaties ω_{kn} met de verplaatsingen ψ , χ en u samenhangen, en welken vorm het symbool F_m bezit.

Wegens de ongelijksortigheid der coördinaten kunnen f_{kn} , ω_{mn} en F_m niet gegeven worden in algemeene vormen, die zich op de verschillende componenten of op de drie coördinaatrichtingen gelijk laten toepassen; de algemeene notatie moet daarom verlaten worden.

De grootheden f_{kn} en ω_{kn} (fig. 3c) worden bij poolcoördinaten als volgt in de grootheden ψ , χ , en u uitgedrukt ¹⁾. (21)

$$2f_{\vartheta\vartheta} = 2 \left(\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} + \frac{u}{r} \right) \quad 2f_{\varphi r} = 2f_{r\varphi} = \left(\frac{\partial r\chi}{\partial r} - \chi \right) \sin \vartheta + \frac{\partial u}{r \sin \vartheta \partial \varphi}$$

$$2f_{\varphi\varphi} = 2 \left(\psi \cotg \vartheta + \frac{\partial\chi}{\partial\varphi} + \frac{u}{r} \right) \quad 2f_{r\vartheta} = 2f_{\vartheta r} = \frac{\partial r\psi}{\partial r} - \psi + \frac{\partial u}{r \partial \vartheta}$$

$$2f_{rr} = 2 \frac{\partial u}{\partial r} \quad 2f_{\vartheta\varphi} = 2f_{\varphi\vartheta} = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \sin \vartheta \frac{\partial\chi}{\partial\vartheta}$$

$$2\omega_r = \left(-\frac{\partial r\chi}{\partial r} - \chi \right) \sin \chi + \frac{\partial u}{r \sin \vartheta \partial \varphi}$$

$$2\omega_{r\vartheta} = \frac{\partial r\psi}{\partial r} + \psi - \frac{\partial u}{r \partial \vartheta}$$

$$2\omega_{\vartheta\varphi} = -\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \sin \vartheta \frac{\partial\chi}{\partial\vartheta} + 2 \cos \vartheta \chi.$$

De vorm van het symbool F_m wordt afgeleid uit het evenwicht in toestand I van een volume-element, dat georiënteerd is volgens de coördinaatrichtingen (fig. 3a) en waarop de spanningen S_{kn}

1) A. E. H. LOVE, A treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, 4th edition, Chap. I, art. 22. De overeenstemming tusschen de in dit werk gegeven formules en de bovenstaande blijkt, wanneer de coördinaten θ en ϕ bij LOVE vervangen worden door ϑ en ϕ ; de verplaatsingen u_r , u_θ , u_ϕ door u , $r\psi$, $r \sin \vartheta \chi$; de vervormings-grootheden e_{rr} , $e_{\theta\theta}$, $e_{\phi\phi}$ door f_{rr} , $f_{\vartheta\vartheta}$, $f_{\phi\phi}$ en $e_{\theta\phi}$, $e_{\phi r}$, $e_{r\theta}$ door $2f_{\vartheta\phi}$, $2f_{\phi r}$, $2f_{r\vartheta}$; en de rotatie $\tilde{\omega}_r$, $\tilde{\omega}_\theta$, $\tilde{\omega}_\phi$ door $\omega_{\vartheta\phi}$, $\omega_{\phi r}$, $\omega_{r\vartheta}$.

werken, die positief gerekend worden volgens de in figuur 3b aangegeven richtingen.

Met $\Theta(\vartheta, \varphi, r)$, $\Phi(\vartheta, \varphi, r)$ en $R(\vartheta, \varphi, r)$ de eerste leden van de evenwichtsvergelijkingen in de richtingen ϑ , φ en r aanduidend, en met Θ , Φ en R de componenten van de massakracht in de plaatselijke coördinaatrichtingen, vindt men voor de evenwichtsvergelijkingen voor den toestand I:

$$\begin{aligned}
 \Theta(\vartheta, \varphi, r) &\equiv \frac{\partial \sin \vartheta S_{\vartheta\vartheta}}{r \sin \vartheta \partial \vartheta} + \frac{\partial S_{\vartheta\phi}}{r \sin \vartheta \partial \varphi} + \frac{\partial r^2 S_{\vartheta r}}{r^2 \partial r} - \\
 &\quad - \cotg \vartheta \frac{S_{\phi\phi}}{r} + \frac{S_{r\vartheta}}{r} + \Theta = 0 \\
 \Phi(\vartheta, \varphi, r) &\equiv \frac{\partial \sin \vartheta S_{\phi\vartheta}}{r \sin \vartheta \partial \vartheta} + \frac{\partial S_{\phi\phi}}{r \sin \vartheta \partial \varphi} + \frac{\partial r^2 S_{\phi r}}{r^2 \partial r} + \\
 &\quad + \cotg \vartheta \frac{S_{\vartheta\phi}}{r} + \frac{S_{r\phi}}{r} + \Phi = 0 \\
 R(\vartheta, \varphi, r) &\equiv \frac{\partial \sin \vartheta S_{r\vartheta}}{r \sin \vartheta \partial \vartheta} + \frac{\partial S_{r\phi}}{r \sin \vartheta \partial \varphi} + \frac{\partial r^2 S_{rr}}{r^2 \partial r} - \\
 &\quad - \frac{1}{r} (S_{\vartheta\vartheta} + S_{\phi\phi}) + R = 0
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \Theta \\ \Phi \\ R \end{aligned}} \right\} (22)^1$$

Overeenkomstig vergelijking (20) worden de stabiliteitsvergelijkingen gevonden, indien in (22) S_{kn} vervangen wordt door $K_n - S_{kn}$ volgens vergelijking (15), en het laatste lid der vergelijkingen (22) wordt weggelaten. Er wordt op deze plaats van afgezien de stabiliteitsvergelijkingen expliciet in de grootheden f_{kn} , ω_{kn} en S_{kn} te geven, omdat het in de bedoeling ligt deze vergelijkingen te specialiseeren op den dunwandigen bol, bij welke specialisatie uit den aard van het beschouwde lichaam zekere vereenvoudigingen voortkomen, die de stabiliteitsvergelijkingen eenigszins bekorten.

1) A. E. H. LOVE, A treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, 4th edition, Chap. II, art. 59. De overeenstemming tusschen de formules, die LOVE geeft en de bovenstaande blijkt, indien de spanningen \hat{ij} vervangen worden door S_{ij} ; de massakrachten ρF_r , ρF_θ , ρF_ϕ door R , Θ , Φ ; en de versnellingen f_r , f_θ , f_ϕ gelijk nul gesteld worden.

HOOFDSTUK II

DE STABILITEITSVERGELIJKINGEN VAN DEN DUNNEN BOLWAND

§ 1 - HET KINEMATISCH SCHEMA VAN DEN DUNNEN WAND

De methodes, welke de technische mechanica ter beschikking staan, stellen ook in veel eenvoudige gevallen niet in staat het mathematisch geformuleerde elasticiteitsprobleem tot exacte oplossing te voeren. Daarom worden zekere vereenvoudigende wijzigingen in de probleemstelling aangebracht, waardoor voor het aldus ontstane vraagstuk een oplossing mogelijk wordt.

Een veel toegepaste schematisering, welke ook in het volgende wordt gebruikt, treedt op in de balken- en platen theorieën. Balken en platen worden geacht zich zoodanig te vervormen, dat punten welke vòòr de vervorming op een normaal van het middenvlak lagen, onder behoud van hun onderlingen afstand, ook na de vervorming op een normaal van het gedeformeerde middenvlak liggen (veronderstelling van BERNOULLI). De mechanische betekenis van deze schematisering is deze, dat in de richting loodrecht op het middenvlak de balk of de plaat onvervormbaar is; vervormingen — wel te onderscheiden van verplaatsingen — treden alleen op evenwijdig aan dit vlak.

De benadering, welke dit schema voor het oorspronkelijk probleem levert, is beter naarmate de verhouding tusschen de werkelijke vervormingen, evenwijdig aan en loodrecht op het middenvlak, grooter is; en deze verhouding is grooter naarmate de schuifspanningen, welke op de normaalvlakken aangrijpen en in normaalrichting werken (dwarskrachten), en de normaalspanningen in deze richting kleiner zijn tegenover de andere spanningen. Bij slanke balken en bij platen, welke dun zijn tegenover de lengteafmetingen, is aan deze voorwaarde voldaan. Omdat knik juist

bij deze slanke lichamen het gemakkelijkst optreedt, zullen de resultaten, welke een stabiliteitstheorie, gebouwd op de veronderstelling van BERNOULLI, geeft, een goede benadering vormen van den optredenden toestand bij het niet-geschematiseerde systeem.

§ 2 – HET KINEMATISCH SCHEMA EN DE STABILITEITSVERGELIJKINGEN

Een vlak waarvan de punten op constanten afstand tot het middenvlak liggen is bij de ingevoerde schematisering een vlak van isotropie; de normaal op dit vlak geeft de richting aan waarin het materiaal onvervormbaar is. Volgens het kinematisch schema bestaat de plaat dan uit onvervormbare normaalelementen ter lengte van de wanddikte, die verticaal op het doorgebogen middenvlak gericht blijven en die horizontaal elastisch aan elkaar verbonden zijn. Tengevolge van de invoering van dit schema behoeven de, voor het driedimensionale isotrope continuum afgeleide, stabiliteitsvergelijkingen een herziening, en deze herziening betreft het punt, waar het verband gelegd werd tusschen vervorming en spanning, dus het punt waar de elasticiteitswet werd ingevoerd. De evenwichtsvergelijkingen blijven onveranderd gehandhaafd.

Het vlak A (fig. 4) is een vlak, waarin tusschen spanning en vervorming een relatie bestaat, die voor alle punten van dat vlak dezelfde is. Spanningen welke in de richting van de normaal op dit vlak werken en aangrijpen op het element $A'A''B'B'$ mogen al aanwezig zijn, zij zijn niet in staat eenigen invloed uit te oefenen op de vervormingen van dit element. Slechts de spanningen, welker richting evenwijdig is aan het vlak van de plaat, en die aangrijpen op normaalvlakken, staan in relatie tot de vervormingen van het element. Daarom is, wat betreft den samenhang tusschen spanning en vervorming, de spanningstoestand van driedimensionaal overgegaan tot tweedimensionaal.

Ter invoering van een elasticiteitswet, welke rekening houdt met de eindigheid der vervormingen wordt, geheel naar analogie van de beschouwingen over de driedimensionale isotrope continua, onderscheid gemaakt tusschen spanningen, die het oppervlak vergrooten zonder daarbij den vorm van het plaalement te veranderen, en spanningen, die vormverandering meedeelen zonder

de grootte van het oppervlak te wijzigen. De elastische energie, welke een element bevat wordt opgebouwd gedacht uit een gedeelte dat van de eerste vervormingen en een gedeelte dat van de laatste afkomstig is:

$$2A = 2G \{(\varepsilon_1 - \varepsilon)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon)^2\} + 4H\varepsilon^2, \quad (23)$$

waarin ε_1 en ε_2 de maatgetallen van de hoofdrekken zijn, en

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

de maat van de oppervlakteverandering is, terwijl G en H elasticiteitsconstanten zijn.

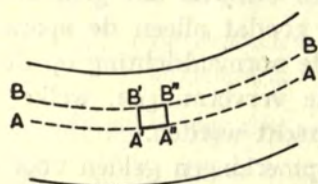


Fig. 4.

Groeien ε_1 en ε_2 met $\delta\varepsilon_1$ en $\delta\varepsilon_2$ aan, dan is enerzijds de vermeerdering van de elastische energie:

$$\delta A = 2G \{(\varepsilon_1 - \varepsilon) \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon) + (\varepsilon_2 - \varepsilon) \delta(\varepsilon_2 - \varepsilon)\} + 4H\varepsilon\delta\varepsilon, \quad (24)$$

andererseits de arbeid van de uitwendige spankrachten:

$$\delta A = \frac{1}{dx_1 dx_2} \{S_1 d\bar{x}_2 \delta d\bar{x}_1 + S_2 d\bar{x}_1 \delta d\bar{x}_2\},$$

waarin $d\bar{x}$ de afmeting in den eindtoestand is van het lijnelement, dat in onbelasten toestand de lengte dx bezat. Na een gelijke herleiding, als in hoofdstuk I, § 2b bij de bespreking van de elasticiteitswet voor driedimensionale isotropie werd gebruikt, volgt,

$$\begin{aligned} \delta A &= e^{2\varepsilon} \{S_1 \delta\varepsilon_1 + S_2 \delta\varepsilon_2\} = \\ &= e^{2\varepsilon} \{(S_1 - S) \delta(\varepsilon_1 - \varepsilon) + (S_2 - S) \delta(\varepsilon_2 - \varepsilon)\} + e^{2\varepsilon} \cdot 2S\delta\varepsilon, \end{aligned} \quad (25)$$

indien nog gesteld wordt

$$S = \frac{1}{2} (S_1 + S_2).$$

Daar de inwendige energie (24) bij iedere variatie $\delta\epsilon_1$, $\delta\epsilon_2$ gelijk moet zijn aan den uitwendigen arbeid (25) blijkt dat:

$$\left. \begin{aligned} S_i' - S' &= 2G(\epsilon_i - \epsilon) & (i = 1, 2) \\ S' &= 2H\epsilon, \end{aligned} \right\} (26)$$

waarin

$$S_i' = e^{2\epsilon} \cdot S_i.$$

Het orthogonale coördinatenstelsel wordt zoodanig gekozen, dat in toestand I in ieder punt van den wand één der coördinaatrichtingen normaal op den wand gericht is. De spanningen S_{mn} betreffen dan ook een element dat georiënteerd is volgens het kinematisch schema, zoodat alleen de spanningen, waarvan de indices m en n niet de normaalrichting op de plaat aangeven, in verband staan tot de vervormingen, welke door de ingevoerde elasticiteitswet beheerscht worden.

Overeenkomstige opmerkingen gelden voor de spanningen \bar{S}_{mn} in toestand II. De spanningen S_{mn} en \bar{S}_{mn} zijn daarom beide, voor zoover zij tot de vervormingen in verband staan, de componenten van tweedimensionale spanningstoestanden, die met de tweedimensionale vervormingen door de elasticiteitswet (26) verbonden zijn.

De beschouwingen, die bij driedimensionale isotropie tot het verband tusschen $\bar{S}_{mn} - S_{mn}$ en u voeren, moeten nu herhaald worden voor het tweedimensionale probleem. Hierbij doen zich geen nieuwe moeilijkheden voor, slechts wordt de afleiding vereenvoudigd doordat de elasticiteitswet slechts op twee dimensies betrekking heeft. Daar niettemin de weergave van deze afleiding in het geval van tweedimensionale isotropie nog een vrij breedvoerig betoog vereischt, wordt zij ook hier achterwege gelaten, en wordt onder verwijzing naar het analoge gedeelte uit de verhandeling van BIEZENO en HENCKY¹⁾ onmiddellijk het resultaat vermeld:

$$\sigma'_{mn} = \bar{S}'_{mn} - S'_{mn} = 2Gf_{mn} + g_{mn}(H - G)\Delta. \quad (27)$$

Ten einde ook hier²⁾ een vergelijking mogelijk te maken tusschen

1) Zie de noot op bladzijde 15.

2) Vergelijk hoofdstuk I, § 2b.

de ingevoerde elasticiteitswet voor eindige vervormingen en de wet van HOOKE wordt de constante H uitgedrukt met behulp van den coëfficiënt van zijdelingsche contractie m en den glijdingsmodulus G .

Volgens (26) geldt

$$S_i' = 2G\varepsilon_i + 2(H - G)\varepsilon.$$

Bij zeer kleine waarde der ε 's gaat deze uitdrukking over in

$$S_i = 2G\left(\varepsilon_i + \frac{H - G}{G}\varepsilon\right),$$

waarin nu:

$$\varepsilon_i = \lim \frac{\text{lengtetoenamen}}{\text{beginlengte}}.$$

Volgens de wet van HOOKE geldt voor den vlakspanningstoestand:

$$S_i = 2G\left(\varepsilon_i + \frac{2}{m - 1}\varepsilon\right).$$

Uit de voorwaarde dat de nieuwe elasticiteitswet bij den overgang naar oneindig kleine vervormingen met de wet van HOOKE identiek is volgt:

$$H = \frac{m + 1}{m - 1}G,$$

waarna (27) overgaat in

$$\sigma'_{mn} = 2G\left\{f_{mn} + \frac{g_{mn}}{m - 1} \cdot \Delta\right\}. \quad (28)$$

De stabiliteitsvergelijkingen in poolcoördinaten worden overeenkomstig de beschouwingen van hoofdstuk I, § 3a verkregen door in de vergelijkingen (22) de spanningen S_{kn} te vervangen door de grootheden $K_n - S_{kn}$, welke gegeven worden door (15); en door weglating van den term der massacracht. De vergelijkingen, die op deze wijze ontstaan, kunnen gesplitst worden in twee groepen van termen: een groep welke gevormd wordt door de spanningen σ_{mn} en hun afgeleiden, en een groep, die bestaat uit de producten $S_{ij} \cdot f_{mn}$ en $S_{ij} \omega_{mn}$ met hun afgeleiden. Deze

tweede groep wordt in het volgende, wat betreft de evenwichtsvergelijking voor de richting der m -coördinaat, aangegeven met het symbool $\frac{1}{r} A_m (S . f)$ waarin f niet speciaal op de vervormingen f_{mn} betrekking heeft doch tevens op de rotaties ω_{mn} .

In deze notatie, en na een herleiding ten opzichte van de termen welke σ_{rn} bevatten, nemen de stabiliteitsvergelijkingen den vorm aan (29a, b, c)

$$\Theta (\vartheta, \varphi, r) \equiv \frac{\partial \sin \vartheta}{r \sin \vartheta} \frac{\sigma_{\vartheta\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma_{\vartheta\phi}}{r \sin \vartheta \partial \varphi} + \frac{\partial r^2 \sigma_{\vartheta r}}{r^3 \partial r} - \cotg \vartheta \frac{\sigma_{\phi\phi}}{r} + \frac{1}{r} A_{\vartheta} (S . f) = 0$$

$$\Phi (\vartheta, \varphi, r) \equiv \frac{\partial \sin \vartheta}{r \sin \vartheta} \frac{\sigma_{\phi\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma_{\phi\phi}}{r \sin \vartheta \partial \varphi} + \frac{\partial r^2 \sigma_{\phi r}}{r^3 \partial r} + \cotg \vartheta \frac{\sigma_{\vartheta\phi}}{r} + \frac{1}{r} A_{\phi} (S . f) = 0$$

$$R (\vartheta, \varphi, r) \equiv \frac{\partial \sin \vartheta}{r \sin \vartheta} \frac{\sigma_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma_{r\phi}}{r \sin \vartheta \partial \varphi} + \frac{\partial r^2 \sigma_{rr}}{r^3 \partial r} - \frac{\sigma_{\vartheta\vartheta} + \sigma_{\phi\phi}}{r} + \frac{1}{r} A_r (S . f) = 0.$$

In aanmerking nemende, dat bij het aangenomen kinematisch schema $f_{\vartheta r} = f_{\phi r} = f_{rr} = 0$, worden de functies $A_{\vartheta} (S . f)$, $A_{\phi} (S . f)$ en $A_r (S . f)$ gegeven door (30a, b, c)

$$A_{\vartheta} (S . f) \equiv B_{\vartheta} (S . f) + (S_{\vartheta\phi} f_{\phi\vartheta} + S_{\phi\phi} f_{\phi\phi}) \cotg \vartheta - (S_{\vartheta r} f_{\vartheta\vartheta} + S_{\phi r} f_{\vartheta\phi}) + (S_{\phi r} \cotg \vartheta + S_{\phi\vartheta}) \omega_{\phi r} + S_{\phi\phi} \omega_{r\vartheta} + S_{\phi r} \omega_{\vartheta\phi}$$

$$A_{\phi} (S . f) \equiv B_{\phi} (S . f) - (S_{\vartheta\vartheta} f_{\vartheta\phi} + S_{\phi\vartheta} f_{\phi\phi}) \cotg \vartheta - (S_{\vartheta r} f_{\phi\vartheta} + S_{\phi r} f_{\phi\phi}) - S_{\vartheta\vartheta} \omega_{\phi r} + (S_{\phi r} \cotg \vartheta - S_{\phi\vartheta}) \omega_{r\vartheta} - S_{\vartheta r} \omega_{\vartheta\phi}$$

$$A_r (S . f) \equiv B_r (S . f) + (S_{\vartheta\vartheta} f_{\vartheta\vartheta} + 2S_{\vartheta\phi} f_{\vartheta\phi} + S_{\phi\phi} f_{\phi\phi}) - (S_{\vartheta\phi} \omega_{\phi r} + S_{\phi\phi} \omega_{r\vartheta}) \cotg \vartheta,$$

waarin $B_{\vartheta} (S . f)$, $B_{\phi} (S . f)$ en $B_r (S . f)$ gegeven worden door de algemeene uitdrukking:

$$B_i(S, f) \equiv - \frac{\partial \sin \vartheta (S_{i\vartheta f_{\vartheta\vartheta}} + S_{i\phi f_{\vartheta\phi}})}{\sin \vartheta \partial \vartheta} - \frac{\partial (S_{i\vartheta f_{\phi\vartheta}} + S_{i\phi f_{\phi\phi}})}{\sin \vartheta \partial \varphi} -$$

$$- \sum_{i = \vartheta, \phi, r} \left(S_{i\vartheta} \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial \vartheta} + S_{i\phi} \frac{\partial \omega_{ij}}{\sin \vartheta \partial \varphi} + J \omega_{ji} \right) \quad i = \vartheta, \varphi, r. \quad (30d)$$

§ 3 - AANTAL DER ONBEKENDE FUNKTIES EN DER VERGELIJKINGEN

Het drietal stabiliteitsvergelijkingen bevat in het algemeen, behalve de grootheden welke op den spanningstoestand I betrekking hebben en die bij ieder concreet stabiliteitsprobleem gegeven zijn, de spanningen σ_{mn} de deformaties f_{mn} en de rotatiecomponenten ω_{mn} . De grootheden f_{mn} en ω_{mn} worden door de vergelijkingen (2a, b), onafhankelijk van iedere elasticiteitswet, uitgedrukt in de verplaatsingen u_n , $n = x, y, z$. Na inachtnaam van (2a, b) resteeren daarom nog 12 onbekenden functies, n.l. 3 verplaatsingen

$$\begin{array}{l} u_n \\ \text{en 9 spanningen } \sigma_{mn} \end{array} \quad \begin{array}{l} n = x, y, z \\ m = x, y, z \quad n = x, y, z. \end{array}$$

Ter bepaling van deze onbekenden zijn 12 vergelijkingen noodig. Reeds 3 vergelijkingen zijn gegeven in den vorm van het drietal stabiliteitsvergelijkingen. Zij garandeeren het evenwicht der krachten, die op een element werken, in de coördinaatrichtingen.

Het evenwicht der momenten vereischt in toestand I $S_{mn} = S_{nm}$, en in toestand II $\bar{S}_{mn} = \bar{S}_{nm}$, zoodat hieruit voor de spanningen σ_{mn} blijkens (14b) volgt: $\sigma_{mn} = \sigma_{nm}$.

De voorwaarde van het momentenevenwicht geeft zoo een drietal betrekkingen, dat het aantal der onbekende spanningen tot 6 reduceert.

Voor het elastisch continuum, dat driedimensionale isotropie bezit, worden deze 6 vergelijkingen verkregen uit (14a) en (12)¹⁾. Bij den tweedimensionaal isotropen wand geven de met (12) overeenkomende vergelijkingen (28) echter niet het gezochte zestal

1) Hoewel ook uit (12) de gelijkheid van σ_{mn} en σ_{nm} volgt, mag deze gelijkheid niet als een zelfstandige conclusie uit de elasticiteitswet worden opgevat. Zij is in principe evenwichtsbetrekking.

betrekkingen, daar (28) de spanningen σ'_{mn} tot de vervormingen in verband brengt slechts voor zoover hun indices m en n niet de normaalrichting op den wand aangeven. In de notatie welke bij gebruik van poolcoördinaten werd ingevoerd¹⁾ bepaalt daarom vergelijking (28) met (14a) alleen de spanningen $\sigma_{\vartheta\vartheta}$, $\partial\vartheta\phi = \sigma_{\phi\vartheta}$, $\sigma_{\phi\phi}$.

De spanningen $\sigma_{\vartheta r} = \sigma_{r\vartheta}$, $\sigma_{\phi r} = \sigma_{r\phi}$ en σ_{rr} kunnen echter niet door een elasticiteitswet in verband gebracht worden tot de vervormingen. Deze omstandigheid is ontstaan door invoering van het kinematisch schema. In den aard van het kinematisch schema ligt dan ook de mogelijkheid voor de opstelling van een drietal betrekkingen besloten, die in de plaats treden van de door dit schema opgeheven elasticiteitsbetrekkingen.

Indien bij den bolwand de verplaatsingen bekend zijn van de punten van het bolvlak dat in toestand I den straal a heeft, volgen de verplaatsingen van ieder ander punt van den wand uit de bekende translatie en rotatie van den normaal waarop dit punt ligt. De straal a wordt gelijk gekozen aan het rekenkundig gemiddelde van den uitwendigen en inwendigen straal, welke resp. de waarde $a + h$ en $a - h$ bezitten.

Indien de verplaatsingen van de punten (ϑ, φ, a) gegeven zijn door ψ_0 , χ_0 en u_0 ²⁾ zijn de verplaatsingen ψ , χ en u van een willekeurig punt (ϑ, φ, r) volgens het kinematisch schema bepaald door

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \psi_0 - \frac{\partial v_0}{\partial \vartheta} \cdot \frac{r - a}{r} \\ \chi &= \chi_0 - \frac{\partial v_0}{\sin^2 \chi \partial \varphi} \cdot \frac{r - a}{r} \\ v &= v_0 \end{aligned} \right\} (31)$$

waarin inplaats van u de dimensielooze grootheid $v = \frac{u}{a}$ is ingevoerd.

Het ligt in de bedoeling het twaalfstal vergelijkingen door eliminatie der spanningen te reduceeren tot een drietal, dat slechts de

1) Vergelijk hoofdstuk I, § 3b.

2) Vergelijk hoofdstuk I, § 3b.

onbekende verplaatsingen ψ_0 , χ_0 en v_0 bevat. De eliminatie der spanningen σ_{mn} , voor zoover (28) op hen betrekking heeft, kan zonder meer geschieden. De eliminatie van $\sigma_{\vartheta r}$, $\sigma_{\phi r}$ en σ_{rr} vereischt meer overleg en wordt in de volgende § uitgevoerd.

§ 4 - INTEGRATIE VAN DE STABILITEITSVERGELIJKINGEN VAN DEN BOLWAND

a - Eliminatie van $\sigma_{\vartheta r}$, $\sigma_{\phi r}$ en σ_{rr}

Beschouwd wordt een deel van den bolwand, dat de infinitesimale afmetingen $a d\vartheta$, $a \sin \vartheta d\phi$ en de *eindige* afmeting $2h$ heeft. (fig. 5) Het evenwicht van dit deel van den bolwand, dat in het vervolg

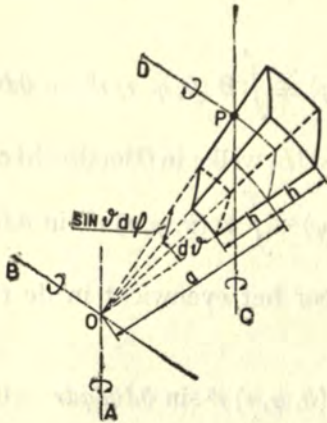


Fig. 5.

wandelement genoemd wordt, kan uiteraard worden uitgedrukt door integralen van de evenwichtsbetrekkingen (29) der ruimte-elementen, die het wandelement bevat. Deze integralen worden zoodanig gekozen, dat zij tot eliminatie der spanningen $\sigma_{\vartheta r}$, $\sigma_{\phi r}$ en σ_{rr} voeren, welke op de zijvlakken van het wandelement werken. Voor zoover deze spanningen op den buitenwand of den binnenwand van den bol aangrijpen zijn zij bekend uit de gegeven randvoorwaarden van het probleem; daarentegen zijn de resultanten $D_{\vartheta r}$ en $D_{\phi r}$ der spanningen $\sigma_{\vartheta r}$ en $\sigma_{\phi r}$, die aangrijpen op de zijvlakken welke den bolwand doorsnijden, onbekend.

De krachten $D_{\vartheta r}$ en $D_{\phi r}$ zijn door de wijze van definieeren dwars-

krachten van den bolwand — wel te onderscheiden van de totale dwarskrachten, waarvan zij slechts het gedeelte zijn, dat uit $\sigma_{\vartheta r}$ of $\sigma_{\phi r}$ wordt afgeleid, immers is de totale dwarskracht blijkens (14b) de resultante der spanningen

$$\bar{S}_{mn} = S_{mn} + \sigma_{mn} - \Delta S_{mn}.$$

Onmiddellijk kunnen twee evenwichtsvoorwaarden voor het wandelement worden genoemd, waarop de dwarskrachten geen invloed uitoefenen, en waarbij dus de gewenschte eliminatie verkregen wordt, n.l. het momentenevenwicht ten opzichte van de twee door het middelpunt van den bol gaande assen OA en OB .

Het moment om de as OA , die loodrecht staat op het coördinaatvlak φ door P , is

$$\sin \vartheta d\vartheta d\varphi \Theta(\vartheta, \varphi) \equiv \int \Theta(\vartheta, \varphi, r) r^3 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr = 0. \quad (32a)^1$$

Het moment om de as OB , welke in O loodrecht op OP en OA staat, is

$$\sin \vartheta d\vartheta d\varphi \Phi(\vartheta, \varphi) \equiv \int \Phi(\vartheta, \varphi, r) r^3 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr = 0. \quad (32b)$$

De voorwaarde voor het evenwicht in de richting, normaal op den wand, luidt:

$$\int R(\vartheta, \varphi, r) r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr = 0. \quad (33a)$$

In (33a) kunnen $D_{\vartheta r}$ en $D_{\phi r}$ nog niet geëlimineerd worden, daar zij in normaalrichting een resultante hebben van de grootte:

$$\frac{\partial D_{\vartheta r}}{\partial \vartheta} \cdot d\vartheta + \frac{\partial D_{\phi r}}{\partial \varphi} \cdot d\varphi,$$

welke dus onder het linkerlid van (33a) voorkomt.

De dwarskrachten $D_{\vartheta r}$ en $D_{\phi r}$ kunnen bepaald worden uit het momentenevenwicht van de op het wandelement werkende krachten t.o.v. de assen PC en PD . Het evenwicht om de as PC , die

1) De integratie strekt zich uit over de volle wanddikte, dus van $r = a - h$ tot $r = a + h$. De vermelding dezer grenzen blijft hier en in het vervolg achterwege.

loodrecht op het vlak φ door P staat, wordt uitgedrukt door:

$$\int \Theta(\vartheta, \varphi, r) r^2 (r - a) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr = 0. \quad (33b)$$

Het evenwicht om de as PD , loodrecht op OP en PC , geeft:

$$\int \Phi(\vartheta, \varphi, r) r^2 (r - a) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr = 0. \quad (33c)$$

Het linkerlid van (33b) bevat den term $-D_{\vartheta r} a d\vartheta$, het linkerlid van (33c) bevat $-D_{\varphi r} a \sin \vartheta d\varphi$.

Differentiatie van (33b) naar ϑ , deeling van (33c) door $\sin \vartheta$ en differentiatie naar φ , en sommatie van de dan verkregen uitdrukkingen geeft:

$$d\vartheta d\varphi \int \left[\frac{\partial (\sin \vartheta \Theta(\vartheta, \varphi, r))}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \Phi(\vartheta, \varphi, r)}{\partial \varphi} \right] r^2 (r - a) dr = 0, \quad (33d)$$

waarvan het linkerlid nu bevat:

$$-a \left[\frac{\partial D_{\vartheta r}}{\partial \vartheta} d\vartheta + \frac{\partial D_{\varphi r}}{\partial \varphi} d\varphi \right].$$

Deze laatste uitdrukking is gelijk aan $-a \times$ het gedeelte van (33a), dat op $D_{\vartheta r}$ en $D_{\varphi r}$ betrekking heeft. Uit (33a) kunnen $D_{\vartheta r}$ en $D_{\varphi r}$ dan ook geëlimineerd worden indien $\frac{1}{a} \times$ (33d) opgeteld wordt bij (33a).

$$\begin{aligned} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi R(\vartheta, \varphi) \equiv & \int \left\{ \left[\frac{\partial \sin \vartheta \Theta(\vartheta, \varphi, r)}{\sin \vartheta \partial \vartheta} + \frac{\partial \Phi(\vartheta, \varphi, r)}{\sin \vartheta \partial \varphi} \right] \frac{r - a}{a} + \right. \\ & \left. + R(\vartheta, \varphi, r) \right\} r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi dr = 0. \end{aligned} \quad (32c)$$

Substitutie van (29a, b, c) in (32a, b, c) levert vergelijkingen op, die wat betreft de spanningen $\sigma_{\vartheta r}$, $\sigma_{\varphi r}$ en σ_{rr} nog slechts de uitdrukkingen bevatten:

$$\int \frac{\partial (r^3 \sigma_{\vartheta r})}{\partial r} dr \quad (34a)$$

$$\int \frac{\partial (r^3 \sigma_{\phi r})}{\partial r} dr \quad (34b)$$

$$\int \left\{ \left[\frac{\partial^2 r^3 \sin \vartheta \sigma_{\vartheta r}}{r^3 \sin \vartheta \partial \vartheta \partial r} + \frac{\partial^2 r^3 \sigma_{\phi r}}{r^3 \sin \vartheta \partial \varphi \partial r} \right] \frac{r-a}{a} + \frac{\partial \sin \vartheta \sigma_{r\vartheta}}{r \sin \vartheta \partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma_{r\phi}}{r \sin \vartheta \partial \varphi} + \frac{\partial r^2 \sigma_{rr}}{r^2 \partial r} \right\} r^2 dr. \quad (34c)$$

Deze laatste uitdrukking vereischt eenige herleiding, wat betreft het gedeelte, dat op $\sigma_{\vartheta r}$ en $\sigma_{\phi r}$ betrekking heeft. Na invoering van

$$y = \frac{\partial \sin \vartheta \sigma_{r\vartheta}}{\sin \vartheta \partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\sin \vartheta \partial \varphi}$$

kan dit deel als volgt worden herleid:

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial r^3 y}{r \partial r} \frac{r-a}{a} dr + \int y r dr &= \int \frac{\partial r^3 y}{a \partial r} dr - \int \frac{\partial r^3 y}{r \partial r} dr + \int y r dr = \\ &= \int \left[\frac{\partial r^3 y}{a \partial r} - \frac{\partial r^2 y}{\partial r} \right] dr = \int \frac{\partial}{\partial r} \left[y \frac{r^2 (r-a)}{a} \right] dr, \end{aligned}$$

zoodat (34c) overgaat in:

$$\int \frac{\partial}{\partial r} r^2 \left\{ \left[\frac{\partial \sin \vartheta \sigma_{r\vartheta}}{\sin \vartheta \partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma_{r\phi}}{\sin \vartheta \partial \varphi} \right] \frac{r-a}{a} + \sigma_{rr} \right\} dr. \quad (34d)$$

Hiermede zijn de spanningen $\sigma_{\vartheta r}$, $\sigma_{\phi r}$ en σ_{rr} uit (32a, b, c) in zooverre geëlimineerd, dat zij nog slechts met hun bekende randwaarden voorkomen. Het geval, dat $\sigma_{\vartheta r}$ en $\sigma_{\phi r}$ aan de randen ongelijk nul zijn, wordt buiten beschouwing gelaten, omdat het technisch van geen beteekenis is. Daarentegen moet ermede rekening gehouden worden dat σ_{rr} van nul verschillen kan. Indien namelijk, zooals in het later te behandelen geval, de belasting van den bol uit een uitwendigen hydrostatischen druk p bestaat, is zoowel \bar{S}_{rr} als S_{rr} gelijk aan $-p$, zoodat, overeenkomstig (14b), aan den rand $r = a + h$:

$$\sigma_{rr} = -\Delta_{a+h} \cdot p.$$

Tengevolge van deze vereenvoudigingen nemen de stabiliteitsvergelijkingen (32) na substitutie van (29) den vorm aan:

$$\Theta(\vartheta, \varphi) \equiv \int \left(\frac{\partial \sin \vartheta \sigma_{\vartheta\vartheta}}{\sin \vartheta \partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma_{\vartheta\phi}}{\sin \vartheta \partial \varphi} - \cotg \vartheta \sigma_{\phi\phi} \right) r^2 dr + \int A_{\vartheta}^r(S.f) r^2 dr = 0 \quad (35a)$$

$$\Phi(\vartheta, \varphi) \equiv \int \left(\frac{\partial \sin \vartheta \sigma_{\phi\vartheta}}{\sin \vartheta \partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma_{\phi\phi}}{\sin \vartheta \partial \varphi} + \cotg \vartheta \sigma_{\vartheta\phi} \right) r^2 dr + \int A_{\phi}(S.f) r^2 dr = 0 \quad (35b)$$

$$R(\vartheta, \varphi) \equiv \int \left\{ \left[\frac{\partial^2 \sin \vartheta \sigma_{\vartheta\vartheta}}{\sin \vartheta \partial \vartheta^2} + 2 \frac{\partial^2 \sin \vartheta \sigma_{\vartheta\phi}}{\sin^2 \vartheta \partial \vartheta \partial \varphi} + \frac{\partial^2 \sigma_{\phi\phi}}{\sin^2 \vartheta \partial \varphi^2} - \frac{\partial \cos \vartheta \sigma_{\phi\phi}}{\sin \vartheta \partial \vartheta} \right] \frac{r-a}{a} - \sigma_{\vartheta\vartheta} - \sigma_{\phi\phi} \right\} r dr + \int \left\{ \left[\frac{\partial \sin \vartheta A_{\vartheta}(S.f)}{\sin \vartheta \partial \vartheta} + \frac{\partial A_{\phi}(S.f)}{\sin \vartheta \partial \varphi} \right] \frac{r-a}{a} + A_r(S.f) \right\} r dr - \Delta_{a+h} \cdot p(a+h)^2 = 0. \quad (35c)$$

b - Splitsing der stabiliteitsvergelijkingen in I_1 en I_2 ($I = \Theta, \Phi, R$).

In de vergelijkingen (35) wordt voor de spanningen σ_{mn} de gereduceerde spanning σ'_{mn} gesubstitueerd volgens (14a)

$$\sigma_{mn} = (1 - \Delta) \sigma'_{mn}.$$

Indien Δ nog gesplitst wordt in Δ_0 , de dilatatie in het punt $r = a$, en $\Delta - \Delta_0$, gaan de vergelijkingen (35) over in:

$$\left. \begin{aligned} \Theta(\vartheta, \varphi) &\equiv (1 - \Delta_0) \Theta_1(\vartheta, \varphi) + \Theta_2(\vartheta, \varphi) = 0 \\ \Phi(\vartheta, \varphi) &\equiv (1 - \Delta_0) \Phi_1(\vartheta, \varphi) + \Phi_2(\vartheta, \varphi) = 0 \\ R(\vartheta, \varphi) &\equiv (1 - \Delta_0) R_1(\vartheta, \varphi) + R_2(\vartheta, \varphi) = 0, \end{aligned} \right\} (36)$$

waarin

$$\left. \begin{aligned} \Theta_1(\vartheta, \varphi) &\equiv \int \left(\frac{\partial \sin \vartheta \sigma'_{\vartheta\vartheta}}{\sin \vartheta \partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma'_{\vartheta\phi}}{\sin \vartheta \partial \varphi} - \cotg \vartheta \sigma'_{\phi\phi} \right) r^2 dr \\ \Phi_1(\vartheta, \varphi) &\equiv \int \left(\frac{\partial \sin \vartheta \sigma'_{\phi\vartheta}}{\sin \vartheta \partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma'_{\phi\phi}}{\sin \vartheta \partial \varphi} + \cotg \vartheta \sigma'_{\vartheta\phi} \right) r^2 dr \end{aligned} \right\} (37)$$

$$R_1(\vartheta, \varphi) \equiv \int \left\{ \left[\frac{\partial^2 \sin \vartheta \sigma'_{\vartheta\vartheta}}{\sin \vartheta \partial \vartheta^2} + 2 \frac{\partial^2 \sin \vartheta \sigma'_{\vartheta\varphi}}{\sin^2 \vartheta \partial \vartheta \partial \varphi} + \frac{\partial^2 \sigma'_{\varphi\varphi}}{\sin^2 \vartheta \partial \varphi^2} - \frac{\partial \cos \vartheta \sigma'_{\varphi\varphi}}{\sin \vartheta \partial \vartheta} \right] \frac{r-a}{a} - \sigma'_{\vartheta\vartheta} - \sigma'_{\varphi\varphi} \right\} r dr, \quad (37)$$

en

$$\left. \begin{aligned} \Theta_2(\vartheta, \varphi) &\equiv \int [A_{\vartheta}(S.f) + C_{\vartheta}(\Delta.\sigma')] r^2 dr \\ \Phi_2(\vartheta, \varphi) &\equiv \int [A_{\varphi}(S.f) + C_{\varphi}(\Delta.\sigma')] r^2 dr \\ R_2(\vartheta, \varphi) &\equiv \int [A_r(S.f) + C_r(\Delta.\sigma')] r dr - \Delta_{a+h} \cdot p(a+h)^2 + \\ &+ \int \left[\frac{\partial \sin \vartheta (A_{\vartheta}(S.f) + C_{\vartheta}(\Delta.\sigma'))}{\sin \vartheta \partial \vartheta} + \frac{\partial (A_{\varphi}(S.f) + C_{\varphi}(\Delta.\sigma'))}{\sin \vartheta \partial \varphi} \right] \\ &\times \frac{r-a}{a} r dr. \end{aligned} \right\} (38)$$

De symbolen $A_i(S.f)$ zijn reeds door (30) gedefinieerd; voor $C_i(\Delta.\sigma')$ geldt:

$$\left. \begin{aligned} C_{\vartheta}(\Delta.\sigma') &\equiv - \left\{ (\Delta - \Delta_0) \left(\frac{\partial \sin \vartheta \sigma'_{\vartheta\vartheta}}{\sin \vartheta \partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma'_{\vartheta\varphi}}{\sin \vartheta \partial \varphi} - \cotg \vartheta \sigma'_{\varphi\varphi} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \Delta}{\partial \vartheta} \sigma'_{\vartheta\vartheta} + \frac{\partial \Delta}{\sin \vartheta \partial \varphi} \sigma'_{\vartheta\varphi} \right\} \\ C_{\varphi}(\Delta.\sigma') &\equiv - \left\{ (\Delta - \Delta_0) \left(\frac{\partial \sin \vartheta \sigma'_{\varphi\varphi}}{\sin \vartheta \partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma'_{\varphi\varphi}}{\sin \vartheta \partial \varphi} + \cotg \vartheta \sigma'_{\vartheta\varphi} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \Delta}{\partial \vartheta} \sigma'_{\varphi\varphi} + \frac{\partial \Delta}{\sin \vartheta \partial \varphi} \sigma'_{\varphi\varphi} \right\} \\ C_r(\Delta.\sigma') &\equiv (\Delta - \Delta_0) (\sigma'_{\vartheta\vartheta} + \sigma'_{\varphi\varphi}). \end{aligned} \right\} (39)$$

Het product $\Delta \cdot \sigma'$ is van dezelfde soort als het product $S \cdot f$, immers kan geschreven worden

$$\Delta \cdot \sigma' = (G\Delta) \cdot \frac{\sigma'}{G} \infty S \cdot f.$$

Behoudens de coëfficiënt $(1 - \Delta_0)$ van den eersten integraalvorm

$$I_1 (I = \Theta, \Phi, R)$$

van (36) zijn alle grootheden, welke op den spanningstoestand I betrekking hebben, geconcentreerd in I_2 ($I = \Theta, \Phi, R$). De beide integraalvormen onderscheiden zich daarom principieel, doordat I_1 termen bevat van de orde van grootte u en I_2 termen bevat van de orde van grootte $u \cdot U$. Bij deeling van (36) door $(1 - \Delta_0)$ worden aan I_2 termen van de orde van grootte uU^2 toegevoegd. Deze termen moeten, omdat zij tot nu toe stelselmatig verwaarloosd zijn tegenover de grootheden u , ook nu verwaarloosd worden tegenover I_1 , zoodat de stabiliteitsvergelijkingen tenslotte de vormen aannemen:

$$\left. \begin{aligned} \Theta(\vartheta, \varphi) &\equiv \Theta_1(\vartheta, \varphi) + \Theta_2(\vartheta, \varphi) = 0 \\ \Phi(\vartheta, \varphi) &\equiv \Phi_1(\vartheta, \varphi) + \Phi_2(\vartheta, \varphi) = 0 \\ R(\vartheta, \varphi) &\equiv R_1(\vartheta, \varphi) + R_2(\vartheta, \varphi) = 0. \end{aligned} \right\} (40)$$

De verklaring der symbolen geven (37), (38), (39) en (30). Na substitutie van (28) en (31) gaan de stabiliteitsvergelijkingen (40) over in een drietal simultane differentiaalvergelijkingen in ψ_0, χ_0 en v_0 , welke behalve deze onbekende functies van ϑ en φ de bekende spanningsgrootheden van toestand I bevatten, benevens natuurlijk grootheden welke op de wandafmetingen betrekking hebben. Deze laatste grootheden komen voor in den vorm van een getal κ , gedefinieerd door

$$\kappa = \frac{1}{3} \frac{h^2}{a^2}, \quad (41)$$

welk getal in verband met de vooronderstelde dunwandigheid, zeer klein is tegenover de eenheid.

c - De integralen I_1

Door (28) staan de spanningen reeds op bekende wijze in verband tot de vervormingen. De vervormingen worden door de volgende formules, welke verkregen worden na substitutie van (31) in (21), uitgedrukt in ψ_0, χ_0 en v_0

$$\begin{aligned}
 f_{\vartheta\vartheta} &= \frac{\partial\psi_0}{\partial\vartheta} + v_0 - \frac{r-a}{r} \left(v_0 + \frac{\partial^2 v_0}{\partial\vartheta^2} \right) \\
 f_{\phi\phi} &= \cotg \vartheta \cdot \psi_0 + \frac{\partial\chi_0}{\partial\varphi} + v_0 - \\
 &\quad - \frac{r-a}{r} \left(v_0 + \cotg \vartheta \cdot \frac{\partial v_0}{\partial\vartheta} + \frac{\partial^2 v_0}{\sin^2 \vartheta \partial\varphi^2} \right) \\
 f_{rr} &= 0 \\
 f_{\vartheta r} &= f_{r\vartheta} = 0 \\
 f_{\vartheta\phi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial\psi_0}{\partial\varphi} + \sin \vartheta \frac{\partial\chi_0}{\partial\vartheta} \right) - \\
 &\quad - \frac{r-a}{r} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 v_0}{\partial\vartheta\partial\varphi} - \frac{\cotg \vartheta}{\sin \vartheta} \frac{\partial v_0}{\partial\varphi} \right) \\
 \omega_{\phi r} &= -\sin \vartheta \chi_0 + \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial v_0}{\partial\varphi} \\
 \omega_{r\vartheta} &= \psi_0 - \frac{\partial v_0}{\partial\vartheta} \\
 \omega_{\vartheta\phi} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial\psi_0}{\partial\varphi} + \frac{\partial \sin^2 \vartheta \chi_0}{\sin \vartheta \partial\vartheta} \right).
 \end{aligned} \tag{42}$$

Substitutie van (42) in (28), en daarna van (28) in (37) levert op:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2a^2 h} \Theta_1(\vartheta, \varphi) &\equiv \frac{2G}{m-1} \left\{ (1+\kappa) \left[m \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial\vartheta^2} + \cotg \vartheta \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta} \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{m-1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\sin^2 \vartheta \partial\varphi^2} - (1+m \cotg^2 \vartheta) \psi \right] + \right. \\
 &\quad \left. + (1+\kappa) \left[\frac{m+1}{2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial\vartheta\partial\varphi} - (m-1) \cotg \vartheta \frac{\partial\chi}{\partial\vartheta} \right] + (m+1) \frac{\partial v}{\partial\vartheta} - \right. \\
 &\quad \left. - \kappa \left[m \left(\frac{\partial^3 v}{\partial\vartheta^3} + \cotg \vartheta \frac{\partial^2 v}{\partial\vartheta} + \frac{\vartheta^3 v}{\sin^2 \vartheta \partial\vartheta\partial\varphi^2} - 2 \frac{\cotg \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} \right) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (1+m \cotg^2 \vartheta) \frac{\partial v}{\partial\vartheta} \right] \right\} \tag{43a}
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2a^2h} \Phi_1(\vartheta, \varphi) \equiv \frac{2G}{m-1} \left\{ (1+\kappa) \left[\frac{m+1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\sin \vartheta \partial \vartheta \partial \varphi} + \frac{3m-1}{2} \frac{\cotg \vartheta \partial \psi}{\sin \vartheta \partial \varphi} \right] + \right. \\ \left. + (1+\kappa) \left[\frac{m-1}{2} \left(\sin \vartheta \frac{\partial^2 \chi}{\partial \vartheta^2} + 3 \cos \vartheta \frac{\partial \chi}{\partial \vartheta} \right) + m \frac{\partial^2 \chi}{\sin^2 \vartheta \partial \varphi^2} \right] + \right. \\ \left. + (m+1) \frac{\partial v}{\sin \vartheta \partial \varphi} - \kappa \left[m \left(\frac{\partial^3 v}{\sin \vartheta \partial \vartheta^2 \partial \varphi} + \frac{\cotg \vartheta}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \vartheta \partial \varphi} + \frac{\partial^3 v}{\sin^3 \vartheta \partial \varphi^3} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + (m-1) \frac{\partial v}{\sin \vartheta \partial \varphi} \right] \right\} \quad (43b)$$

$$\frac{1}{2ah} R_1(\vartheta, \varphi) \equiv \frac{2G}{m-1} \left\{ - (m+1) \left(\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} + \cotg \vartheta \cdot \psi \right) + \right. \\ \left. + \kappa \left[m \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial \vartheta^3} + 2 \cotg \vartheta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial^3 \psi}{\sin^2 \vartheta \partial \vartheta \partial \varphi^2} + \frac{\cotg \vartheta \partial^2 \psi}{\sin^2 \vartheta \partial \varphi^2} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{m}{\sin^2 \vartheta} + 1 \right) \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} + \left(\frac{m}{\sin^2 \vartheta} + m-1 \right) \cotg \vartheta \cdot \psi \right] - \right. \\ \left. - (m+1) \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} + \kappa \left[m \left(\frac{\partial^3 \chi}{\partial \vartheta^2 \partial \varphi} + \cotg \vartheta \frac{\partial^2 \chi}{\partial \vartheta \partial \varphi} + \frac{\partial^3 \chi}{\sin^2 \vartheta \partial \varphi^3} \right) + (m-1) \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \right] - \right. \\ \left. - 2(m+1)v - \kappa \left[m \left(\frac{\partial^4 v}{\partial \vartheta^4} + 2 \frac{\partial^4 v}{\sin^2 \vartheta \partial \vartheta^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 v}{\sin^4 \vartheta \partial \vartheta^4} + 2 \cotg \vartheta \frac{\partial^3 v}{\partial \vartheta^3} - 2 \frac{\cotg \vartheta \partial^3 v}{\sin^2 \vartheta \partial \vartheta \partial \varphi^2} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{m}{\sin^2 \vartheta} + 1 \right) \frac{\partial^2 v}{\partial \vartheta^2} + \left(\frac{4m}{\sin^2 \vartheta} - m-1 \right) \cdot \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{m}{\sin^2 \vartheta} + m-1 \right) \cotg \vartheta \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right] \right\}, \quad (43c)$$

waarin met ψ , χ , en v nu de verplaatsingen bedoeld zijn, die te voren met ψ_0 , χ_0 en v_0 werden aangeduid.

d - De integralen I_2

$A_i(S, f)$ zoowel als $C_i(\Delta \sigma')$ zijn funkties van r , doordat S en f funkties zijn van r . Uit (42) blijkt dat wat betreft f slechts $f\vartheta\vartheta$, $f\varphi\varphi$ en $f\vartheta\varphi$ van r afhankelijk zijn; zij kunnen geschreven worden in den vorm

$$f = k - l \frac{r - a}{r}, \quad (44)$$

waarin k en l van r onafhankelijke grootheden zijn.

Zonder het probleem te specialiseeren, kan niet worden aangegeven op welke wijze S van r afhankelijk is. Het is dan ook niet wel mogelijk de algemeen geldige uitdrukkingen tot eenvoudiger vormen te herleiden. In ieder concreet geval, kan echter zulk een vereenvoudiging uit de dan bekende spanningstoestand I worden verkregen.

HOOFDSTUK III

DE STABILITEITSVERGELIJKINGEN BIJ GELIJKMATIG VERDEELDEN UITWENDIGEN DRUK

§ 1 - DE SPANNINGSTOESTAND I

Wegens de alzijdige symmetrie zoowel van de belasting als van het belaste lichaam verkeeren alle punten van den bolwand, die op gelijken afstand tot het middelpunt liggen in gelijken spanningstoestand, zoodat voor dergelijke punten geldt

$$S_{\theta\theta} = S_{\phi\phi} = S.$$

Behalve S_{rr} zijn alle andere spanningscomponenten gelijk nul. Daar S_{rr} , zooals uit (30a, b, c) blijkt, niet optreedt in de stabiliteitsvergelijkingen, behoeft slechts vastgesteld te worden op welke wijze S van r afhankelijk is.

De symmetrie komt in de verplaatsingen U tot uiting, doordat deze verplaatsingen slechts radiaal zijn, terwijl de verplaatsingen van punten, op gelijken afstand tot het middelpunt gelegen, gelijk zijn. Onder invoering van een kinematisch schema zijn in het vorige hoofdstuk de, nu te bezigen, stabiliteitsvergelijkingen afgeleid. De spanningstoestand I heeft daarom betrekking op een bolwand van de aangegeven kinematische structuur, waarbij alle punten van de normaal op het boloppervlak en dus alle punten van den bol eenzelfde radiale verplaatsing U ondergaan.

Volgens (26) is de betrekking tusschen spanning en vervorming, indien nog de relatie

$$H = \frac{m+1}{m-1} G$$

wordt ingevoerd,

$$S = e^{-2\epsilon} \cdot S' = 2 \cdot \frac{m+1}{m-1} G \epsilon \cdot e^{-2\epsilon},$$

en omdat het maatgetal ε voor de specifieke rek bij definitie is

$$\varepsilon = \ln \frac{1}{1 - U/r}$$

volgt:

$$S = 2 \frac{m+1}{m-1} G \left(\frac{U}{r} - \frac{5}{2} \left(\frac{U}{r} \right)^2 + \dots \right), \quad (45)$$

Uit de voorwaarde voor het evenwicht in normaalrichting van een wandelement volgt nu bij p als uitwendigen druk per oppervlakteëenheid

$$Sr = -p \frac{(a+h)^2}{4h} \left[1 - \frac{5}{16} \frac{p}{G} \frac{m-1}{m+1} \frac{(a+h)^2}{ah} \cdot \frac{r-a}{r} \right].$$

De spanning S_0 in het middenvlak van den wand is dus

$$S_0 = -p \frac{(a+h)^2}{4ah}. \quad (46)$$

Bij de afleiding van de stabiliteitsvergelijkingen werden die termen, welke van de orde van grootte uU^2 waren, verwaarloosd tegenover termen van de orde van grootte u . Daarom kunnen nu bij de invoering van de spanningen S volgens (45) de termen die in U van den tweeden of hoogerden graad zijn verwaarloosd worden, zoodat in de plaats van (45) gesteld mag worden

$$S = 2 \frac{m+1}{m-1} G \frac{U}{r} = \frac{m+1}{m-1} G \Delta. \quad (45a)$$

Uit (45a) blijkt dat de produkten Sr en Δr voor alle punten van den bol een constante waarde hebben, zoodat

$$S = S_0 \frac{a}{r} \quad (47a)$$

$$\Delta = \Delta_0 \frac{a}{r}. \quad (47b)$$

§ 2 - DE STABILITEITSVERGELIJKINGEN EN HAAR RAND-VOORWAARDEN

a - Opstelling van de stabiliteitsvergelijkingen

De algemeene uitdrukkingen (30) en (39) vereenvoudigen zich in dit bijzonder geval tot:

$$\begin{aligned}
 A_{\vartheta} (S.f) &\equiv -S \left(\frac{\partial \sin \vartheta f_{\vartheta\vartheta}}{\sin \vartheta \partial \vartheta} + \frac{\partial f_{\phi\vartheta}}{\sin \vartheta \partial \varphi} - \cotg \vartheta f_{\phi\phi} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial \omega_{\vartheta\phi}}{\sin \vartheta \partial \varphi} - \omega_{r\vartheta} \right) \\
 A_{\phi} (S.f) &\equiv -S \left(\frac{\partial \sin \vartheta f_{\vartheta\phi}}{\sin \vartheta \partial \vartheta} + \frac{\partial f_{\phi\phi}}{\sin \vartheta \partial \varphi} + \cotg \vartheta f_{\vartheta\phi} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial \omega_{\phi\vartheta}}{\partial \vartheta} + \omega_{\phi r} \right) \\
 A_r (S.f) &\equiv -S \left(-f_{\vartheta\vartheta} - f_{\phi\phi} + \frac{\partial \omega_{r\phi}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \omega_{r\vartheta}}{\sin \vartheta \partial \varphi} + \cotg \vartheta \omega_{r\vartheta} \right) \\
 C_{\vartheta} (\Delta \sigma') &\equiv -(\Delta - \Delta_0) \left(\frac{\partial \sin \vartheta \sigma'_{\vartheta\vartheta}}{\sin \vartheta \partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma'_{\vartheta\phi}}{\sin \vartheta \partial \varphi} - \cotg \vartheta \sigma'_{\phi\phi} \right) \\
 C_{\phi} (\Delta \sigma') &\equiv -(\Delta - \Delta_0) \left(\frac{\partial \sin \vartheta \sigma'_{\phi\vartheta}}{\sin \vartheta \partial \vartheta} + \frac{\partial \sigma'_{\phi\phi}}{\sin \vartheta \partial \varphi} + \cotg \vartheta \sigma'_{\vartheta\vartheta} \right) \\
 C_r (\Delta \sigma') &\equiv (\Delta - \Delta_0) (\sigma'_{\vartheta\vartheta} + \sigma'_{\phi\phi}).
 \end{aligned} \tag{48}$$

Substitutie van (47) en (44) in (48) en daarna van (48) in (38) geeft aanleiding tot de volgende integralen:

$$\begin{aligned}
 \int S r^2 dr &= 2a^2 h S_0 \\
 \int S r dr &= 2ah S_0 \\
 \int S r (r - a) dr &= 0 \\
 \int S (r - a) dr &= -2ah S_0 \times (1 + \frac{2}{3}\epsilon + \dots) \\
 \int S \frac{(r - a)^2}{a} dr &= 2ah S_0 \times (1 + \frac{2}{3}\epsilon + \dots) \\
 \int (\Delta - \Delta_0) r^2 dr &= -2a^2 h \Delta_0 \times \\
 \int (\Delta - \Delta_0) r dr &= 0 \\
 \int (\Delta - \Delta_0) r (r - a) dr &= -2a^2 h \Delta_0 \times \\
 \int (\Delta - \Delta_0) (r - a) dr &= -2ah \Delta_0 \times (1 + \frac{2}{3}\epsilon + \dots) \\
 \int (\Delta - \Delta_0) \frac{(r - a)^2}{a} dr &= 2ah \Delta_0 \times (\frac{2}{3}\epsilon + \dots).
 \end{aligned} \tag{49}$$

Zooals reeds in het vorige hoofdstuk werd opgemerkt is de integraalvorm $I_2(\vartheta, \varphi)$ van de orde van grootte uU en zijn zijn afzonderlijke termen dan ook klein van de orde U tegenover de afzonderlijke termen van den integraalvorm $I_1(\vartheta, \varphi)$, die van de orde van grootte u is. Verder is de grootte κ wegens de dunwandigheid een zeer klein getal. Een en ander is aanleiding het produkt $uU\kappa$ in de stabiliteitsvergelijkingen (40) te verwaarloozen tegenover de overige grootheden, zoodat κ slechts in het produkt $u\kappa$ optreedt.

Hierna blijven van de integralen (49) slechts de eerste twee onverwaarloosd, zoodat (38) overgaat in

$$\frac{1}{2a^2h} \Theta_2(\vartheta, \varphi) \equiv -S_0 \left(\frac{\partial \sin \vartheta}{\sin \vartheta} k_{\vartheta\vartheta} + \frac{\partial k_{\phi\phi}}{\sin \vartheta \partial \varphi} - \cotg \vartheta k_{\phi\phi} + \frac{\partial \omega_{\vartheta\phi}}{\sin \vartheta \partial \varphi} - \omega_{r\vartheta} \right) \quad (50a)$$

$$\frac{1}{2a^2h} \Phi_2(\vartheta, \varphi) \equiv -S_0 \left(\frac{\partial \sin \vartheta}{\sin \vartheta} k_{\vartheta\phi} + \frac{\partial k_{\phi\phi}}{\sin \vartheta \partial \varphi} + \cotg \vartheta k_{\vartheta\phi} + \frac{\partial \omega_{\phi\vartheta}}{\partial \vartheta} + \omega_{\phi r} \right) \quad (50b)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2ah} R_2(\vartheta, \varphi) \equiv & -S_0 \left(-k_{\vartheta\vartheta} - k_{\phi\phi} + \frac{\partial \omega_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \omega_{r\phi}}{\sin \vartheta \partial \varphi} + \cotg \vartheta \omega_{r\vartheta} \right) - \\ & - \Delta_{a+h} p \frac{(a+h)^2}{2ah}. \end{aligned}$$

Door gebruik te maken van (46) kan met inachtnaame van (44) voor den laatsten term geschreven worden

$$\begin{aligned} - \Delta_{a+h} \cdot p \frac{(a+h)^2}{2ah} &= 2S_0 (f_{\vartheta\vartheta} + f_{\phi\phi})_{a+h} = \\ &= 2S_0 \left\{ (k_{\vartheta\vartheta} + k_{\phi\phi}) - \frac{h}{a+h} (l_{\vartheta\vartheta} + l_{\phi\phi}) \right\}. \end{aligned}$$

Omdat het produkt $uU\kappa$ verwaarloosd wordt, kan hierin $\frac{h}{a+h}$ nog vervangen worden door $\frac{h}{a}$. Hierna volgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2ah} R_2(\vartheta, \varphi) \equiv & -S_0 \left(-3k_{\vartheta\vartheta} - 3k_{\phi\phi} + \frac{2h}{a} (l_{\vartheta\vartheta} + l_{\phi\phi}) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial \omega_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \omega_{r\phi}}{\sin \vartheta \partial \varphi} + \cotg \vartheta \omega_{r\vartheta} \right). \quad (50c) \end{aligned}$$

Substitutie van k , l en ω volgens (44) en (42) geeft

$$\frac{1}{2a^2h} \Theta_2(\vartheta, \varphi) \equiv -S_0 \left(\frac{\partial \psi^2}{\partial \vartheta^2} + \cotg \vartheta \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} - \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \psi + \frac{\partial^2 \chi}{\partial \vartheta \partial \varphi} + 2 \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \right) \quad (51a)$$

$$\frac{1}{2a^2h} \Phi_2(\vartheta, \varphi) \equiv -S_0 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\sin \vartheta \partial \vartheta \partial \varphi} + \frac{\cotg \vartheta \partial \psi}{\sin \vartheta \partial \varphi} + \frac{\partial^2 \chi}{\sin \vartheta \partial \varphi^2} + 2 \frac{\partial v}{\sin \vartheta \partial \varphi} \right) \quad (51b)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2ah} R_2(\vartheta, \varphi) \equiv S_0 \left[2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} + \cotg \vartheta \cdot \psi + \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} + 2v \right) + \right. \\ \left. + \left(1 - 2\frac{h}{a} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \vartheta^2} + \cotg \vartheta \frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{\partial^2 v}{\sin^2 \vartheta \partial \varphi^2} + 2v \right) \right]. \quad (51c) \end{aligned}$$

Uit de samenvoeging volgens (40) van de uitdrukkingen (43) en (51) ontstaan de stabiliteitsvergelijkingen.

b - Transformatie van de stabiliteitsvergelijkingen

De vergelijkingen (40a, b), samengesteld uit (43a, b) en (51a, b) worden gedeeld door

$$\frac{2G}{m-1} (1 + \kappa).$$

Bij deeling van (51a, b) door $(1 + \kappa)$ ontstaan in het quotiënt termen van de orde $uU\kappa$, welke reeds hiervoor in verband met de geringe grootte van U en κ werden verwaarloosd, zoodat

$$\frac{1}{1 + \kappa} \Theta_2(\vartheta, \varphi) \propto \Theta_2(\vartheta, \varphi)$$

$$\frac{1}{1 + \kappa} \Phi_2(\vartheta, \varphi) \propto \Phi_2(\vartheta, \varphi).$$

Bij deeling van de funkties (43a, b) door $(1 + \kappa)$ wordt κ als coëfficiënt van ψ en χ verdreven; echter worden aan de gedeelten, die op v betrekking hebben, zekere termen toegevoegd, n.l.

$$\begin{aligned} \text{onder } \Theta_1(\vartheta, \varphi): \quad (m+1) \frac{\partial v}{\partial \vartheta} (-\kappa + \kappa^2 - \dots) + \\ + (\kappa^2 - \kappa^3 + \dots) [\text{functie } (v)], \end{aligned}$$

$$\text{onder } \Phi_1(\vartheta, \varphi) : (m+1) \frac{\partial v}{\sin \vartheta \partial \varphi} (-\kappa + \kappa^2 - \dots) + \\ + (\kappa^2 - \kappa^3 + \dots) [\text{functie } (v)].$$

Daar κ bij den dunnen wand steeds een zeer klein getal is, is $(\kappa^2 - \kappa^3 + \dots)$ verwaarloosbaar tegenover κ , en geeft dus de deeling door $(1 + \kappa)$ onder $\Theta_1(\vartheta, \varphi)$ als nieuwen term

$$-\kappa(m+1) \frac{\partial v}{\partial \vartheta} \text{ en onder } \Phi_1(\vartheta, \varphi) \text{ den term } -\kappa(m+1) \frac{\partial v}{\sin \vartheta \partial \varphi}.$$

Ten slotte worden de stabiliteitsvergelijkingen nog in iets overzichtelijker vorm verkregen, indien de veranderlijke ϑ vervangen wordt door

$$z = \cos \vartheta. \quad (52)$$

Het resultaat van de deeling door $\frac{2G}{m-1}(1+\kappa)$ en de transformatie (52) is

$$\Theta(z, \varphi) \equiv (m+c) \left[(1-z^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - 2z \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{1}{1-z^2} \psi \right] + \\ + \frac{m-1}{2} \left(2\psi + \frac{1}{1-z^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right) - \sqrt{1-z^2} \left[\frac{m+1+2c}{2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial z \partial \varphi} + \right. \\ \left. + (m-1) \frac{z}{1-z^2} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \right] + \sqrt{1-z^2} \left[- (m+1+2c) \frac{\partial v}{\partial z} - \right. \\ \left. - \kappa m \left\{ (1-z^2) \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} + 4z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{1}{1-z^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{2z}{1-z^2} v \right) \right\} \right] = 0 \quad (53a)$$

$$\Phi(z, \varphi) \equiv \frac{m+1+2c}{2} \left(- \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial \varphi} + \frac{z}{1-z^2} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) + (m-1) \frac{z}{1-z^2} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \\ + \sqrt{1-z^2} \left[\frac{m-1}{2} \left\{ (1-z^2) \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} - 4z \frac{\partial \chi}{\partial z} \right\} + (m+c) \frac{1}{1-z^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \varphi^2} \right] + \\ + \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \left[(m+1+2c) \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \kappa m \left\{ (1-z^2) \frac{\partial^3 v}{\partial z^2 \partial \varphi} - 2z \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial \varphi} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{1-z^2} \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^3} \right\} \right] = 0 \quad (53b)$$

$$\begin{aligned}
R(z, \varphi) \equiv & \sqrt{1-z^2} \left[-(m+1+2c) - \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{z}{1-z^2} \psi \right) + \right. \\
& + \kappa m \left\{ -(1-z^2) \frac{\partial^3 \psi}{\partial z^3} + 5z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{2z}{1-z^2} \psi + \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{1-z^2} \left(1 + \frac{\partial^2 (\cdot)}{\partial \varphi^2} \right) \left(-\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{z}{1-z^2} \psi \right) \right\} \right] - \left[(m+1+2c) \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} - \right. \\
& - \kappa m \left\{ (1-z^2) \frac{\partial^3 \chi}{\partial z^2 \partial \varphi} - 2z \frac{\partial^2 \chi}{\partial z \partial \varphi} + 2 \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} + \frac{1}{1-z^2} \frac{\partial^3 \chi}{\partial \varphi^3} \right\} \left. \right] - \\
& - 2(m+1+2c) v - \kappa \left\{ m \left[(1-z^2)^2 \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - 8z(1-z^2) \frac{\partial^3 v}{\partial z^3} - \right. \right. \\
& - 4(1-3z^2) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^4 v}{\partial z^2 \partial \varphi^2} + \frac{1}{(1-z^2)^2} \cdot \left(\frac{\partial^4 v}{\partial \varphi^4} + 4 \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right) \left. \right] + \\
& + (m+1) \left[-(1-z^2) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2z \frac{\partial v}{\partial z} - 2v - \frac{1}{1-z^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right] \left. \right\} + \\
& + c \left(1 - \frac{2h}{a} \right) \left\{ -(1-z^2) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2z \frac{\partial v}{\partial z} - 2v - \frac{1}{1-z^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right\} = 0, \quad (53c)
\end{aligned}$$

waarin de dimensielooze grootheid c gedefinieerd is door

$$c = -\frac{S_0}{G} \frac{m-1}{2}. \quad (54)$$

c - De voorwaarden, waaraan de oplossing moet voldoen

De polen onderscheiden zich in mechanisch opzicht niet van een willekeurig punt van den bolwand, zoodat de verplaatsingen in de omgeving der polen eveneens analytisch moeten zijn.

De functies ψ , χ en v , die aan (53a, b, c) voldoen, zijn in het algemeen functies van φ . In het hier beschouwde geval moet echter worden voldaan aan de voorwaarde dat bij iedere waarde van φ deze functies de componenten van één en dezelfde verplaatsing geven.

Wordt de verplaatsing in zulk een pool ontbonden in een component v normaal op het bolvlak en een component A in het bolvlak, dan volgt voor de verplaatsingscomponente v de voorwaarde

$$\vartheta = 0, \vartheta = \pi : \quad v(\varphi) = \text{constant},$$

of deze randvoorwaarde homogeen in de verplaatsingen formuleerend

$$\vartheta = 0, \vartheta = \pi: \quad \frac{dv(\varphi)}{d\varphi} = 0. \quad (55a)$$

De verplaatsing A moge gericht zijn volgens het meridiaanvlak $\varphi = \varphi_0$ (fig. 6). De componente in de richting van de meridiaan φ is dan

$$\psi(\varphi) = A \cos(\varphi_0 - \varphi),$$

en de componente loodrecht op de meridiaan, dus langs de parallelcirkel in de pool ($\lim \vartheta = 0$), is

$$\sin \vartheta \chi(\varphi) = A \sin(\varphi_0 - \varphi).$$

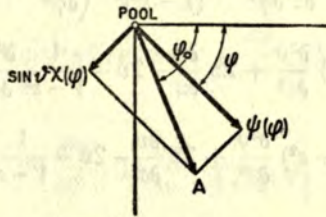


Fig. 6.

Door beurtelings de eerste en de tweede vergelijking te differentieëren naar φ , en deze gedifferentieerde vergelijking te combineren met de andere, kunnen A en φ_0 geëlimineerd worden, zoodat homogene vergelijkingen in ψ en χ overblijven

$$\vartheta = 0, \vartheta = \pi: \quad \psi(\varphi) + \sin \vartheta \frac{d\chi(\varphi)}{d\varphi} = 0 \quad (55b)$$

$$\frac{d\psi(\varphi)}{d\varphi} - \sin \vartheta \chi(\varphi) = 0. \quad (55c)$$

Worden de coördinaten ϑ en φ opgevat als orthogonale rechtlijnige coördinaten dan wordt het boloppervlak op dit coördinatenvlak \sim^2 maal afgebeeld, omdat het punt (ϑ, φ) van het bolvlak correspondeert met alle punten $(\vartheta + 2\pi m, \varphi + 2\pi n)$ van het afbeeldingsvlak, waarbij m en n geheel zijn. De functies ψ , χ en v hebben dus ook in beide veranderlijken de periode 2π .

$$\left. \begin{aligned} \psi(\vartheta + 2\pi m, \varphi + 2\pi n) &\equiv \psi(\vartheta, \varphi) \\ \chi(\vartheta + 2\pi m, \varphi + 2\pi n) &\equiv \chi(\vartheta, \varphi) \\ v(\vartheta + 2\pi m, \varphi + 2\pi n) &\equiv v(\vartheta, \varphi) \end{aligned} \right\} (56)$$

In ieder gebied met de lengteafmeting 2π langs de ϑ -as en 2π langs de φ -as wordt ieder punt van het boloppervlak tweemaal afgebeeld. De functies ψ , χ en v van ϑ en φ bezitten dus behalve de periodiciteit (56) nog een andere symmetrie-eigenschap. De coördinaten ϑ_1 en φ_1 gedefinieerd door

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1 &= 2\pi - \vartheta \\ \varphi_1 &= \pi + \varphi \end{aligned} \right\} (57a)$$

hebben betrekking op hetzelfde punt als de coördinaten ϑ en φ . Terwijl de richtingen door het beschouwde punt, die bepaald zijn door positieve veranderingen van φ en φ_1 , samenvallen, zijn de richtingen, die door positieve veranderingen van ϑ en ϑ_1 bepaald zijn, tegengesteld, zoodat

$$\left. \begin{aligned} \psi(\vartheta_1, \varphi_1) &\equiv -\psi(\vartheta, \varphi) \\ \chi(\vartheta_1, \varphi_1) &\equiv \chi(\vartheta, \varphi) \\ v(\vartheta_1, \varphi_1) &\equiv v(\vartheta, \varphi) \end{aligned} \right\} (57b)$$

De vergelijkingen worden echter, inplaats van op de veranderlijke ϑ , betrokken op de veranderlijke z , die door (52) wordt gedefinieerd. Voor z komen nu nog slechts de waarden $+1 \geq z \geq -1$ in aanmerking. Het boloppervlak, afgebeeld op het z - φ -vlak, dat z en φ tot orthogonale rechtlijnige coördinaten heeft, beslaat nu een strook, die in z -richting begrensd is, n.l. de lengte 2 bezit, en zich in φ -richting tot in het oneindige uitstrekt. Het punt (z, φ) herhaalt zich in deze afbeelding oneindigvoudig in de punten $(z, \varphi + 2\pi n)$. De voorwaarden (56) blijven dan ook alleen in dezen vorm van kracht wat betreft de periodiciteit in φ .

$$\left. \begin{aligned} \psi(z, \varphi + 2\pi n) &\equiv \psi(z, \varphi) \\ \chi(z, \varphi + 2\pi n) &\equiv \chi(z, \varphi) \\ v(z, \varphi + 2\pi n) &\equiv v(z, \varphi) \end{aligned} \right\} (56a)$$

Omdat bij gegeven waarde van z niet bepaald is welke der grootheden $\vartheta + 2\pi m$ of $2\pi - \vartheta$ in het bijzonder bedoeld is, kunnen de

voorwaarde (56) voorzover zij op ϑ betrekking heeft, en de voorwaarde (57) niet zonder meer op z worden overgedragen. Daarom zal, bij het invoeren van de voorwaarden (56) en (57), de verkregen uitkomst worden teruggeschreven in ϑ .

§ 3 - ALGEMEENE KENMERKEN VAN DE OPLOSSING

De stabiliteitsvergelijkingen (53) en de voorwaarden (55), (56) en (57), waaraan haar oplossingen moeten voldoen, zijn in de onbekenden ψ , χ en v homogeen. Bij elke waarde van den belastenden druk p , dus bij iedere waarde van c , voldoet daarom de triviale oplossing

$$\psi = \chi = v = 0.$$

Slechts bij zeer bepaalde waarden van c , de eigenwaarden van het probleem, bestaan van nul verschillende oplossingen, de eigenfuncties. Deze oplossingen zijn, omdat de vergelijkingen homogeen zijn, bepaald op een constante factor na. Juist in deze onbepaaldheid van de absolute grootte der vervormingen ligt het eigensoortige van den elastischen-kniktoestand.

De kleinste eigenwaarde van de stabiliteitsvergelijkingen bepaalt de grens beneden welke geen knik mogelijk is. Het stabiliteitsprobleem stelt dan ook in het bijzonder de vraag naar de kleinste eigenwaarde, die zich uit het geheele systeem van eigenwaarden laat berekenen, nadat dit laatste door het systeem van eigenfuncties bepaald is. Het zoeken van de oplossing begint daarom met de bepaling van de eigenfuncties.

In deze § zal worden besproken, welke algemeene eigenschappen van de eigenfuncties, wat betreft haar afhankelijkheid van z en φ , onmiddellijk uit den vorm der differentiaalvergelijkingen (53) kunnen worden afgeleid. Van beteekenis voor dit onderzoek is de wijze waarop van ieder der functies ψ , χ en v de differentiaalquotiënten naar z en φ in de stabiliteitsvergelijkingen voorkomen.

Volgens de orde van de afgeleiden der verplaatsingen naar φ kunnen alle differentiaalquotiënten worden geteld. Het overzicht wordt vergemakkelijkt door het resultaat van deze telling in tabelvorm samen te vatten:

	ψ	χ	v
Θ	0 ; 2	1	0 ; 2
Φ	1	0 ; 2	1 ; 3
R	0 ; 2	1 ; 3	0 ; 2 ; 4

Deze tabel heeft in haar rijen betrekking op de 3 differentiaalvergelijkingen (53, a , b , c); ieder der kolommen heeft betrekking op één der verplaatsingscomponenten. De getallen in de rij van de differentiaalvergelijking I en in de kolom van de verplaatsing u geven aan van welke orden de differentiaalquotiënten naar φ zijn, die de differentiaalvergelijking I in de verplaatsing u bevat.

Uit dit schema blijkt dat de orden der differentiaalquotiënten naar φ van een bepaalde verplaatsing in een bepaalde differentiaalvergelijking steeds even bedragen verschillen; terwijl verder, indien χ als differentiaalquotiënt van oneven orde voorkomt, ψ en v daarentegen als differentiaalquotiënten van even orde optreden, en omgekeerd.

Langs een parallelcirkel moeten de functies ψ , χ en v volgens (56) in φ de periode 2π bezitten, zoodat zij in FOURIER-reeksen volgens veelvoudigen van φ ontwikkelbaar moeten zijn. Langs iederen parallelcirkel zijn deze functies op die wijze ontwikkelbaar; echter behoort bij iederen parallelcirkel in het algemeen een ander stel coëfficiënten van de FOURIER-reeks. Deze coëfficiënten zijn daarom functies van z . De oplossing moet dan van den vorm zijn:

$$\begin{aligned}
 \psi(z, \varphi) &= \sum_{k=0}^{\infty} [a_k(z) \cos k\varphi + b_k(z) \sin k\varphi] \\
 \chi(z, \varphi) &= \sum_{k=0}^{\infty} [c_k(z) \cos k\varphi + d_k(z) \sin k\varphi] \\
 v(z, \varphi) &= \sum_{k=0}^{\infty} [e_k(z) \cos k\varphi + f_k(z) \sin k\varphi].
 \end{aligned}
 \tag{58}$$

Substitutie van (58) in (53) geeft, zooals volgt uit de bovenstaande beschouwingen over de wijze van voorkomen der differentiaal-quotienten naar φ ,

$$\Theta(z, \varphi) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} [D_{\vartheta}(k, a_k(z), d_k(z), e_k(z)) \cos k\varphi + D_{\vartheta}(k, b_k(z), -c_k(z), f_k(z)) \sin k\varphi] = 0$$

$$\Phi(z, \varphi) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} [D_{\phi}(k, a_k(z), d_k(z), e_k(z)) \sin k\varphi + D_{\phi}(k, -b_k(z), c_k(z), -f_k(z)) \cos k\varphi] = 0$$

$$R(z, \varphi) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} [D_r(k, a_k(z), d_k(z), e_k(z)) \cos k\varphi + D_r(k, b_k(z), -c_k(z), f_k(z)) \sin k\varphi] = 0,$$

waarin D_{ϑ} , D_{ϕ} en D_r bepaalde differentiaaloperatoren van z zijn, en waaraan alleen voldaan wordt, indien voor iedere waarde van k geldt:

$$\left. \begin{aligned} D_{\vartheta}(k, a_k(z), d_k(z), e_k(z)) &= 0 \\ D_{\phi}(k, a_k(z), d_k(z), e_k(z)) &= 0 \\ D_r(k, a_k(z), d_k(z), e_k(z)) &= 0 \end{aligned} \right\} (59a)$$

$$\left. \begin{aligned} D_{\vartheta}(k, b_k(z), -c_k(z), f_k(z)) &= 0 \\ D_{\phi}(k, -b_k(z), c_k(z), -f_k(z)) &= 0 \\ D_r(k, b_k(z), -c_k(z), f_k(z)) &= 0. \end{aligned} \right\} (59b)$$

De functies $a_k(z)$, $d_k(z)$ en $e_k(z)$ welke de algemeene oplossing vormen van de simultane homogene vergelijkingen (59a) zullen tevens de algemeene oplossing van (59b) geven, op zoodanige wijze dat

$$\begin{aligned} b_k(z) &= \lambda a_k(z) \\ c_k(z) &= -\lambda d_k(z) \\ f_k(z) &= \lambda e_k(z), \end{aligned}$$

waarin λ een willekeurige constante is.

De in φ met 2π periodieke oplossing van (53) is daarom

$$\begin{aligned}
 \psi(z, \varphi) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z) (\cos k\varphi + \lambda \sin k\varphi) = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(z) \cos k(\varphi - \alpha_k) \\
 \chi(z, \varphi) &= \sum_{k=0}^{\infty} d_k(z) (\sin k\varphi - \lambda \cos k\varphi) = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \chi_k(z) \sin k(\varphi - \alpha_k) \\
 v(z, \varphi) &= \sum_{k=0}^{\infty} e_k(z) (\cos k\varphi + \lambda \sin k\varphi) = \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} v_k(z) \cos k(\varphi - \alpha_k) \quad ,
 \end{aligned} \tag{60}$$

waarin α_k een willekeurige hoek is.

Ter bepaling van de funkties $\psi_k(z)$, $\chi_k(z)$ en $v_k(z)$ dienen de homogene differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases}
 D_{\vartheta}(k, \psi_k(z), \chi_k(z), v_k(z)) = 0 \\
 D_{\phi}(k, \psi_k(z), \chi_k(z), v_k(z)) = 0 \\
 D_r(k, \psi_k(z), \chi_k(z), v_k(z)) = 0
 \end{cases} \tag{61}$$

die deze funkties tot op een constante factor bepalen.

Substitutie van (60), waarin nu z door $\cos \vartheta$ vervangen is, in de voorwaarden (55), (56) en (57) geeft, omdat deze voorwaarden lineair zijn in ψ , χ en v steeds aanleiding tot vergelijkingen van den vorm

$$\sum_{k=0}^{\infty} [F_k(\vartheta) \cos k(\varphi - \alpha_k) + G_k(\vartheta) \sin k(\varphi - \alpha_k)] = 0,$$

waaraan alleen voldaan wordt, indien voor iedere k $F_k(\vartheta)$ en $G_k(\vartheta)$ gelijk nul zijn. De voorwaarden, waaraan de volledige oplossing, dus gesommeerd over k , moet voldoen, gelden dan ook voor ieder stel afzonderlijke functies $\psi_k(\vartheta)$, $\chi_k(\vartheta)$ en $v_k(\vartheta)$ ¹⁾, of $\psi_k(z)$, $\chi_k(z)$ en $v_k(z)$.

De drie vergelijkingen (61) met de voorwaarden, waaraan hun oplossing voldoen moet, die voor een bepaalde waarde van k gelden, hebben zekere eigenfuncties en bijbehorende eigenwaarden c . Ieder van deze eigenfuncties vertegenwoordigt een mogelijken knikvorm. Een knikvorm kan uit meerdere eigenfuncties, welke bij verschillende waarden van k behooren, zijn samengesteld, indien slechts de bij deze eigenfuncties behorende eigenwaarden dezelfde zijn. Het is echter uitgesloten dat er oplossingen van den vorm (60) zouden bestaan, welke niet uit deze eigenfuncties zouden zijn samengesteld, omdat de voorwaarden (55), (56) en (57), welke noodzakelijk aan de algemeene oplossing (60) gesteld zijn, even noodzakelijk gesteld worden aan ieder der afzonderlijke samenstellende functies. Het volledig systeem van eigenfuncties wordt daarom gevormd door

$$\left. \begin{aligned} \psi_k(z, \varphi) &= \psi_k(z) \cos k(\varphi - \alpha_k) \\ \chi_k(z, \varphi) &= \chi_k(z) \sin k(\varphi - \alpha_k) \\ v_k(z, \varphi) &= v_k(z) \cos k(\varphi - \alpha_k). \end{aligned} \right\} k = 0, 1, 2, \dots \quad (62)$$

Om een inzicht te verkrijgen in het karakter der functies

$$\psi_k(z), \chi_k(z) \text{ en } v_k(z)$$

verdient het aanbeveling terug te keeren tot de veranderlijke ϑ , waarbij de periodiciteitsvoorwaarden (56) en (57) tot het trekken van zekere conclusies in staat stellen.

Geschreven als functies van ϑ en φ zijn de eigenfuncties

$$\left. \begin{aligned} \psi_k(\vartheta, \varphi) &= \psi_k(\vartheta) \cos k(\varphi - \alpha_k) \\ \chi_k(\vartheta, \varphi) &= \chi_k(\vartheta) \sin k(\varphi - \alpha_k) \\ v_k(\vartheta, \varphi) &= v_k(\vartheta) \cos k(\varphi - \alpha_k) \end{aligned} \right\} k = 0, 1, 2, \dots \quad (62a)^1$$

1) Het funktieteecken ψ_k , v_k , χ_k heeft hier niet dezelfde beteekenis als in (60).

Uit de periodiciteitsvoorwaarde (56) volgt, dat langs iedere meridiaan de functies (62a) ontwikkelbaar moeten zijn in FOURIER-reeksen van het type

$$u_k(\vartheta) = \sum_{m=0}^{\infty} (a_{km} \cos m\vartheta + b_{km} \sin m\vartheta),$$

of anders geschreven

$$u_k(\vartheta) = \sum_{m=0}^{\infty} c_{km} \cos m\vartheta + \sin \vartheta \sum_{m=0}^{\infty} d_{km} \cos m\vartheta.$$

De uitdrukkingen (62a) gaan dan over in

$$\left. \begin{aligned} \psi_k(\vartheta, \varphi) &= \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} A_{km} \cos m\vartheta + \sin \vartheta \sum_{m=0}^{\infty} B_{km} \cos m\vartheta \right\} \cos k(\varphi - \alpha_k) \\ \chi_k(\vartheta, \varphi) &= \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} C_{km} \cos m\vartheta + \sin \vartheta \sum_{m=0}^{\infty} D_{km} \cos m\vartheta \right\} \sin k(\varphi - \alpha_k) \\ v_k(\vartheta, \varphi) &= \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} E_{km} \cos m\vartheta + \sin \vartheta \sum_{m=0}^{\infty} F_{km} \cos m\vartheta \right\} \cos k(\varphi - \alpha_k). \end{aligned} \right\} (63)$$

Substitutie van (63) in (57b) geeft, indien tevens ϑ_1 en φ_1 met behulp van (57a) geëlimineerd worden:

$$\left. \begin{aligned} &\left\{ \sum_{m=0}^{\infty} A_{km} \cos m\vartheta - \sin \vartheta \sum_{m=0}^{\infty} B_{km} \cos m\vartheta \right\} (-1)^k \cos k(\varphi - \alpha_k) \equiv \\ &\equiv - \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} A_{km} \cos m\vartheta + \sin \vartheta \sum_{m=0}^{\infty} B_{km} \cos m\vartheta \right\} \cos k(\varphi - \alpha_k) \\ &\left\{ \sum_{m=0}^{\infty} C_{km} \cos m\vartheta - \sin \vartheta \sum_{m=0}^{\infty} D_{km} \cos m\vartheta \right\} (-1)^k \sin k(\varphi - \alpha_k) \equiv \\ &\equiv \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} C_{km} \cos m\vartheta + \sin \vartheta \sum_{m=0}^{\infty} D_{km} \cos m\vartheta \right\} \sin k(\varphi - \alpha_k) \end{aligned} \right\} (64)$$

$$\left. \begin{aligned} & \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} E_{km} \cos m\vartheta - \sin \vartheta \sum_{m=0}^{\infty} F_{km} \cos m\vartheta \right\} (-1)^k \cos k(\varphi - \alpha_k) \equiv \\ & \equiv \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} E_{km} \cos m\vartheta + \sin \vartheta \sum_{m=0}^{\infty} F_{km} \cos m\vartheta \right\} \cos k(\varphi - \alpha_k). \end{aligned} \right\} (64)$$

Indien $k = 2n$ kan aan (64) alleen voldaan worden bij

$$A_{km} = D_{km} = F_{km} = 0,$$

en indien $k = 2n + 1$ volgt uit (64)

$$B_{km} = C_{km} = E_{km} = 0.$$

In verband hiermee volgt uit (63) onder wederinvoering van de veranderlijke z :

$$\left. \begin{aligned} k = 2n : \quad \psi_k(z) &= \sqrt{1-z^2} \times \text{machtreeks in } z \\ \chi_k(z) &= \text{machtreeks in } z \\ v_k(z) &= \text{machtreeks in } z \end{aligned} \right\} (65a)$$

$$\left. \begin{aligned} k = 2n + 1 : \quad \psi_k(z) &= \text{machtreeks in } z \\ \chi_k(z) &= \sqrt{1-z^2} \times \text{machtreeks in } z \\ v_k(z) &= \sqrt{1-z^2} \times \text{machtreeks in } z. \end{aligned} \right\} (65b)$$

Indien de machtreeksen in z , uit welke de functies $\psi_k(z)$, $\chi_k(z)$ en $v_k(z)$ kunnen worden samengesteld, veeltermen zijn resp. van den graad p , q , r en met de coëfficiënten A , B , C , kan worden aangegeven welk verband bestaat tusschen de graadgetallen p , q en r .

Voor de beschouwingen, met behulp waarvan dit verband wordt vastgesteld, is in het bijzonder van beteekenis van welken graad de bijdrage is, die ieder der functies ψ , χ en v in ieder der differentiaalvergelijkingen levert. Deze graad wordt bepaald door de orde van de differentiaaloperatoren die voorkomen, en verder door den graad van de functie van z , met welke de differentiaaloperator als produkt optreedt. In het volgende schema wordt de graad van iedere groep van differentiaalquotienten, betrekking hebbend op eenzelfde functie ψ , χ of v , gekarakteriseerd door dezen te verge-

lijken met den graad van de verplaatsing, waarop die groep betrekking heeft: b.v. wordt met

$$\frac{\sqrt{1-z^2}}{z} \cdot \chi$$

in de 1ste rij van onderstaand schema bedoeld, dat, indien de χ -groep uit de differentiaalvergelijking (61a) en χ beide uitgeschreven worden volgens afdalende machten van z , de eerste term van de χ -groep, behoudens zijn coëfficiënt, gelijk is aan

$$\frac{\sqrt{1-z^2}}{z} \times \text{de eerste term van } \chi.$$

$D_\psi(z)$	ψ	$\frac{\sqrt{1-z^2}}{z} \cdot \chi$	$\frac{\sqrt{1-z^2}}{z} \cdot v$
$D_\phi(z)$	$\frac{1}{z} \psi$	$\sqrt{1-z^2} \cdot \chi$	$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \cdot v$
$D_r(z)$	$\frac{\sqrt{1-z^2}}{z} \cdot \psi$	χ	v

Na substitutie van de uit veeltermen samengestelde oplossing wordt ieder der drie functies ψ , χ en v in de drie differentiaalvergelijkingen door veeltermen vertegenwoordigd, waarvan de graadgetallen op de volgende wijze met p , q en r samenhangen.

$$k = 2n :$$

$D_\psi(z)$	$\sqrt{1-z^2} A_p z^p$	$\sqrt{1-z^2} B_q z^{q-1}$	$\sqrt{1-z^2} C_r z^{r-1}$
$D_\phi(z)$	$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} A_p z^{p+1}$	$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} B_q z^{q+2}$	$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} C_r z^r$
$D_r(z)$	$A_p z^{p+1}$	$B_q z^q$	$C_r z^r$

$$k = 2n + 1 :$$

$D_\psi(z)$	$A_p z^p$	$B_q z^{q+1}$	$C_r z^{r+1}$
$D_\phi(z)$	$A_p z^{p-1}$	$B_q z^{q+2}$	$C_r z^r$
$D_r(z)$	$\sqrt{1-z^2} \cdot A_p z^{p-1}$	$\sqrt{1-z^2} \cdot B_q z^q$	$\sqrt{1-z^2} \cdot C_r z^r$

Indien op deze wijze (61) tot oplossing kan worden gebracht, moet het resultaat van de substitutie der veeltermen in (61) iden-

tiek nul zijn, zoodat ook de coëfficiënt, die behoort bij den term van den hoogsten graad, nul moet zijn, Opdat deze voorwaarde niet onmiddellijk beteekenen zal dat A_p , B_q of C_r gelijk is aan nul, zal deze coëfficiënt tenminste twee der grootheden A_p , B_q en C_r moeten bevatten.

Opdat $B_q \neq 0$ zij, mag, in het geval van even k blijkens de tweede rij van het desbetreffend schema, de exponent $q + 2$ van z niet grooter zijn dan de grootste der exponenten $p + 1$ en r . Hieruit volgt dat $q - 1$ steeds kleiner is dan $p - 1$ en $r - 2$. Dan moet volgens de eerste rij en ook volgens de 3de rij van het schema, daar B_q niet optreedt in de coëfficiënt van de hoogste macht van z :

$$p = r - 1.$$

En daar $q + 2$ ten hoogste gelijk is aan r kan algemeen geschreven worden

$$q = r - 2.$$

Op overeenkomstige wijze geeft het schema voor

$$k = 2n + 1 : p = r + 1, q = r - 2.$$

Hierna gaat (65) over in:

$$\begin{array}{l}
 k = 2n : \quad \psi_k(z) = \sqrt{1-z^2} \sum_{t=0}^{r-1} A_t z^t \\
 \quad \quad \quad \chi_k(z) = \sum_{t=0}^{r-2} B_t z^t \\
 \quad \quad \quad v_k(z) = \sum_{t=0}^r C_t z^t
 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \psi_k(z) \\ \chi_k(z) \\ v_k(z) \end{array}} \right\} (66a)$$

$$\begin{array}{l}
 k = 2n + 1 : \quad \psi_k(z) = \sum_{t=0}^{r+1} A_t z^t \\
 \quad \quad \quad \chi_k(z) = \sqrt{1-z^2} \sum_{t=0}^{r-2} B_t z^t
 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \psi_k(z) \\ \chi_k(z) \end{array}} \right\} (66b)$$

$$v_k(z) = \sqrt{1-z^2} \sum_{t=0}^r C_t z^t \quad \left. \vphantom{\sum} \right\} (66b)$$

Tenslotte kan nog in het algemeen worden opgemerkt, dat blijkens (53) de graad van de afzonderlijke termen van eenzelfde differentiaalvergelijking, wat betreft z , steeds even bedragen verschilt. Hieruit volgt een verdere conclusie ten opzichte van de wijze, waarop de oplossing van z afhankelijk is.

Substitutie van (66) in (61) levert veeltermen op, waarvan de coëfficiënten homogeen zijn in A , B en C . De voorwaarde, dat deze veeltermen identiek nul zijn, legt een verband tusschen diè coëfficiënten A , B en C , welke gezamenlijk de coëfficiënt van een term van den veelterm vormen. Door de genoemde eigenschap van de differentiaalvergelijkingen zullen de coëfficiënten A_t , enz. slechts met coëfficiënten A_{t+2m} , enz. gecombineerd voorkomen, zoodat de differentiaalvergelijkingen alleen de relatie leggen tusschen de coëfficiënten welker t 's even bedragen verschillen. Hieruit volgt dat de veeltermen of machtreksen, uit welke de oplossing is samengesteld, òf slechts even, òf slechts oneven machten van z zullen bevatten.

$$t = 2s \quad \text{of} \quad t = 2s + 1. \quad (67)$$

De homogene lineaire vergelijkingen in A, B, C , welke verkregen worden uit de gelijk nul gestelde coëfficiënten van de drie veeltermen, die door substitutie van (66) in (61) ontstaan, zijn recursievergelijkingen, welke principieel in staat stellen de coëfficiënten achtereenvolgens te berekenen. Hierbij doen zich echter de moeilijkheden gevoelen, dat 1° de recursiebetrekkingen gecompliceerd zijn, 2° het aantal recursievergelijkingen dat van het aantal onbekende coëfficiënten overtreft. Daar voor een van nul verschillende oplossing vereischt is, dat het aantal onafhankelijke recursievergelijkingen gelijk is aan het aantal der onbekenden moet één van tweeën het geval zijn: *a*) de oplossing kan gegeven worden door middel van veeltermen, omdat het systeem van recursiebetrekkingen een voldoende aantal afhankelijke vergelijkingen bevat; *b*) de oplossing kan niet gegeven worden met veeltermen, doch moet met machtreksen verkregen worden.

In verband met de onoverzichtelijkheid der recursiebetrekkingen wordt er van afgezien hen op afhankelijkheid te onderzoeken. In het volgende hoofdstuk zal, onder gebruikmaking van de resultaten, die in deze § gewonnen werden, op geheel andere wijze de mogelijkheid van oplossing der differentiaalvergelijkingen worden gezien.

HOOFDSTUK IV

KNIKVORMEN, VERWANT AAN DE REGELMATIGE VEELVLAKKEN

§ 1 - DE BETEKENIS VAN DE REGELMATIGE VEELVLAKKEN VOOR HET KNIKPROBLEEM

In hoofdstuk III, § 4 konden reeds eenige opmerkingen gemaakt worden over den vorm, dien de oplossing der differentiaalvergelijkingen zal kunnen bezitten. Deze opmerkingen werden aan de hand gedaan door beschouwingen over den bouw van de differentiaalvergelijkingen. Hoewel de methode, die tenslotte de algemeene oplossing van het probleem zal leveren, eveneens slechts van analytische hulpmiddelen gebruik maakt, werd zij eerst ontwikkeld nadat een eigenschap, welke achteraf bleek algemeene geldigheid te bezitten, geconstateerd werd aan enkele speciale knikvormen, die uit overwegingen van geometrisch karakter werden afgeleid. De bespreking van deze knikvormen gaat aan die der algemeene oplossingsmethode vooraf.

Door ZOELLY en SCHWERIN is een systeem van axiaal symmetrische knikvormen aangegeven. Deze knikvormen zijn hierdoor gekenmerkt, dat zij rotatorisch symmetrisch zijn en dus één enkele symmetrie-as bezitten. Naast deze knikvormen laten zich andere denken, die meerdere symmetrie-assen hebben. Daar zoowel ten opzichte van den bolwand in onuitgeknikten toestand, als ten opzichte van het belastend krachtenveld alle richtingen gelijkwaardig zijn, kunnen onder alle mogelijke knikvormen ook zulke verwacht worden, waarbij meerdere symmetrie-assen optreden, die regelmatig ten opzichte van elkaar gegroepeerd zijn.

In verband hiermee ligt het voor de hand te onderzoeken of knikvormen mogelijk zijn, waarbij de vlakken van symmetrie in aantal en stand overeenkomen met de symmetrievlakken der regelmatige veelvlakken. Zulke knikvormen zullen den bolwand

doen overgaan in een lichaam, dat vergeleken met den bol zòodanig uitbuitingen en indeukingen vertoont, dat punten met maximale uitbuiting gelegen zijn in de hoekpunten van het betreffende regelmatig veelvlak, terwijl de punten met maximale indeuking gevonden worden in de punten, die correspondeeren met de zwaartepunten der zijvlakken van dit zelfde veelvlak.

In onderstaande tabel zijn betreffende de polyeders de gegevens vereenigd, welke op dit oogenblik van belang zijn.

Regelmatige veelvlakken	Aantal hoekpunten	Aantal zijvlakken
viervlak	4	4
zesvlak	8	6
achtvlak	6	8
twaalfvlak	20	12
twintigvlak	12	20

De knikvormen, die kunnen worden afgeleid uit reciproke veelvlakken (het zesvlak en het achtvlak, resp. het twaalfvlak en het twintigvlak) zijn identiek. Immers is de absolute waarde van de verplaatsingen voor het knikprobleem niet essentieel, zoodat b.v. het 8-tal indeukingen bij knik volgens het achtvlak door vermenigvuldiging van de verplaatsingen met een negatief getal wordt veranderd in een 8-tal uitbuitingen, dat met den knikvorm volgens het zesvlak overeenkomt.

Uit de veelvlakken laten zich dus slechts 3 verschillende knikvormen, of eventueel 3 groepen van knikvormen ontwikkelen. In de volgende §§ vinden deze gevallen afzonderlijke behandeling.

§ 2 – METHODE VOOR DE BEPALING DER POLYEDRISCHE VERVORMINGEN

a – Algemeene symmetrievoorwaarden

De verplaatsingen van de punten van den bolwand zullen op de minst gecompliceerde wijze analytisch beschreven kunnen worden, indien het bijbehorende veelvlak zoodanig in het coördi-

natensysteem XYZ (fig. 7) is geplaatst, dat de coördinaatvlakken samenvallen met symmetrie- of antisymmetrievlakken. Ten opzichte van het punt waar de Z -as het boloppervlak snijdt bezit het polyedrisch oppervlak dan een zekere symmetrie, welke aanwijzingen geeft over de manier, waarop de verplaatsingen van de punten op een parallelcirkel afhankelijk zijn van φ .

De verplaatsingen u worden met XYZ als uitgangs-coördinatenstelsel beschreven door de coördinaten ϑ en φ met de vergelijkingen

$$u = u(\vartheta, \varphi) \quad u = \psi, \chi, v. \quad (68)$$

Het punt Z , waar de Z -as het boloppervlak snijdt, herhaalt zich in andere punten van den bol, zoodat uit deze punten de vervormde bolwand onder volkomen hetzelfde beeld gezien wordt als uit Z . Een coördinatenstelsel $X_1Y_1Z_1$, waarvan de Z_1 -as het boloppervlak in Z_1 snijdt, en dat een gelijke oriëntering ten opzichte van het veelvlak bezit als XYZ , is volkomen met dit laatste systeem gelijkwaardig. De verplaatsingen u_1 ten opzichte van dit nieuwe coördinatenstelsel worden daarom in de bijbehorende coördinaten ϑ_1 en φ_1 gegeven door

$$u_1 = u_1(\vartheta_1, \varphi_1) \equiv u(\vartheta_1, \varphi_1) \quad u_1 = \psi_1, \chi_1, v_1. \quad (69)$$

waarin wegens de gelijkwaardigheid der beide systemen u hetzelfde funktieteeken is als in (68).

De onderlinge stand van de systemen XYZ en $X_1Y_1Z_1$ is bekend, zoodat de transformatieformules

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1 &= \vartheta_1(\vartheta, \varphi) \\ \varphi_1 &= \varphi_1(\vartheta, \varphi) \end{aligned} \right\} (70)$$

bepaald kunnen worden.

Invoering van (70) in (69) geeft, den eisch van gelijkwaardigheid der beide coördinatenstelsels nog buiten beschouwing latend,

$$u_1 = u_1[\vartheta_1(\vartheta, \varphi), \varphi_1(\vartheta, \varphi)] \quad u_1 = \psi_1, \chi_1, v_1, \quad (71)$$

waarmede de verplaatsingen u_1 als funktie van ϑ en φ gegeven worden.

Tusschen de verplaatsingen u en u_1 bestaan betrekkingen van geometrischen aard, die uit (70) kunnen worden afgeleid, en op

welker bijzonderen vorm in enkele gevallen nader zal worden ingegaan. Algemeen kan geschreven worden

$$u_1 = U(\psi, \chi, v) \quad u_1 = \psi_1, \chi_1, v_1. \quad (72)$$

Nadat (68) in het tweede lid van (72) geësubstitueerd is volgt u_1 als functie van ϑ en φ , zoodat uit de gegeven functie (68) de getransformeerde $u_1(\vartheta_1, \varphi_1)$ volgt. De bijzondere voorwaarde welke nu aan de functie u gesteld wordt door de gelijkwaardigheid der beide systemen is, dat het funktieteken u_1 identiek is met u , zooals reeds door (69) is uitgedrukt

$$U[\psi(\vartheta, \varphi), \chi(\vartheta, \varphi), v(\vartheta, \varphi)] \equiv u[\vartheta_1(\vartheta, \varphi), \varphi_1(\vartheta, \varphi)] \quad (73)$$

$u = \psi, \chi, v.$

Indien de functies u aan de voorwaarden (73) voldoen, bezitten zij alle symmetrie-eigenschappen van de veelvlakken. Immers kan door een rotatie, gelijk aan die, welke het systeem XYZ in den stand $X_1Y_1Z_1$ bracht, het systeem $X_1Y_1Z_1$ op zijn beurt tot dekking gebracht worden met een systeem $X_2Y_2Z_2$, van waaruit de verplaatsingen op gelijke wijze worden gezien. Achtereenvolgens worden zoo alle in aanmerking komende standen van het coördinatensysteem verkregen.

Waar de transformatie minder eenvoudig is, zooals b.v. bij het onder § 5 te behandelen geval, is het mogelijk deze in meerdere elementaire transformaties te ontleden. Deze meer elementaire transformaties zijn, zooals t.a.p. nader zal worden aangetoond, de volgende drie:

a) een draaiing om de Z -as, waarbij

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1 &= \vartheta \\ \varphi_1 &= \varphi + \omega. \end{aligned} \right\} (74)$$

Het rechtsdraaiend systeem XYZ blijft hierbij rechtsdraaiend.

b) een verwisseling van de assen Y en Z met Z_1 en Y_1 , waarbij het systeem van rechtsdraaiend overgaat in een linksdraaiend.

In figuur 7 zijn de coördinaten van het punt P in de beide coördinatenstelsels ϑ, φ en ϑ_1, φ_1 aangegeven. De transformatieformules blijken te zijn:

$$\left. \begin{aligned} \cos \vartheta_1 &= \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta &= \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1, \end{aligned} \right\} (75a)$$

of in plaats van de laatste in verband met (75a):

$$\sin \varphi_1 = \frac{\cos \vartheta}{\sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi}}. \quad (75b)$$

c) een verwisseling van de assen X en Y met Y_1 en X_1 , welke

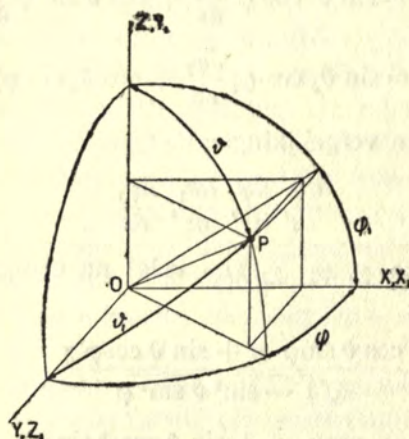


Fig. 7.

noodig is om het bij de transformatie b ingevoerde linksdraaiende systeem weder in een rechtsdraaiend over te voeren. Hierbij geldt:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_1 &= \vartheta \\ \varphi_1 &= \frac{\pi}{2} - \varphi. \end{aligned} \right\} (76)$$

Over den vorm van (72) in deze gevallen kan het volgende worden opgemerkt.

In geval a is

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \psi \\ \chi_1 &= \chi \\ v_1 &= v, \end{aligned} \right\} (77)$$

omdat de richtingen waarin de coördinaten ϑ_1 en φ_1 toenemen dezelfde zijn als bij de coördinaten ϑ en φ .

In geval b kan het verband tusschen ψ en $\sin \vartheta \cdot \chi$ eenerzijds en ψ_1 met $\sin \vartheta_1 \cdot \chi_1$ anderzijds gevonden worden door gebruik te maken van de opmerking dat dit verband hetzelfde is als dat,

hetwelk bestaat tusschen de elementaire componenten $d\vartheta$, $\sin \vartheta d\varphi$ en $d\vartheta_1$, $\sin \vartheta_1 d\varphi_1$ van een lijnelement ds , dat dezelfde richting heeft als de resulterende verplaatsing in het bolvlak.

Door differentiatie van (75) naar s volgt

$$\begin{aligned} -\sin \vartheta_1 \frac{d\vartheta_1}{ds} &= \sin \vartheta \cos \varphi \frac{d\varphi}{ds} + \cos \vartheta \sin \varphi \frac{d\vartheta}{ds} \\ -\sin \vartheta \frac{d\vartheta}{ds} &= \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 \frac{d\varphi_1}{ds} + \cos \vartheta_1 \sin \varphi_1 \frac{d\vartheta_1}{ds}. \end{aligned}$$

Worden in deze vergelijkingen

$$\frac{d\vartheta}{ds}, \frac{d\varphi}{ds}, \frac{d\vartheta_1}{ds}, \frac{d\varphi_1}{ds}$$

vervangen door ψ , χ , ψ_1 , χ_1 zoo volgt na eenige herleiding met behulp van (75)

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= - \frac{\cos \vartheta \sin \varphi \psi + \sin \vartheta \cos \varphi \chi}{\sqrt{1 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi}} \\ \chi_1 &= \frac{-\cos \varphi \psi + \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi \chi}{1 - \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi} \end{aligned} \right\} (78a, b)$$

Verder geldt ook hier

$$v_1 = v. \quad (78c)$$

Geval c tenslotte geeft

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \psi \\ \chi_1 &= -\chi \\ v_1 &= v. \end{aligned} \right\} (79)$$

b - Analyse van de symmetrische funkties

De identiteit (69) is de eenige noodzakelijke voorwaarde, welke op grond van de vereischte symmetrie gesteld kan worden.

Het kan niet verwacht worden dat door den symmetrie-eisch alleen reeds de verplaatsingen ψ , χ en v ondubbelzinnig zouden zijn bepaald voor ieder veelvlak, daar zich toch bij ieder veelvlak meerdere mogelijkheden laten indenken. In het volgende wordt echter niet gestreefd naar volledigheid betreffende alle aan de veelvlakken verwante verplaatsingssystemen; slechts wordt gezocht naar het, in analytisch opzicht, eenvoudigste verplaatsings-

systeem, dat aan ieder der veelvlakken is toegevoegd. Bij dit onderzoek geldt een functie van ϑ en φ als des te eenvoudiger, naarmate het aantal van zijn frequenties in het gebied $0 < \vartheta < 2\pi$ of $0 < \varphi < 2\pi$ kleiner is.

In het algemeen zal de gezochte verplaatsing, wegens de vereischte periodiciteit voorgesteld kunnen worden met reeksen in harmonische functies van $k\vartheta$ en $k\varphi$, waarbij k geheel is. Het onderzoek bepaalt zich nu tot die functies, waarbij de grootste waarde van k zoo klein is, als in verband met de vereischte symmetrie bij het gegeven veelvlak mogelijk is. Deze kleinste waarde wordt het eenvoudigst gevonden door de gezochte functie langs een parallelcirkel of langs een meridiaanvlak te volgen in zijn beloop, zooals dit door de symmetrie van het gegeven veelvlak noodzakelijk wordt voorgeschreven. Uit dit beloop wordt geconcludeerd tot den graad van de harmonische, die tenminste noodig is om dit beloop te helpen weergeven.

Uit het verloop langs een parallelcirkel volgt welke harmonische van φ tenminste noodig is, terwijl uit het verloop langs een meridiaancirkel kan worden afgeleid van welken graad de harmonische van ϑ moet zijn. Behalve langs dezen weg, waarbij de coëfficiënten n van φ en m van ϑ onafhankelijk van elkaar worden bepaald, kan ook, nadat één der grootheden m of n is vastgesteld, de andere worden bepaald uit de symmetrievorwaarden, vervat in de identiteit (69).

Indien de te analyseeren verplaatsing symmetrisch is ten opzichte van het vlak $\varphi = 0$, volgt hieruit dat de functie van ϑ en φ , die deze verplaatsing beschrijft, slechts $\cos k\varphi$ en niet $\sin k\varphi$ kan bevatten. Omgekeerd is, indien ten opzichte van dit vlak anti-symmetrie aanwezig is, het tegenovergestelde het geval.

Vervolgens kan uit den aard der symmetrie, die bestaat ten opzichte van de Z -as worden afgeleid of k in $k\varphi$ even dan wel oneven is. Indien n.l., zoowel ten opzichte van het vlak $\varphi = \pi/2$ als ten opzichte van het vlak $\varphi = 0$, symmetrie bestaat, kan k slechts even zijn. Eveneens moet k een even getal zijn, indien de genoemde vlakken vlakken van anti-symmetrie zijn. Als er echter ten opzichte van één der vlakken symmetrie aanwezig is, en ten opzichte van het andere anti-symmetrie, kunnen de getallen k slechts oneven zijn.

Door deze overwegingen, die alle de symmetrie om de Z -as betreffen, is reeds een en ander bepaald over de wijze, waarop de gezochte funktie afhankelijk is van φ . Analoge beschouwingen over de symmetrie in de verplaatsingen der punten, die op een meridiaancirkel liggen, leveren het overeenkomstige inzicht in de samenstelling der gezochte funkties, wat aangaat hun afhankelijkheid van ϑ . Daar in plaats van ϑ de onafhankelijk veranderlijke z is ingevoerd moet worden vastgesteld hoe de symmetrie-eenschappen van invloed zijn op den vorm, waarin z optreedt.

Indien de pool op de meridiaan bij de vervormingen een symmetriepunt is, moet wegens (66) de funktie, die de verplaatsing beschrijft, een rationeele funktie van z zijn, — immers mag

$$\sin \vartheta = \sqrt{1 - z^2}$$

niet voorkomen —, die slechts even machten van z bevat, indien het aequatorvlak een vlak van symmetrie is, en slechts oneven machten van z , indien ten opzichte van den aequator anti-symmetrie aanwezig is. Wanneer de pool daarentegen bij de vervorming een anti-symmetriepunt is, kan de gezochte funktie van z alleen gevormd worden door een veelterm van z met $\sqrt{1 - z^2}$ als factorde veelterm bevat slechts oneven machten van z , indien het aequator vlak een vlak van symmetrie is, en slechts even machten indien ten opzichte van dit vlak anti-symmetrie bestaat.

Over de wijze waarop z en φ naast elkaar voorkomen verschaffen de beschouwingen van hoofdstuk III, § 4 het noodige inzicht, daar in de vergelijkingen (60) en (66) tot uitdrukking is gebracht, dat iedere harmonische van φ vermenigvuldigd met een funktie van z voorkomt.

Nadat voor een der funkties ψ , χ of v is vastgesteld volgens welke der uitdrukkingen (66a) of (66b) zij met z samenhangt, volgt uit de vergelijkingen (60) en (66) de algemeene gedaante der beide andere verplaatsingen.

De nog onbekende coëfficiënten A , B en C zullen in het algemeen bepaald kunnen worden met behulp van de algemeene symmetrievorwaarden, uitgedrukt in de identiteiten (69). Echter kan ook een andere weg gevolgd worden, waarbij het rekenwerk minder gecompliceerd is.

Bij iedere polyedrische vervorming bestaat n.l. een aantal

punten, waarin de gezochte verplaatsing of haar afgeleide een bijzondere waarde aanneemt. Zulk een punt is b.v. het hoekpunt van het veelvlak.

Wat betreft de verplaatsing v kan worden opgemerkt, dat zij in alle hoekpunten dezelfde waarde bezit. Uit de bekende coördinaten van het hoekpunt wordt de waarde, die v in dit punt aanneemt, berekend als functie van de onbekende coëfficiënten C . Door in meerdere hoekpunten de waarde van v op deze wijze te berekenen, en de gevonden uitdrukkingen aan elkaar gelijk te stellen worden homogene vergelijkingen in de coëfficiënten C verkregen.

Hetzelfde kan worden gedaan bij de verplaatsing v in de punten van den bol, die gelijke coördinaten ϑ en φ hebben als de zwaartepunten der zijvlakken van het veelvlak; en indien noodig kan dezelfde bewerking ook worden toegepast op de verplaatsingen v in de punten, die gelijke coördinaten hebben met het midden van de ribben van het veelvlak.

Bovendien kan worden gebruik gemaakt van de omstandigheid, dat vanwege de symmetrie in de genoemde punten de verplaatsing v een extreme waarde bereikt, zoodat hier

$$\frac{\partial v}{\partial \vartheta} = \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0.$$

Ook deze vergelijkingen geven homogene betrekkingen tusschen de coëfficiënten C . Ten slotte volgt uit de voorwaarde dat de verplaatsing aan de pool slechts één enkele waarde bezitten kan, en dus onafhankelijk van φ zijn moet, dat de coëfficiënten van $\cos k\varphi$ en $\sin k\varphi$, indien $k \neq 0$, in de punten $z = \pm 1$ gelijk aan nul zijn.

Nadat zooveel onafhankelijke homogene vergelijkingen zijn opgesteld als overeenkomt met het aantal der coëfficiënten C , kunnen deze coëfficiënten berekend worden, op een constante factor na. Hierbij zijn echter niet alle symmetrie-eischen gebruikt, zoodat geverifieerd moet worden of aan (69) wordt voldaan.

Wat betreft de berekening van de coëfficiënten A en B der verplaatsingen ψ en χ kan worden opgemerkt, dat in de punten ten opzichte waarvan de verplaatsingen symmetrisch zijn, dus in de punten welke overeenkomen met de hoekpunten, de zwaarte-

punten der zijvlakken, en de middens der ribben, deze verplaatsingen gelijk nul moeten zijn. Wanneer de pool met een dergelijk symmetriepunt samenvalt is daarom vanzelf voldaan aan de voorwaarde (55).

Verder geldt voor de verplaatsingen van de punten, die op den grooten cirkel liggen, volgens welke een symmetrievlak den bol doorsnijdt, dat de verplaatsingscomponente in de richting loodrecht op het symmetrievlak nul is, terwijl de componente evenwijdig aan dit vlak een extreme waarde bezit. De afgeleide van deze laatste componente in de richting loodrecht op het symmetrievlak is daarom gelijk aan nul in ieder punt van den grooten cirkel. Voor punten, die in vlakken liggen ten opzichte waarvan anti-symmetrie aanwezig is, geldt het tegenovergestelde, zoodat hetgeen hiervoor over de componente normaal op het symmetrievlak werd opgemerkt nu op de componente evenwijdig aan het anti-symmetrievlak betrekking heeft, en omgekeerd. De coëfficiënten A en B kunnen worden berekend, nadat een voldoende aantal onafhankelijke homogene vergelijkingen is verkregen. Achtera wordt het onderzoek naar de symmetrie van de verplaatsingen ψ en χ ingesteld door substitutie van de gevonden functies in de identiteiten (69).

Evenals de verplaatsingen v worden ψ en χ wegens de homogeniteit der vergelijkingen, waaruit de coëfficiënten berekend worden, bepaald behoudens een constante factor, die op de geheele functie betrekking heeft. Echter kunnen ψ en χ niet ieder met een afzonderlijke willekeurige factor vermenigvuldigd worden, wat blijkt uit de overweging, dat ψ en χ niet ieder op zichzelf symmetrische functies zijn, doch samen als componenten van eenzelfde verplaatsing in het bolvlak aan zekere symmetrie-eischen hebben te voldoen. Daarentegen is de verhouding van de verplaatsingen v en de verplaatsingen in het bolvlak willekeurig, daar zij niet door eenige symmetrievoorwaarde wordt vastgesteld. In meetkundig opzicht zijn dan ook eenerzijds v en anderzijds ψ en χ niet aan elkaar gebonden. In mechanisch opzicht zijn zij dat natuurlijk wel

§ 3 - HET REGELMATIG VIERVLAK

Het viervlak $ABCD$ (fig. 8) is zoodanig in het coördinatenstelsel XYZ geplaatst, dat de middens der ribben op de coördinaat-assen liggen; het viervlak $A'B'C'D'$, waarvan de hoekpunten gelijke

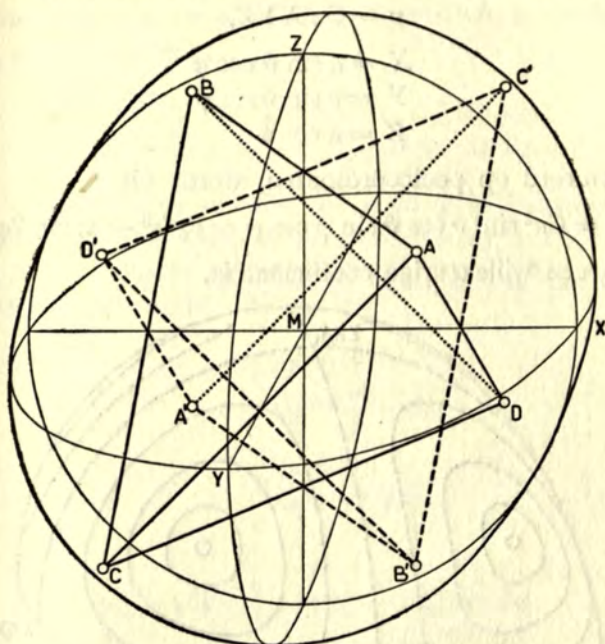


Fig. 8.

coördinaten ϑ en φ hebben met de zwaartepunten der zijvlakken van $ABCD$, is aan $ABCD$ toegevoegd. Terwijl A , B , C en D de punten van den bolwand met maximale verplaatsing v bepalen, zijn A' , B' , C' en D' de punten met minimale verplaatsing.

Wegens symmetrie zijn de absolute waarden der verplaatsingen in de beide stelsels van hoekpunten aan elkaar gelijk; bovendien moet ten opzichte van de middelloodvlakken der lijnen AB' , AC' en AD' anti-symmetrie bestaan. Daar deze middelloodvlakken door de keuze van het assenstelsel XYZ samenvallen met de coördinaatvlakken, scheiden de groote cirkels, volgens welke de coördinaatvlakken den bolwand snijden, de gebieden van positieve en negatieve verplaatsing v .

In figuur 9 is de vorm van den uitgeknikten bolwand aangegeven

door de lijnen van constante verplaatsing v op het boloppervlak schematisch te teekenen: getrokken indien de verplaatsing positief, gestippeld indien zij negatief is.

De symmetrie, die v bezitten moet, is aanwezig in de uitdrukking:

$$v = C \cdot XYZ, \quad (80)$$

of met

$$X = a \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$Y = a \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$Z = a \cos \vartheta$$

getransformeerd op poolcoördinaten, wordt dit

$$v = Ca^3 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi \cos \varphi = v_0 (z^3 - z) \sin 2\varphi, \quad (81)$$

waarin v_0 een willekeurige coëfficiënt is.

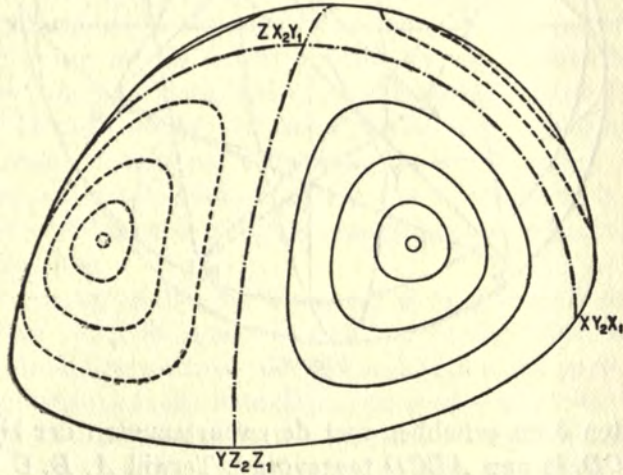


Fig. 9.

Daar in (80) X , Y en Z volkomen symmetrisch optreden behoeft het symmetriecriterium (69) aan (81) niet meer te worden aangelegd.

Blijkens (81) behoort het systeem van verplaatsingen tot het type, dat met de vergelijkingen (60) en (66a) gekarakteriseerd wordt. Opdat met vergelijking (81) aan de differentiaalvergelijkingen van het probleem zal kunnen worden voldaan, moeten overeenkomstig (60) en (66a) de functies ψ en χ van den vorm zijn:

$$\begin{aligned} \psi &= \sqrt{1 - z^2} (A_2 z^2 + A_0) \sin 2\varphi \\ \chi &= B_1 z \cos 2\varphi. \end{aligned}$$

Ter bepaling van de coëfficiënten A_2 , A_0 en B , die zoodanige waarden moeten hebben, dat de verlangde symmetrie aanwezig is, worden de beide assenstelsels XYZ en $X_2Y_2Z_2$ beschouwd, die met betrekking tot de verplaatsingen gelijkwaardig zijn (fig. 9). De verplaatsingen ψ_2 en χ_2 worden volgens (69) in de coördinaten z_2 en φ_2 uitgedrukt door

$$\begin{aligned}\psi_2 &= \sqrt{1 - z_2^2} (A_2 z_2^2 + A_0) \sin 2\varphi_2 \\ \chi_2 &= B_1 z_2 \cdot \cos 2\varphi_2.\end{aligned}$$

Deze verplaatsingen worden tot ψ en χ in verband gebracht met behulp van een tusschentransformatie op het linksdraaiend systeem $X_1Y_1Z_1$ (fig. 9). Overeenkomstig (76) en (79) gelden hierbij de transformatieformules:

$$\begin{aligned}\vartheta_2 &= \vartheta_1 \\ \varphi_2 &= \frac{\pi}{2} - \varphi_1 \\ \psi_2 &= \psi_1 \\ \chi_2 &= -\chi_1.\end{aligned}$$

zoodat

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \sqrt{1 - z_1^2} (A_2 z_1^2 + A_0) \sin 2\varphi_1 \\ \chi_1 &= B_1 z_1 \cdot \cos 2\varphi_1.\end{aligned} \quad (82a,b)$$

Het systeem $X_1Y_1Z_1$ staat tot het systeem XYZ in verband door de transformatieformules (75) en (78).

Substitutie van (78a) in (82a) geeft:

$$\begin{aligned}\sqrt{1 - z_1^2} (A_2 z_1^2 + A_0) \sin 2\varphi_1 \cdot \sqrt{1 - (1 - z^2) \sin^2 \varphi} = \\ - \sqrt{1 - z^2} [z \sin \varphi (A_2 z^2 + A_0) \sin 2\varphi + \cos \varphi B_1 z \cos 2\varphi].\end{aligned}$$

Na substitutie van (75) volgt hieruit de identiteit in z en φ :

$$\begin{aligned}2z \sqrt{1 - z^2} \cos \varphi [A_2 (1 - z^2) \sin^2 \varphi + A_0] \equiv \\ \equiv -z \sqrt{1 - z^2} \cos \varphi [2 \sin^2 \varphi (A_2 z^2 + A_0) + B_1 \cos 2\varphi],\end{aligned}$$

en na eenige herleiding

$$(A_2 + A_0 - B_1) \sin^2 \varphi + (A_0 + \frac{B_1}{2}) \equiv 0,$$

aan welke voorwaarde alleen voldaan wordt indien

$$\begin{aligned} A_2 + A_0 - B_1 &= 0 \\ A_0 + \frac{B_1}{2} &= 0. \end{aligned}$$

Hetzelfde resultaat wordt ook verkregen na substitutie van (78b) in (82b).

Het systeem van verplaatsingen dat in symmetrie-eigenschappen verwant is aan het viervlak wordt daarom gegeven door

$$\left. \begin{aligned} \psi(z, \varphi) &= \psi_0 \cdot \sqrt{1-z^2} (3z^2 - 1) \sin 2\varphi \\ \chi(z, \varphi) &= \psi_0 \cdot 2z \cos 2\varphi \\ \nu(z, \varphi) &= \nu_0 \cdot (z^3 - z) \sin 2\varphi. \end{aligned} \right\} (83)$$

Substitutie van (83) in de differentiaalvergelijkingen (53) levert:

$$\left. \begin{aligned} \Theta(z, \varphi) &\equiv -[(11m+1+12c)\psi_0 + \\ &\quad + (m+1+2c+10\kappa m)\nu_0] \sqrt{1-z^2} (3z^2 - 1) \sin 2\varphi = 0 \\ \Phi(z, \varphi) &\equiv -[(11m+1+12c)\psi_0 + \\ &\quad + (m+1+2c+10\kappa m)\nu_0] \cdot \sqrt{1-z^2} \cdot 2z \cos 2\varphi = 0 \\ R(z, \varphi) &\equiv -[12(m+1+2c+10\kappa m)\psi_0 + \\ &\quad + 2\left(m+1+2c-5c\left(1-\frac{2h}{a}\right) + 5\kappa(13m+1)\right)\nu_0] (z^3 - z) \sin 2\varphi = 0. \end{aligned} \right\} (84)$$

De vergelijkingen (83) geven een oplossing van de vergelijkingen (53), indien aan (84) voldaan wordt in alle punten van den bolwand. Hieruit volgen de voorwaarden:

$$\left. \begin{aligned} (11m+1+12c)\psi_0 + (m+1+2c+10\kappa m)\nu_0 &= 0 \\ 12(m+1+2c+10\kappa m)\psi_0 + \\ + 2\left[m+1+2c-5c\left(1-\frac{2h}{a}\right) + 5\kappa(13m+1)\right]\nu_0 &= 0. \end{aligned} \right\} (85)$$

De vergelijkingen (85) laten van nul verschillende oplossingen ψ_0 en ν_0 toe, indien de determinant van het stelsel der homogene lineaire vergelijkingen gelijk is aan nul:

$$\left| \begin{array}{cc} 11m+1+12c & m+1+2c+10\kappa m \\ 6(m+1+2c+10\kappa m) & m+1+2c-5c\left(1-\frac{2h}{a}\right) + \\ & + 5\kappa(13m+1) \end{array} \right| = 0. \quad (86)$$

De waarde van c , bij welke aan (86) wordt voldaan, geeft aan bij welke spanning de knikmogelijkheid optreedt. Vergelijking (86) is een vierkantsvergelijking in c

$$a_2 c^2 + a_1 c + a_0 = 0,$$

waarvan de in c kwadratische term verwaarloosd moet worden. Immers werden tot nu toe deze termen in de differentiaalvergelijkingen verwaarloosd, terwijl zij indien zij in rekening waren gebracht tot een andere coëfficiënt a_2 aanleiding zouden hebben gegeven. Om dezelfde reden moeten nu ook in (86) de getallen $c\kappa$ en κ^2 verwaarloosd worden.

Na invoering van (54) volgt de knikspanning:

$$-\frac{S_0}{E} = \frac{1 + \frac{h^2}{3a^2} \left(120 \frac{m^2}{m^2 - 1} - 1 \right)}{9 + \frac{3}{m} - \frac{2h}{a} \left(11 + \frac{1}{m} \right)}. \quad (87)$$

$-\frac{S_0}{E}$ is kleiner naarmate $\frac{h}{a}$ kleiner is; in het grensgeval waar $\frac{h}{a}$ tot nul nadert is

$$-\frac{S_0}{E} = \frac{1}{9 + \frac{3}{m}} \approx \frac{1}{10}.$$

Enkele bijzonderheden over de wijze, waarop de functies (83) aan de differentiaalvergelijkingen voldoen, verdienen nog nadere beschouwing.

In de eerste plaats kan worden opgemerkt dat de vergelijking (85a) zoowel uit (84a) als uit (84b) verkregen wordt. Inderdaad moeten ook de vergelijkingen voor het evenwicht in de richtingen ϑ en φ hetzelfde uitspreken, indien de verplaatsingen de symmetrie der veelvlakken bezitten, wat blijken moge uit de navolgende overwegingen:

De evenwichtsvergelijking $\Theta(z, \varphi) = 0$ garandeert het evenwicht van ieder element van den bolwand in de richting ϑ van het aangenomen coördinatenstelsel. Ten opzichte van een gelijkwaardig coördinatenstelsel ϑ_1, φ_1 wordt het evenwicht in de richting ϑ_1 uitgedrukt door de vergelijking $\Theta(z_1, \varphi_1) = 0$, waarin Θ hetzelfde

symbool is als in het systeem ϑ, φ . In het geval van het viervlak beteekent dit, dat de evenwichtsvoorwaarde voor de richting ϑ_1 luidt:

$$- [(11m+1+12c) \psi_0 + (m+1+2c+10 \kappa m) v_0] \times \\ \times \sqrt{1-z_1^2} (3z_1^2-1) \sin 2\varphi_1 = 0.$$

De evenwichtsvoorwaarden voor de beide richtingen ϑ en ϑ_1 worden daarom gegeven door de enkele vergelijking (85a). Met uitsluiting van het geval dat de beide coördinatenrichtingen ϑ en ϑ_1 slechts gelijk kunnen zijn (axiale symmetrie) volgt hieruit, dat (85a) door de evenwichtsvoorwaarden voor twee verschillende richtingen in ieder punt wordt opgeleverd. Daarom is (85a) de evenwichtsvoorwaarde voor iedere richting in het bolvlak, en dus ook voor de richting φ .

Nog op een tweede omstandigheid wordt de aandacht gevestigd. Het resultaat van de substitutie der funkties (83) in de differentiaalvergelijkingen is van den vorm

$$\left. \begin{aligned} \Theta(z, \varphi) &\equiv - \left[a_1 + \frac{v_0}{\psi_0} \cdot b_1 \right] \psi(z, \varphi) \\ \Phi(z, \varphi) &\equiv - \left[a_1 + \frac{v_0}{\psi_0} b_1 \right] \chi(z, \varphi) \cdot \sqrt{1-z^2} \\ R(z, \varphi) &\equiv - \left[\frac{\psi_0}{v_0} a_2 + b_2 \right] v(z, \varphi), \end{aligned} \right\} (88)$$

waarin a en b coëfficiënten zijn. In § 5 zal hierop nader worden ingegaan.

§ 4 - KUBUS EN REGELMATIG ACHTVLAK

De reciproke polyeders, kubus en regelmatig achtvlak, zijn in het assenstelsel op zoodanige wijze geplaatst, dat de hoekpunten van het achtvlak op de assen liggen, en de zijvlakken van de kubus aan de coördinaatvlakken evenwijdig zijn (figuur 10). De verplaatsingen v , welke bij dit systeem van veelvlakken behooren zijn in figuur 11 voor één octant met lijnen van constante verplaatsing v op het boloppervlak aangegeven; de getrokken lijnen hebben betrekking op positieve, de gestippelde lijnen hebben betrekking op negatieve verplaatsingen v .

Doordat symmetrie aanwezig is ten opzichte van de vlakken

$\varphi=0$ en $\varphi = \pi/4$ is v , wat betreft haar afhankelijkheid van φ , periodiek volgens $\cos 4k\varphi$. Het verloop van v langs den aequator vereischt dat k ten minste 1 bedraagt. Langs den meridiaan, — waarop de polen en de snijpunten met den aequator symmetrisch gelegen punten zijn —, moet v voorgesteld kunnen worden door een veelterm in z^2 , die van den 2den graad is, zoodat

$$v = (C_{44}z^4 + C_{24}z^2 + C_{04}) \cos 4\varphi + (C_{40}z^4 + C_{20}z^2 + C_{00}). \quad (89a)$$

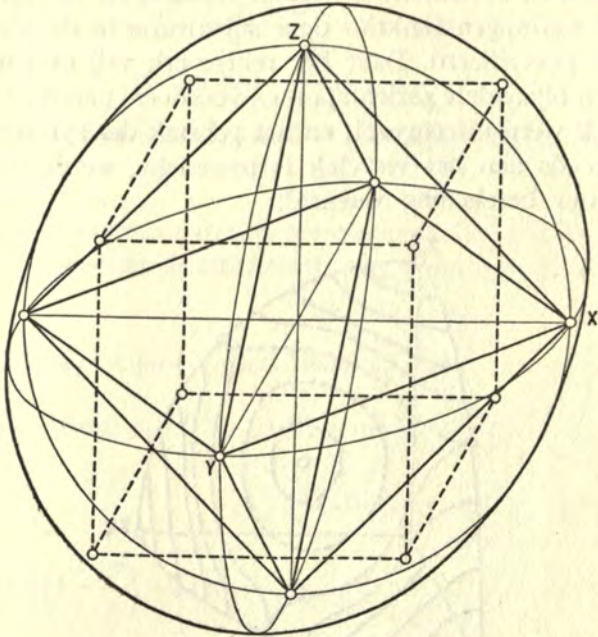


Fig. 10.

Volgens de vergelijkingen (60) en (66a) zijn ψ en χ dan van den vorm:

$$\psi = \sqrt{1 - z^2} [(A_{34}z^3 + A_{14}z) \cos 4\varphi + A_{30}z^3 + A_{10}z] \quad (89b)$$

$$\chi = (B_{24}z^2 + B_{04}) \sin 4\varphi \quad (89c)$$

Blijkens fig. 10 hebben de symmetrisch gelegen coördinatensystemen achtereenvolgens het punt Z in ieder der hoekpunten van het regelmatig zesvlak. Omdat de 3 coördinaatvlakken symmetrievlakken zijn voor de verplaatsingen volgens (89), hebben de functies (89) de vereischte symmetrie, indien de coëfficiënten A , B , C zoodanig gekozen zijn, dat ieder der hoekpunten van

den boldriehoek XYZ ten opzichte van deze functies gelijk georiënteerd zijn. Vereischt is dan de gelijkwaardigheid der coördinaten systemen $X_1Y_1Z_1$ en XYZ (fig. 11).

Door substitutie van de uitdrukkingen (89) in de symmetrievorwaarden (69) kunnen de coëfficiënten A , B en C bepaald worden. Minder rekenwerk is vereischt, indien op de in § 2b aangegeven wijze eerst, onafhankelijk van de algemeene symmetrievorwaarden, de coëfficiënten worden bepaald, en daarna de symmetrie der verkregen functies door substitutie in de identiteiten (69) wordt geverifieerd. Daar het rekenwerk vrij omvangrijk is, en zich geen bijzondere gezichtspunten voordoen, nadat de methode reeds in § 2 werd uiteengezet, en het gebruik der symmetrievorwaarden reeds aan het viervlak is toegelicht, wordt slechts het resultaat der berekening vermeld:

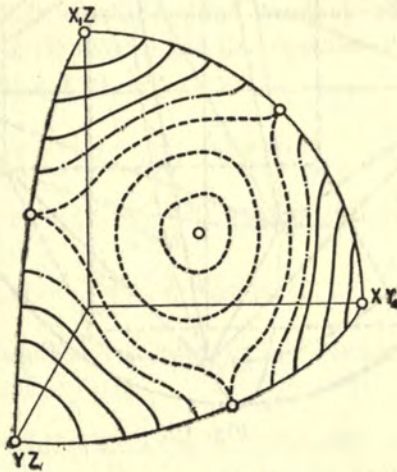


Fig. 11.

$$\left. \begin{aligned} \psi(z, \varphi) &= \psi_0 \sqrt{1-z^2} [(z^3 - z) \cos 4\varphi + (7z^3 - 3z)] \\ \chi(z, \varphi) &= -\psi_0 \quad \cdot [(z^2 - 1) \sin 4\varphi] \\ v(z, \varphi) &= v_0 \quad \cdot [(z^2 - 1)^2 \cos 4\varphi + \frac{1}{5}(35z^4 - 30z^2 + 3)] + v_1 \end{aligned} \right\} (90)$$

Aan v kan steeds een willekeurige constante v_1 worden toegevoegd, daar een radiale verplaatsing in overeenstemming is met het systeem der beschouwde veelvlakken.

Substitutie van (90) in de differentiaalvergelijkingen (53) geeft

$$\Theta(z, \varphi) \equiv - [(19m+1+20c) \psi_0 + 4(m+1+2c+18\kappa m) v_0] \times \\ \times \sqrt{1-z^2} [(z^3-z) \cos 4\varphi + (7z^3-3z)] = 0 \quad (91a)$$

$$\Phi(z, \varphi) \equiv - [(19m+1+20c) \psi_0 + 4(m+1+2c+18\kappa m) v_0] \times \\ \times -\sqrt{1-z^2} \cdot (z^2-1) \sin 4\varphi = 0 \quad (91b)$$

$$R(z, \varphi) \equiv - \left[5(m+1+2c+18\kappa m) \psi_0 + 2 \left(m+1+2c - \right. \right. \\ \left. \left. - 9c \left(1 - \frac{2h}{a} \right) + 9\kappa (21m+1) \right) v_0 \right] \times \quad (91c) \\ \times [(z^2-1)^2 \cos 4\varphi + \frac{1}{5}(35z^4-30z^2+3)] - \\ - 2 \left[m+1+2c+c \left(1 - \frac{2h}{a} \right) - \kappa (m+1) \right] v_1 = 0.$$

Opdat in alle punten van den bolwand aan (91) zal worden voldaan, moeten tusschen de coëfficiënten ψ_0 , v_0 en v_1 de betrekkingen bestaan:

$$\left. \begin{aligned} (19m+1+20c) \psi_0 + 4(m+1+2c+18\kappa m) v_0 &= 0 \\ 5(m+1+2c+18\kappa m) \psi_0 + 2 \left[m+1+2c - 9c \left(1 - \frac{2h}{a} \right) + \right. \\ &\quad \left. + 9\kappa (21m+1) \right] v_0 = 0 \\ \left[m+1+2c+c \left(1 - \frac{2h}{a} \right) - \kappa (m+1) \right] v_1 &= 0. \end{aligned} \right\} (92)$$

De radiale verplaatsing v_1 is ongelijk nul indien de coëfficiënt van v_1 gelijk nul is. Uit deze voorwaarde volgt na invoering van (54)

$$\frac{S_0}{E} = \frac{1}{3} \frac{m}{m-1} \cdot \frac{1 - \frac{h^2}{3a^2}}{1 - \frac{2h}{3a}}. \quad (93a)$$

ψ_0 en v_0 zijn alleen van nul verschillend, indien de determinant van de eerste twee vergelijkingen (92) gelijk nul is. Oplossing van deze determinant geeft:

$$-\frac{S_0}{E} = \frac{1 + \frac{h^2}{3a^2} \left(360 \frac{m^2}{m^2 - 1} - 1 \right)}{17 + \frac{3}{m} - \frac{2h}{a} \left(19 + \frac{1}{m} \right)} \quad (93b)$$

De kleinste waarde die $-\frac{S_0}{E}$ kan aannemen bedraagt $\frac{1}{18}$.

Daar de knikspanningen volgens (93a) en (93b) niet aan elkaar gelijk zijn, kunnen niet gelijktijdig ψ_0 , v_0 eenerzijds, en v_1 anderzijds ongelijk nul zijn. In (93a) en (93b) worden dus twee afzonderlijke oplossingen gegeven, welker knikvormen beide aan de gestelde symmetrie-eischen voldoen.

Over de wijze, waarop de funkties (90) aan de differentiaalvergelijkingen voldoen, kunnen dezelve opmerkingen gemaakt worden als bij het viervlak. Ook nu leggen

$$\Theta(z, \varphi) = 0 \text{ en } \Phi(z, \varphi) = 0$$

tusschen φ_0 en v_0 dezelfde relatie, zooals ook — na hetgeen in § 3 betoogd werd — het geval behoort te zijn bij symmetrische verplaatsingssystemen. Tevens is het substitutieresultaat (91) van den vorm (88).

§ 5 — REGELMATIG TWAALFVLAK EN TWINTIGVLAK

In figuur 12 is aangegeven, hoe het regelmatig twaalfvlak ten opzichte van het assenstelsel $X_{10}Y_{10}Z_{10}$ ¹⁾ is gedacht: Ten behoeve van de overzichtelijkheid der figuur is het reciproke twintigvlak niet in beeld gebracht; zijn hoekpunten liggen in de spherische middelpunten der zijvlakken van het twaalfvlak. Figuur 13 geeft schematisch de lijnen van constante verplaatsing v op het boloppervlak, voor positieve verplaatsingen getrokken, en gestippeld voor negatieve verplaatsingen. De stand van den gedeformeerden bol ten opzichte van het assenstelsel $X_{10}Y_{10}Z_{10}$ is zoodanig gekozen, dat de coördinaatvlakken symmetrievlakken zijn. De verplaatsing v moet daarom geanalyseerd kunnen worden volgens:

1) De indices 10 krijgen eerst later beteekenis.

$$v(z, \varphi) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m C_{ij} z^{2i} \cos 2j\varphi. \quad (94)$$

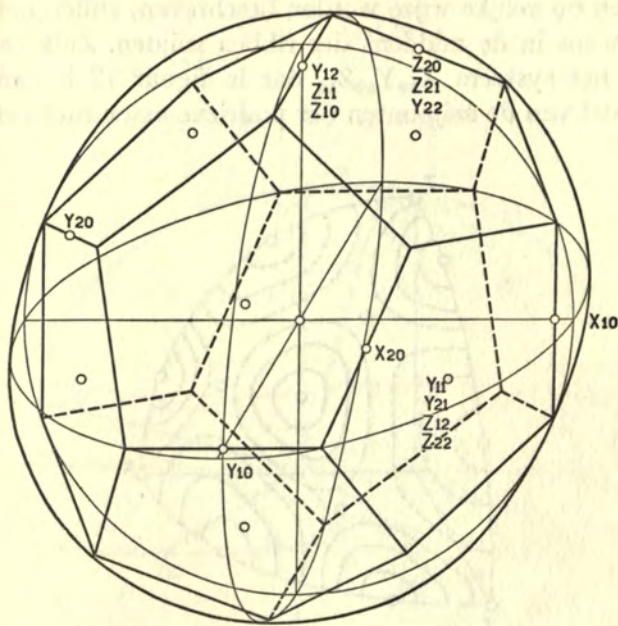


Fig. 12.

Opdat het verloop van v langs den aequator en langs den meridiaan, die in een symmetrievlak ligt, gelijk is, moet $m = n$. Tevens blijkt uit dit verloop, dat zijn harmonische analyse tenminste $m = n = 3$ moet opleveren. Daar het aantal der onbekende coëfficiënten C hierbij vij groot, n.l. 16, en de transformatie van v tusschen de symmetrische coördinatensystemen ingewikkeld is, verdient het uit een oogpunt van eenvoud verre den voorkeur de coëfficiënten C_{ij} te bepalen op de in § 2b aangegeven wijze, en eerst achteraf het onderzoek naar de symmetrie in te stellen.

Na vrij omvangrijk rekenwerk wordt gevonden:

$$v(z, \varphi) = v_0 \left\{ - (z^2 - 1)^3 \cos 6\varphi - \frac{2}{\sqrt{5}} (z^2 - 1)^2 (11z^2 - 1) \cos 4\varphi + \right. \\ \left. + (z^2 - 1) (33z^4 - 18z^2 + 1) \cos 2\varphi + \frac{2}{21\sqrt{5}} (231z^6 - 315z^4 + \right. \\ \left. + 105z^2 - 5) \right\} + v_1. \quad (95)$$

Het assenstelsel $X_{10}Y_{10}Z_{10}$ snijdt het twaalfvlak in de punten X_{10} , Y_{10} en Z_{10} , welke de middens van ribben van het twaalfvlak zijn. De assen van een ander stelsel, met welks coördinaten de verplaatsingen op gelijke wijze worden beschreven, zullen het twaalfvlak eveneens in de middens der ribben snijden. Zulk een assenstelsel is het systeem $X_{20}Y_{20}Z_{20}$ dat in figuur 12 is aangegeven door middel van de snijpunten der positieve assen met het twaalfvlak.

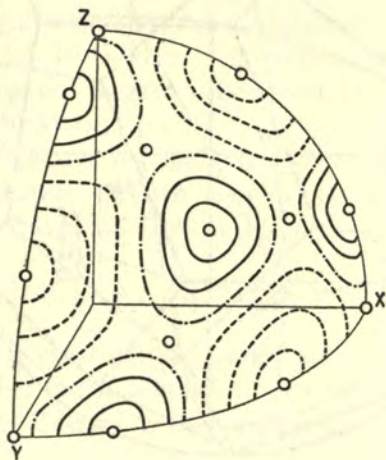


Fig. 13.

De transformatie van de functie $v(z, \varphi)$ uit het stelsel $X_{10}Y_{10}Z_{10}$ naar het stelsel $X_{20}Y_{20}Z_{20}$ geschiedt het eenvoudigst, indien zij in enkele minder gecompliceerde transformaties wordt onderverdeeld. Daartoe wordt een viertal hulpsystemen: 11, 12, 21, 22 ingevoerd (fig. 14).

De coördinaatvlakken $X_{10}Y_{10}$ en $X_{20}Y_{20}$ snijden elkaar volgens een lijn, die den bol snijdt in O . De eerste transformatie van het systeem 10 bestaat in een wenteling van dit systeem om zijn Z -as, totdat het punt Y_{10} , waarin de Y_{10} -as den bolwand snijdt, met O samenvalt. Het systeem 01 is dan tot dekking gebracht met het hulpsysteem 11. De formules voor de transformatie 10—11:

$$X_{10}Y_{10}Z_{10} \rightarrow X_{11}Y_{11}Z_{11}$$

zijn:

$$\vartheta_{10} = \vartheta_{11} \quad \varphi_{10} = \varphi_{11} - \alpha. \quad (96a)$$

Het tweede hulpsysteem 12 wordt verkregen door verwisseling van de Y - en Z -assen van het systeem 11. De formules voor deze transformatie 11—12:

$$X_{11}Y_{11}Z_{11} \rightarrow X_{12}Y_{12}Z_{12}$$

zijn overeenkomstig (75):

$$\cos \vartheta_{11} = \sin \vartheta_{12} \sin \varphi_{12} \quad \cos \vartheta_{12} = \sin \vartheta_{11} \sin \varphi_{11}. \quad (96b)$$

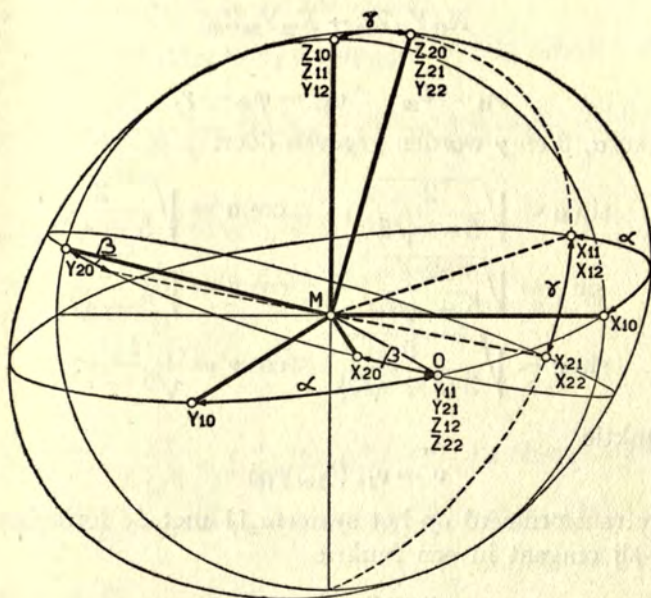


Fig. 14.

De beide andere hulpsystemen worden uit het assenstelsel $X_{20}Y_{20}Z_{20}$ op overeenkomstige wijze afgeleid. Door wenteling van het systeem $X_{20}Y_{20}Z_{20}$ om zijn Z -as, totdat Y_{20} met O samenvalt, wordt het systeem 20 tot dekking gebracht met een systeem 21. De formules voor deze transformatie 20—21:

$$X_{20}Y_{20}Z_{20} \rightarrow X_{21}Y_{21}Z_{21}$$

zijn overeenkomstig (96a):

$$\vartheta_{20} = \vartheta_{21} \quad \varphi_{20} = \varphi_{21} - \left(\frac{\pi}{2} + \beta\right). \quad (96c)$$

Door verwisseling van de assen Y en Z van het systeem 21 ontstaat het systeem 22. De formules bij de transformatie 21—22:

$$X_{21}Y_{21}Z_{21} \rightarrow X_{22}Y_{22}Z_{22}$$

zijn overeenkomstig (96b):

$$\cos \vartheta_{21} = \sin \vartheta_{22} \sin \varphi_{22} \quad \cos \vartheta_{22} = \sin \vartheta_{21} \sin \varphi_{21}. \quad (96d)$$

De systemen 12 en 22 hebben gemeenschappelijke Z -assen. Zij worden met elkaar tot dekking gebracht door wenteling om deze gemeenschappelijke as. De formules bij de transformatie 12—22:

$$X_{12}Y_{12}Z_{12} \rightarrow X_{22}Y_{22}Z_{22}$$

zijn:

$$\vartheta_{12} = \vartheta_{22} \quad \varphi_{12} = \varphi_{22} - \gamma. \quad (96e)$$

De hoeken α , β en γ worden gegeven door:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \sqrt{\frac{2}{5 - \sqrt{5}}} & \cos \alpha &= \sqrt{\frac{2}{5 + \sqrt{5}}} \\ \sin \beta &= \sqrt{\frac{2}{5 + \sqrt{5}}} & \cos \beta &= \sqrt{\frac{2}{5 - \sqrt{5}}} \\ \sin \gamma &= \sqrt{\frac{5}{2(5 + \sqrt{5})}} & \cos \gamma &= \frac{1}{\sqrt{5} - 1}. \end{aligned}$$

De funktie

$$v = v_{10}(\vartheta_{10}, \varphi_{10}) \quad (97a,)$$

wordt getransformeerd op het systeem 11 met de formules (96a), waarbij zij omgaat in een funktie

$$v = v_{11}(\vartheta_{11}, \varphi_{11}). \quad (97b)$$

Vervolgens wordt (97b) getransformeerd op het systeem 12 met de formules (96b) tot

$$v = v_{12}(\vartheta_{12}, \varphi_{12}). \quad (97c)$$

Indien de verplaatsingen v de vereischte symmetrie bezitten worden zij in het systeem 20 beschreven met

$$v = v_{20}(\vartheta_{20}, \varphi_{20}) \equiv v_{10}(\vartheta_{20}, \varphi_{20}). \quad (97d)$$

Met de transformatieformules (96c) gaat (97d) over in:

$$v = v_{21}(\vartheta_{21}, \varphi_{21}), \quad (97e)$$

terwijl (97e) door transformatie volgens (96d) overgaat in:

$$v = v_{22}(\vartheta_{22}, \varphi_{22}). \quad (97f)$$

Tenslotte moet, opdat het bewijs der symmetrie inderdaad geleverd zal kunnen worden, (97c), getransformeerd met de formules (96e) een funktie van $\vartheta_{22}, \varphi_{22}$ opleveren, welke identiek is met (97f):

$$v = v_{13}(\vartheta_{22}, \varphi_{22}) \equiv v_{22}(\vartheta_{22}, \varphi_{22}). \quad (97g)$$

Achtereenvolgens wordt gevonden (98, a, b, c):

$$\begin{aligned} v_{10}(z_{10}, \varphi_{10}) = & v_0 \left\{ -(z_{10}^2 - 1)^3 \cos 6\varphi_{10} - \right. \\ & - \frac{2}{\sqrt{5}} (z_{10}^2 - 1)^2 (11z_{10}^2 - 1) \cos 4\varphi_{10} + (z_{10}^2 - 1) (33z_{10}^4 - 18z_{10}^2 + \\ & \left. + 1) \cos 2\varphi_{10} + \frac{2}{21\sqrt{5}} (231z_{10}^6 - 315z_{10}^4 + 105z_{10}^2 - 5) \right\} + v_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{11}(z_{11}, \varphi_{11}) = & \frac{v_0}{5\sqrt{5}} \left\{ -(z_{11}^2 - 1)^3 (11 \cos 6\varphi_{11} - 2 \sin 6\varphi_{11}) + \right. \\ & + (z_{11}^2 - 1)^2 \cdot (11z_{11}^2 - 1) (6 \cos 4\varphi_{11} + 8 \sin 4\varphi_{11}) - \\ & - 5 (z_{11}^2 - 1) (33z_{11}^4 - 18z_{11}^2 + 1) (\cos 2\varphi_{11} - 2 \sin 2\varphi_{11}) + \\ & \left. + \frac{10}{21} (231z_{11}^6 - 315z_{11}^4 + 105z_{11}^2 - 5) \right\} + v_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{12}(z_{12}, \varphi_{12}) = & -\frac{32}{5\sqrt{5}} v_0 \left\{ \frac{1}{21} (231z_{12}^6 - 315z_{12}^4 + 105z_{12}^2 - 5) + \right. \\ & \left. + 2 \sqrt{(1 - z_{12}^2)^5} z_{12} \cos \varphi_{12} (16 \cos^4 \varphi_{12} - 20 \cos^2 \varphi_{12} + 5) \right\} + v_1, \end{aligned}$$

en (98, d, e, f):

$$\begin{aligned} v_{20}(z_{20}, \varphi_{20}) = & v_0 \left\{ -(z_{20}^2 - 1)^3 \cos 6\varphi_{20} - \right. \\ & - \frac{2}{\sqrt{5}} (z_{20}^2 - 1)^2 (11z_{20}^2 - 1) \cos 4\varphi_{20} + (z_{20}^2 - 1) (33z_{20}^4 - 18z_{20}^2 + \\ & \left. + 1) \cos 2\varphi_{20} + \frac{2}{21\sqrt{5}} (231z_{20}^6 - 315z_{20}^4 + 105z_{20}^2 - 5) \right\} + v_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{21}(z_{21}, \varphi_{21}) = & \frac{v_0}{5\sqrt{5}} \left\{ -(z_{21}^2 - 1)^3 \cdot (11 \cos 6\varphi_{21} + 2 \sin 6\varphi_{21}) + \right. \\ & + (z_{21}^2 - 1)^2 \cdot (11z_{21}^2 - 1) (6 \cos 4\varphi_{21} - 8 \sin 4\varphi_{21}) - \\ & - 5 (z_{21}^2 - 1) (33z_{21}^4 - 18z_{21}^2 + 1) (\cos 2\varphi_{21} + 2 \sin \varphi_{21}) + \\ & \left. + \frac{10}{21} (231z_{21}^6 - 315z_{21}^4 + 105z_{21}^2 - 5) \right\} + v_1 \end{aligned}$$

$$v_{22}(z_{22}, \varphi_{22}) = -\frac{32}{5\sqrt{5}} v_0 \left\{ \frac{1}{21} (231z_{22}^6 - 315z_{22}^4 + 105z_{22}^2 - 5) - \right. \\ \left. - 2\sqrt{(1-z_{22}^2)^5} z_{22} \cos \varphi_{22} (16 \cos^4 \varphi_{22} - 20 \cos^2 \varphi_{22} + 5) \right\} + v_1.$$

De transformatie van (98c) met (96e) levert op (98f), zoodat de vereischte symmetrie aanwezig blijkt te zijn.

De bepaling van de verplaatsingen in het bolvlak kan geschieden langs den weg, die in § 2 in het algemeen werd aangegeven, en die ook in de §§ 3 en 4 is gevolgd. Aanmerkelijk sneller kunnen zij echter worden afgeleid door gebruikmaking van een eigenschap, welke bleek te bestaan bij de knikvormen, die in de beide voorgaande §§ werden behandeld.

De functies ψ , χ en v bij viervlak, kubus en achthoek gaven na substitutie in de differentiaalvergelijkingen van het knikprobleem de uitdrukkingen (88). Het vermoeden ligt voor de hand dat de functies ψ , χ en v , die afgeleid worden uit twaalf- en twintigvlak na substitutie in de differentiaalvergelijkingen een resultaat zullen opleveren dat van het type (88) is.

Indien nu als eisch gesteld wordt dat de functies ψ en χ van zoodanigen vorm zijn, dat het substitutieresultaat van de differentiaalvergelijkingen (53) van den vorm (88) is, bestaat niet van te voren de zekerheid, dat zulk een stel functies ψ en χ gevonden zal kunnen worden. Wanneer echter deze voorwaarde vervuld kan worden, wat in verband met de ervaring over de voorgaande §§ waarschijnlijk lijkt, is een systeem van verplaatsingen gevonden, dat aan de differentiaalvergelijkingen voldoet, en dus de oplossing van het gestelde knikprobleem vormt.

De uitdrukkingen (88) zijn alle samengesteld uit 2 deelen, waarvan het eerste deel, dat de coëfficiënt a bevat, geleverd wordt door de differentiaaloperatoren van de functies ψ en χ , welke functies nog onbekend zijn; en waarvan het tweede deel, dat de coëfficiënt b bevat, wordt geleverd door de differentiaaloperator van de functie v , welke bekend is. Deze laatste getallencoëfficiënt b bevat de grootheden, welke in de differentiaaloperator van v optreden, met name de grootheden m , c en κ . Zij wordt gesplitst in deelen B_1 en B_2

$$b = B_1 + B_2,$$

op zoodanige wijze, dat slechts B_2 funktie is van κ ; B_2 bevat dus de bijdragen van de differentiaaloperator van v , voor zoover zij κ tot coëfficiënt heeft, terwijl B_1 op de rest van deze differentiaaloperator betrekking heeft. Dit laatste deel van de differentiaaloperator is blijkens (53):

$$\text{wat betreft } \Theta(z, \varphi) = 0 : -\sqrt{1-z^2} \frac{\partial v}{\partial z} (m+1+2c),$$

$$\text{en wat betreft } \Phi(z, \varphi) = 0 : \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \frac{\partial v}{\partial \varphi} (m+1+2c).$$

Aan de voorwaarde (88) kan daarom alleen voldaan worden, indien

$$\begin{aligned} -\sqrt{1-z^2} \frac{\partial v}{\partial z} (m+1+2c) &= -\frac{v_0}{\psi_0} B_1 \psi(z, \varphi) \\ + \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \frac{\partial v}{\partial \varphi} (m+1+2c) &= -\frac{v_0}{\psi_0} B_1 \sqrt{1-z^2} \cdot \chi(z, \varphi), \end{aligned}$$

of

$$\left. \begin{aligned} \psi(z, \varphi) &= -\alpha \sqrt{1-z^2} \frac{\partial v}{\partial z} \\ \sqrt{1-z^2} \chi(z, \varphi) &= +\alpha \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \end{aligned} \right\} (99)$$

Dat deze funkties ψ en χ inderdaad de symmetrie bezitten, welke haar verwant doen zijn aan twaalf- en twintigvlak, blijkt, indien inplaats van de hoek-verplaatsingen ψ en χ de lijn-verplaatsingen

$$\begin{aligned} v &= a\psi \\ w &= a\sqrt{1-z^2} \chi \end{aligned}$$

resp. langs den meridiaan en langs de parallelcirkel worden ingevoerd, en verder in de plaats van de hoek-coördinaten ϑ en φ de lijn-coördinaten

$$\begin{aligned} x &= a\vartheta \\ y &= a \sin \vartheta \cdot \varphi. \end{aligned}$$

Door deze transformatie gaat (99) over in

$$\left. \begin{aligned} v &= + aa^2 \frac{\partial v}{\partial x} \\ w &= + aa^2 \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned} \right\} (100)$$

Wordt in ieder punt van den bolwand de verplaatsing av radiaal uitgezet, zoo wordt een oppervlak gevormd, dat bepalend is voor de verplaatsingen v en w ; immers is de hoek ε tusschen het raakvlak aan den bol en het raakvlak aan het av -vlak in het overeenkomstige punt een maat voor de verplaatsing in het bolvlak, doordat het product van de constante lengte aa en $\text{tg } \varepsilon$ blijkens (100) gelijk is aan de verplaatsing in de richting normaal op de snijlijn der beide raakvlakken. Daar het av -vlak de symmetrie van het twaalf- en het twintig-vlak bezit, moeten ook de hellingshoeken, en daarmede de verplaatsingen langs den bolwand, deze symmetrie bezitten.

Na substitutie van (95) in (99), en daarna van ψ , χ en v in de differentiaalvergelijkingen (53) volgt, indien nog gesteld wordt

$$\alpha = -\frac{\psi_0}{v_0},$$

$$\left. \begin{aligned} \Theta(z, \varphi) &\equiv - \left[(41m+1+42c) + (m+1 + 2c+40\kappa m) \frac{v_0}{\psi_0} \right] \times \\ &\quad \times \psi(z, \varphi) = 0 \\ \Phi(z, \varphi) &\equiv - \left[(41m+1+42c) + (m+1 + 2c+40\kappa m) \frac{v_0}{\psi_0} \right] \times \\ &\quad \times \sqrt{1-z^2} \cdot \chi(z, \varphi) = 0 \\ R(z, \varphi) &\equiv - \left[42 \frac{\psi_0}{v_0} (m+1 + 2c + 40\kappa m) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(m+1 + 2c - 20c \left(1 - \frac{2h}{a} \right) + 20\kappa (43m+1) \right) \right] \times \\ &\quad \times [v(z, \varphi) - v_1] - \\ &\quad - \left[2 [m+1 + 2c + c \left(1 - \frac{2h}{a} \right) - \kappa (m+1)] v_1 \right] = 0, \end{aligned} \right\} (101)$$

zoodat inderdaad aan (88) door de differentiaalvergelijkingen voldaan blijkt te kunnen worden.

Op gelijke wijze als bij de in de vorige §§ behandelde knikgevallen volgt hierna de berekening van de spanning, bij welke knikmogelijkheid optreedt:

$$-\frac{S_0}{E} = \frac{1 + \frac{h^2}{3a^2} \left(1680 \frac{m^2}{m^2 - 1} - 1 \right)}{39 + \frac{3}{m} - \frac{2h}{a} \left(41 + \frac{1}{m} \right)}, \quad (102)$$

waarvan de kleinst mogelijke waarde $\frac{1}{40}$ bedraagt.

Evenals bij den knik volgens zes- en achthoek voldoet de knikvorm bij welke slechts radiale verplaatsing optreedt ($v_1 \neq 0$) aan de gestelde symmetrievorwaarden, zoodat ook hier de knikspanning (93a) wordt gevonden.

HOOFDSTUK V

DE ALGEMEENE OPLOSSING

§ 1 - OPLOSSINGEN VAN DEN VORM (99)

a - De substitutie van (99) in de differentiaalvergelijkingen

In het vorige hoofdstuk is gebleken, dat de differentiaalvergelijkingen (53) zekere oplossingen hebben, die in nauwe verwantschap staan tot de veelvlakken, en waarbij tusschen de verplaatsingen in het bolvlak en die loodrecht op het bolvlak de betrekking (99) bestaat. De relatie (99) geldt echter niet alleen voor deze verplaatsingssystemen; immers voldoen niet alleen de functies (83), (90) en (95), welke polyedrische symmetrie bezitten, aan de differentiaalvergelijkingen, maar ook ieder der hen samenstellende functies voorzover zij op een zelfde waarde k ($\cos k\varphi$) betrekking hebben. De polyedrische knikvormen zijn daarom opgebouwd uit meer elementaire knikvormen, die ieder voor zich beschreven worden door een stelsel eigenfuncties:

$$\psi_k(z, \varphi), \chi_k(z, \varphi), v_k(z, \varphi) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Het is nu voor de hand liggend te veronderstellen, dat (99) niet slechts geldt met betrekking tot die eigenfuncties, uit welke de beschreven polyedrische knikvormen zijn opgebouwd, doch dat (99) een eigenschap zal zijn van een ruimere groep eigenfuncties.

In deze § worden nu voorloopig alle oplossingen der vergelijkingen (53) bepaald, die tevens aan (99) voldoen.

Substitutie van (99) in de differentiaalvergelijkingen (53) geeft na eenige herleidng:

$$\begin{aligned} \Theta(z, \varphi) \equiv -\sqrt{1-z^2} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (1-\alpha)(m+1+2c)v + \right. \\ \left. + [\alpha m - \alpha(m+c)]H(v) \right\} = 0. \end{aligned} \tag{103a}$$

$$\Phi(z, \varphi) \equiv \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ (1-\alpha)(m+1+2c)v + [\kappa m - \alpha(m+c)] H(v) \right\} = 0. \quad (103b)$$

$$R(z, \varphi) = -(1-\alpha) \left\{ (m+1+2c)2v + \kappa m [HH(v) + 2H(v)] \right\} + \left[\alpha(m+1+2c) - \kappa(m+1) + c \left(1 - \frac{2h}{a} \right) \right] H(v) = 0, \quad (103c)$$

waarin de differentiaaloperator H gedefinieerd is door

$$H(\cdot) = -(1-z^2) \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial z^2} + 2z \frac{\partial(\cdot)}{\partial z} - 2(\cdot) - \frac{1}{1-z^2} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \varphi^2}. \quad (104)$$

Uit (103a) volgt

$$(1-\alpha)(m+1+2c)v + [\kappa m - \alpha(m+c)] H(v) = f(\varphi), \quad (105a)$$

terwijl uit (103b) volgt

$$(1-\alpha)(m+1+2c)v + [\kappa m - \alpha(m+c)] H(v) = g(z), \quad (105b)$$

zoodat:

$$f(\varphi) = g(z) = \text{constante.}$$

Onder invoering van den parameter λ

$$\lambda = - \frac{(1-\alpha)(m+1+2c)}{\kappa m - \alpha(m+c)} \quad (106)$$

gaat (105) over in

$$H(v) = \lambda v + K, \quad (107)$$

waarin K een willekeurige constante is.

Door toepassing van den operator H op (107) wordt gevonden

$$HH(v) = \lambda H(v) + H(K) = \lambda^2 v + (\lambda - 2)K, \quad (108)$$

zoodat (103c) overgaat in

$$\beta v + \gamma K = 0, \quad (109)$$

waarin

$$\beta = - (1 - a) [2 (m + 1 + 2c) + \lambda (\lambda + 2) \kappa m] + \\ + \lambda \left[a (m + 1 + 2c) - \kappa (m + 1) + c \left(1 - \frac{2h}{a} \right) \right]$$

$$\gamma = - (1 - a) \lambda \kappa m + a (m + 1 + 2c) - \kappa (m + 1) + c \left(1 - \frac{2h}{a} \right).$$

b - De eigenfuncties

De differentiaalvergelijking, waaraan v moet voldoen, is overeenkomstig (107) en (104)

$$- (1 - z^2) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + 2z \frac{\partial v}{\partial z} - (\lambda + 2) v - \frac{1}{1 - z^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = K. \quad (110)$$

Ter oplossing van deze vergelijking worden bolfuncties ingevoerd ¹⁾, die, zooals bekend is, worden ingedeeld in twee groepen: die van de eerste soort, welke in de punten $z = \pm 1$ eindig blijven, en die van de tweede soort, die in deze punten oneindig groote waarden aannemen. Daar het uitgesloten is, dat een punt van het boloppervlak een oneindig groote verplaatsing ondergaat, zullen slechts de bolfuncties van de eerste soort bij de ontwikkeling van $v(z, \varphi)$ naar bolfuncties gebruikt kunnen worden.

In het algemeen zijn de bolfuncties van ϑ en φ rationeele functies in $\cos \vartheta$, $\sin \vartheta \cos \varphi$ en $\sin \vartheta \sin \varphi$, zoodat iedere bolfunctie de eigenschappen bezit, welke door (56) en (57) geëischt worden. Een oplossing van v , die uit bolfuncties is samengesteld, voldoet dus zonder meer aan deze voorwaarde.

De bolfuncties van de n^{de} orde voldoen aan de differentiaalvergelijking

$$(1 - z^2) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2z \frac{\partial u}{\partial z} + n(n + 1) u + \frac{1}{1 - z^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (111)$$

waarin n ieder geheel positief getal kan zijn.

Met behulp van (104) kan (111) geschreven worden als

$$- H(u) + [n(n + 1) - 2] u = 0. \quad (111a)$$

1) Vergelijk: RIEMANN—WEBER, Die Differentialgleichungen der Physik, 7^e Auflage, 1925, Teil I, Kap. VIII, § 2, u. Kap. XVII, § 2, 3.

Er zijn totaal $2n + 1$ bolfuncties van de eerste soort, die aan deze vergelijking voldoen, n.l.:

$$\left. \begin{aligned} u_{n\nu 1} &= P_n^\nu(z) \cos \nu\varphi & \nu &= 0, 1, 2, \dots, n \\ u_{n\nu 2} &= P_n^\nu(z) \sin \nu\varphi & \nu &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right\} (112)$$

De functie $P_n^\nu(z)$ is de ν^{de} aan het LEGENDRE-polynoom van de n^{de} orde toegevoegde functie:

$$P_n^\nu(z) = \sqrt{(z^2 - 1)^\nu} \cdot \frac{d^\nu P_n(z)}{dz^\nu}. \quad (113)$$

Daar de functies u een z.g. volledig systeem vormen, kan gesteld worden

$$v(z, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^n P_n^\nu(z) \cdot (a_{n\nu} \cos \nu\varphi + b_{n\nu} \sin \nu\varphi). \quad (114)$$

De voorwaarde (55a) stelt aan de ontwikkeling (114) geen bepaalde eischen, immers is wegens (113) in de polen

$$P_n^\nu(z) = 0 \text{ voor } \nu \neq 0.$$

En daar ν in de polen geen singulariteiten bezit is de verplaatsingscomponente van de pool in het bolvlak, die zich samenstelt uit ψ en χ , ondubbelzinnig bepaald door (114) in combinatie met (99), zoodat met (114) tevens steeds voldaan wordt aan de voorwaarden (55b, c).

Substitutie van (114) in vergelijking (110)

$$H(v) - \lambda v = K$$

geeft, omdat de bolfuncties voldoen aan (111a)

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^n \left[n(n+1) - 2 \right] P_n^\nu(z) (a_{n\nu} \cos \nu\varphi + b_{n\nu} \sin \nu\varphi) - \\ - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^n P_n^\nu(z) (a_{n\nu} \cos \nu\varphi + b_{n\nu} \sin \nu\varphi) = K. \end{aligned} \quad (115)$$

Substitutie van (114) in (109) geeft

$$\beta \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=0}^n P_n^v(z) (a_{nv} \cos v\varphi + b_{nv} \sin v\varphi) + \gamma K = 0. \quad (116)$$

Daar de bolfuncties lineair onafhankelijk zijn, wordt aan (115) en (116) alleen voldaan, indien de coëfficiënt van iedere bolfunctie gelijk nul is. Hierbij moet in het oog gehouden worden, dat K , ontwikkeld in bolfuncties, wordt gegeven door

$$K = KP_0(z).$$

Vergelijking (115) levert op:

$$\left. \begin{aligned} [n(n+1) - 2 - \lambda] a_{nv} &= 0 \\ [n(n+1) - 2 - \lambda] b_{nv} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} n &= 1, 2, \dots \sim \\ v &= 0, 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (117a)$$

$$[-2 - \lambda] a_{00} = K, \quad (117b)$$

en vergelijking (116) geeft:

$$\left. \begin{aligned} \beta a_{nv} &= 0 \\ \beta b_{nv} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} n &= 1, 2, \dots \sim \\ v &= 0, 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (118a)$$

$$\beta a_{00} + \gamma K = 0. \quad (118b)$$

Uit (117) en (118) volgt dat a_{nv} en b_{nv} , voor zoover $n \neq 0$, slechts dan van nul kunnen verschillen, indien:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= n(n+1) - 2 \\ \beta &= 0 \end{aligned} \right\} n = 1, 2, \dots \sim, \quad (119a)$$

$$\beta = 0 \quad (119b)$$

terwijl a_{00} slechts ongelijk nul kan zijn, indien de determinant van (117b) en (118b) gelijk nul is

$$\begin{vmatrix} \lambda + 2 & 1 \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0 \quad n = 0. \quad (120)$$

Nadat aan λ eenmaal een der waarden (119a) gegeven is, volgen uit de vergelijkingen (106) en (119b) bepaalde waarden voor de grootheden a en c . In het midden latend of deze vergelijkingen een of meerdere stellen wortels a en c bezitten, beteekent dit, dat met de reeks van λ -waarden (119a) zekere uitwendige belastingen overeenkomen, bij welke knik mogelijk is.

Indien de parameter λ één der door (119a) gedefinieerde waar-

den λ_n bezit en de bijbehorende wortel c niet tevens bij een andere λ -waarde kan optreden, is de oplossing v slechts samengesteld uit bolfuncties van de n^{de} orde, omdat aan (117a), voor zoover deze vergelijking betrekking heeft op de overige bolfuncties, slechts voldaan kan worden met $a_{m\mu} = b_{m\mu} = 0$ ($m \neq n$).

$$v_n(z, \varphi) = \sum_{\nu=0}^n P_n^{\nu}(z) (a_{n\nu} \cos \nu\varphi + b_{n\nu} \sin \nu\varphi) \quad n = 1, 2, \dots, \infty. \quad (121)$$

Hierin kunnen $a_{n\nu}$ en $b_{n\nu}$ nog iedere waarde hebben, zoodat de bij een zekere λ -waarde behorende knikvormen lineair zijn in de $2n + 1$ eigenfuncties (112).

De oplossing der differentiaalvergelijkingen is echter samengesteld uit de willekeurige combinatie van meerdere functies (121), indien de mogelijkheid van meerdere λ -waarden bestaat bij de gegeven grootte der uitwendige belasting, dus bij gegeven c .

c - De eigenwaarden

Bij een gegeven door n gekarakteriseerden knikvorm is λ_n door (119a) bepaald. Hierna volgen a en c uit (106) en (119b).

Uit (106) volgt

$$1 - \alpha = \lambda \cdot \frac{m + c - \kappa m}{m + 1 + 2c + \lambda(m + c)}.$$

Aan (119b) wordt dus steeds voldaan bij iedere waarde van c indien $\lambda = 0$. Hiermee komt overeen $n = 1$ met de bijbehorende verplaatsingen

$$v(\vartheta, \varphi) = a_{10} \cos \vartheta + a_{11} \sin \vartheta \cos \varphi + b_{11} \sin \vartheta \sin \varphi.$$

Dat bij dit systeem van verplaatsingen bij iedere grootte der belasting aan de evenwichtsvergelijkingen wordt voldaan is triviaal, omdat het slechts een translatie van den bol in zijn geheel voorstelt.

Na uitsluiting van deze triviale oplossing treedt in de plaats van (119b)

$$\begin{aligned} & - \frac{1 - \alpha}{\lambda} [2(m + 1 + 2c) + \lambda(\lambda + 2)\kappa m] + \alpha(m + 1 + 2c) - \\ & - \kappa(m + 1) + c \left(1 - \frac{2h}{a}\right) = 0. \end{aligned} \quad (122)$$

Door eliminatie van a tusschen (106) en (122) ontstaat een vergelijking in c en λ . Tot nu toe werden in de differentiaalvergelijkingen termen, welke van de orde c^2 , cx of x^2 waren, verwaarloosd. Daarom moeten deze producten ook nu in de vergelijking van c en λ consequent verwaarloosd worden. Het resultaat van de eliminatie van a is dan:

$$c = \frac{m^2 - 1 + \frac{h^2}{3a^2} [\lambda (\lambda + 2) m^2 - m^2 + 1]}{m (\lambda - 1) + 3 - \frac{2h}{a} (\lambda m + m + 1)}. \quad (123)$$

Na invoering van (54) en van de meer gebruikelijke elasticiteitsconstante

$$E = \frac{2(m+1)}{m} G$$

volgt

$$-\frac{S_0}{E} = \frac{1 + \frac{h^2}{3a^2} \left[\lambda (\lambda + 2) \frac{m^2}{m^2 - 1} - 1 \right]}{\lambda - 1 + \frac{3}{m} - \frac{2h}{a} \left(\lambda + 1 + \frac{1}{m} \right)}. \quad (124)$$

en waarin λ één der termen van de rekenkundige reeks van de tweede orde 4, 10, 18, 28, 40, 54, . . . is.

Formule (124) geeft als functie van λ het systeem van spanningen, bij welke de uitwendig gelijkmatig belaste bol kan knikken. Onder al deze knikspanningen is in het bijzonder de kleinste van beteekenis. Indien in (124) λ opgevat wordt als een continu veranderlijke grootheid — wat zij inderdaad niet is —, neemt

$$\left| \frac{S_0}{E} \right|$$

zijn kleinste waarde aan bij die waarde λ_1 , voor welke

$$\frac{d S_0/E}{d \lambda} = 0.$$

Op deze wijze volgt

$$\lambda_1 = \frac{a}{h} \sqrt{\frac{3(m^2-1)}{m^2}} + \left(1 - \frac{3}{m}\right) \quad (125)$$

en

$$\left(-\frac{S_0}{E}\right)_{min.} = \frac{2h}{a} \sqrt{\frac{m^2}{3(m^2-1)}} \left(1 + \frac{h}{a} \cdot \left[2 + \left(2 - \frac{3}{m}\right) \sqrt{\frac{m^2}{3(m^2-1)}}\right]\right) \quad (126)$$

In het algemeen zal λ_1 niet tot het systeem van getallen (119a) behooren. De kleinste knikspanning is dan grooter dan uit (126) volgen zou, en wordt gevonden bij één van de twee opeenvolgende λ -waarden, waartusschen λ_1 ligt.

Een knikvorm, die nog in het bijzonder aandacht verdient is het geval $n = 0$. Daar $P_0(z) = 1$ is dit het knikgeval, waarbij de bol zijn bolvorm behoudt doch in afmeting onbepaald is. Uit de voorwaarde (120) volgt voor de bijbehorende knikspanning

$$\frac{S_0}{E} = \frac{1}{3} \cdot \frac{m}{m-1} \cdot \frac{1 - \frac{h^2}{3a^2}}{1 - \frac{2h}{3a}} \quad (127)$$

Dit knikgeval is het eenige met positieve spanning. Indien de wand zeer dun is, kan de uitwendige belasting p vervangen worden door een inwendige, zonder dat (127) zijn geldigheid verliest. De bolwand knikt dan uit onder inwendigen overdruk.

Echter komt aan dit resultaat weinig zakelijke beteekenis toe, omdat het geacht moet worden te vallen buiten het gebied, waar de als grondslag genomen stabiliteitstheorie geldigheid bezit. Immers zijn de rekken hier $> 1/3$, zoodat de veronderstelling over de verwaarloosbaarheid van de kwadraten der vervormingen ten opzichte van de eenheid hier niet meer van toepassing kan zijn.

Deze zelfde opmerking geldt ook in meerdere of mindere mate voor alle andere kleinere n -waarden, zooals bij de in het vorige hoofdstuk behandelde gevallen. Deze knikvormen zijn gekarakteriseerd door de volgende n -waarden: de tetraedrische door $n = 3$, die volgens zes- en achthoek door $n = 4$, en de knikvorm volgens twaalf- en twinrievlak door $n = 6$.

In mechanisch opzicht vertoonen deze polyedrische knikvormen geen bijzonderheden, welke ook niet bij de overige aanwezig zijn. Zij zijn samengesteld uit een aantal eigenfuncties, die alle bolfuncties van de n^{de} orde zijn, en welke ieder voor zich de polyedrische structuur missen.

De bij de n^{de} eigenwaarde behorende eigenfuncties zijn alle bolfuncties van de n^{de} orde. Een niet-rotatorisch-symmetrische knikvorm heeft dus, daar hij uit bolfuncties van de n^{de} orde is samengesteld, dezelfde eigenwaarde als de rotatorisch-symmetrische knikvorm van dezelfde orde. Het systeem van eigenwaarden,

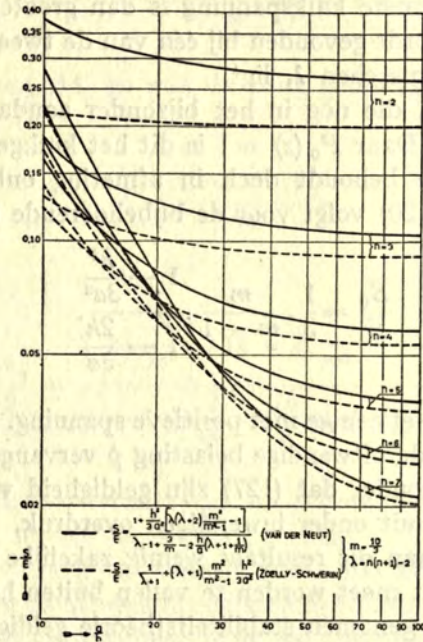


Fig. 15.

dat bij het volledig systeem van eigenfuncties behoort, hetwelk voldoet aan (99), is dus hetzelfde als het systeem van eigenwaarden, dat bij de axiaal symmetrische eigenfuncties behoort, en dat door ZOELLY en SCHWERIN is bepaald. Geschreven in de hier gebezigde notatie is de knikspanning volgens ZOELLY en SCHWERIN

$$-\frac{S_0}{E} = \frac{1}{\lambda+1} + (\lambda+1) \frac{m^2}{m^2-1} \cdot \frac{h^2}{3a^2} \quad (128)$$

De formule (124) is niet identiek met (128); beide formules gaan echter in elkaar over bij groote waarden van λ , waarbij n.l. de eenheid tegenover λ verwaarloosbaar is. De verschillen tusschen (124) en (128) zijn dus van secundaire aard en moeten worden toegeschreven aan de ongelijkheid in aangenomen elasticiteitswet, aan den door ZOELLY vereenvoudigden spanningstoestand I, en aan een door hem toegepaste ruimere verwaarloozing van kleine termen bij de opstelling van zijn differentiaalvergelijkingen.

Over de beteekenis van deze verschillen geeft fig. 15, waarin $-\frac{S_0}{E}$ voor verschillende kleine λ -waarden is uitgezet als functie van $\frac{h}{a}$, een indruk. Tevens blijkt eruit hoe bij bepaalde waarden van $\frac{S_0}{E}$ en $\frac{h}{a}$, die gevonden worden uit de snijpunten van twee lijnen λ , knik mogelijk is volgens de knikvormen, die bij deze beide λ -waarden behooren. In deze bijzondere gevallen stelt de algemeene oplossing der differentiaalvergelijkingen zich dus samen uit de combinatie van de twee bijbehorende functies (121).

§ 2 - DE ALGEMEENHEID VAN DE VERKREGEN OPLOSSING

a - Algemeene substitutie

Door de substitutie van (99) werden de drie differentiaalvergelijkingen sterk vereenvoudigd, echter ging deze vereenvoudiging ten koste van de algemeenheid. Zonder dat de algemeenheid verloren gaat kan een substitutie worden uitgevoerd, die de in § 1 toegepaste substitutie als bijzonder geval omvat, en die tot vereenvoudigingen van gelijken aard aanleiding geven moet. In de plaats van de functies $\psi(z, \varphi)$ en $\chi(z, \varphi)$ worden nu functies $\Psi(z, \varphi)$ en $X(z, \varphi)$ gesteld, welke met de eerstgenoemde samenhangen volgens

$$\left. \begin{aligned} \psi(z, \varphi) &= \sqrt{1-z^2} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \\ \sqrt{1-z^2} \cdot \chi(z, \varphi) &= -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \frac{\partial X}{\partial \varphi} \end{aligned} \right\} (129)$$

Met deze wijze van definieeren van Ψ en X hangt samen, dat bij gegeven funkties ψ en χ de funkties Ψ en X niet ondubbelzinnig bepaald zijn: Ψ kan nog met iedere funktie $f(\varphi)$ en X nog met iedere funktie $g(z)$ vermeerderd worden.

Indien $\Psi = X = -av$, stelt (129) de in § 1 gegeven groep van oplossingen voor.

Substitutie van (129) in de differentiaalvergelijkingen (53) geeft aanleiding tot de vergelijkingen

$$\Theta(z, \varphi) = -\sqrt{1-z^2} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (m+1+2c)(\Psi+v) + (m+c)H(\Psi) + \right. \\ \left. + \kappa m H(v) + \frac{m+1+2c}{2} \cdot \frac{1}{1-z^2} \frac{\partial^2(\Psi-X)}{\partial \varphi^2} \right\} = 0. \quad (130a)$$

$$\Phi(z, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ (m+1+2c)(X+v) + (m+c)H(X) + \right. \\ \left. + \kappa m H(v) + \frac{m+1+2c}{2} \left[-(1-z^2) \frac{\partial^2(\Psi-X)}{\partial z^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2z \frac{\partial(\Psi-X)}{\partial z} \right] \right\} = 0. \quad (130b)$$

Omdat voor het volgende de vorm van de vergelijking

$$R(z, \varphi) = 0$$

niet essentieel is, wordt het resultaat van de substitutie van (129) hier onvermeld gelaten.

Uit de vergelijkingen (130) kan een vergelijking in $\Psi - X$ verkregen worden:

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \cdot \frac{\partial \Theta(z, \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sqrt{1-z^2} \cdot \Phi(z, \varphi) \right) = -\frac{m-1}{2} H \frac{\partial^2(\Psi-X)}{\partial z \partial \varphi} = 0.$$

De differentiaalvergelijking, waaraan $\Psi - X$ moet voldoen, is dus

$$H \frac{\partial^2(\Psi-X)}{\partial z \partial \varphi} = 0. \quad (131)$$

De grootheid

$$\frac{\partial^2(\Psi-X)}{\partial z \partial \varphi}$$

heeft een fysieke beteekenis. Uit (129) volgt n.l.

$$\frac{\partial^2 (\Psi - X)}{\partial z \partial \varphi} = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \frac{\partial (1 - z^2) \chi}{\partial z}$$

en volgens (42) is deze functie van ψ en χ gelijk aan $-2\omega_{\vartheta\phi}$, de rotatiecomponente in het vlak van den bol.

$$\frac{\partial^2 (\Psi - X)}{\partial z \partial \varphi} = -2\omega_{\vartheta\phi}. \quad (132)$$

Vergelijking (131) gaat dus over in

$$H(\omega_{\vartheta\phi}) = 0. \quad (133)$$

De oplossing van (133) moet voldoen aan de voorwaarde, dat $\omega_{\vartheta\phi}$ ook in de polen analytisch blijft. Om gelijke redenen als in § 1 golden ten opzichte van de functie $v(z, \varphi)$ moet dan ook hier de functie $\omega_{\vartheta\phi}(z, \varphi)$ ontwikkelbaar zijn volgens bolfuncties van de eerste soort.

$$\omega_{\vartheta\phi}(z, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=0}^n P_n^v(z) (a_{nv} \cos v\varphi + b_{nv} \sin v\varphi). \quad (134)$$

Substitutie van (134) in (133) geeft in verband met (111a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=0}^n [n(n+1) - 2] P_n^v(z) (a_{nv} \cos v\varphi + b_{nv} \sin v\varphi) = 0. \quad (135)$$

Wegens de lineaire onafhankelijkheid der bolfuncties onderling wordt aan (135) slechts voldaan indien:

$$\begin{aligned} [n(n+1) - 2] a_{nv} &= 0 \\ [n(n+1) - 2] b_{nv} &= 0, \end{aligned}$$

zoodat a_{nv} en b_{nv} slechts ongelijk nul kunnen zijn indien $n = 1$.

De algemeene oplossing van (133) wordt dus gevormd door

$$\omega_{\vartheta\phi}(\vartheta, \varphi) = a_{10} \cos \vartheta + a_{11} \sin \vartheta \cos \varphi + b_{11} \sin \vartheta \sin \varphi.$$

Deze oplossing is triviaal, omdat zij een willekeurige rotatie van

den bol voorstelt en daarom in mechanisch opzicht onbelangrijk is. Met uitsluiting van deze triviale oplossing volgt nu

$$\omega \delta \phi = 0,$$

zoodat na dubbele integratie van (132) volgt

$$\Psi - X = -f(\varphi) + g(z). \quad (136)$$

Door de wijze, waarop Ψ en X gedefinieerd zijn, kan aan de eerste dezer functies nog $f(\varphi)$ en aan de tweede $g(z)$ worden toegevoegd, zonder dat hun mechanische beteekenis eenige wijziging ondergaat. In de plaats van (136) mag dus gesteld worden

$$\Psi - X = 0. \quad (137)$$

b - De potentiaal der verplaatsingen in het bolvlak

Na invoering van (137) in (130a, b) volgt, indien X geëlimineerd wordt, (130a) over z en (130b) over φ geïntegreerd wordt

$$(m + 1 + 2c)(\Psi + v) + (m + c)H(\Psi) + \chi m H(v) = K, \quad (138a)$$

waarin K een willekeurige constante is. Omdat de absolute grootte van Ψ geen fysische beteekenis heeft, kan aan deze functie steeds een willekeurig constant bedrag worden toegevoegd, zonder dat dit van essentielen invloed is op de differentiaalvergelijking. Door deze toevoeging kan echter steeds het linkerlid der vergelijking (138) met het bedrag K vermeerderd worden, zoodat in het algemeen het rechterlid van (138) gelijk nul gesteld kan worden.

Substitutie van (129) en (137) in (53c) geeft

$$R(z, \varphi) \equiv - (m+1+2c) \left[2(\Psi+v) + H(\Psi) \right] - \left[\chi(m+1) - c \left(1 - \frac{2h}{a} \right) \right] H(v) - \chi m \left[HH(\Psi+v) + 2H(\Psi+v) \right] = 0. \quad (138b)$$

De functie Ψ staat tot de verplaatsingscomponenten ψ en χ in dezelfde relatie als de functie $-\alpha v$ in de vergelijking (99). Uit (99) volgde ¹⁾, dat αv , in ieder punt van den bol radiaaluit gezet,

1) Vergelijk hoofdstuk IV, § 5.

een oppervlak vormt, waarvan de hellingen evenredig zijn met de verplaatsingen in het bolvlak. Dezelfde beteekenis heeft dan ook nu het Ψ -vlak, dat ontstaat indien $\Psi(\vartheta, \varphi)$ radiaal op het boloppervlak wordt uitgezet: de hoek tusschen het raakvlak aan den bol in het punt ϑ, φ en het raakvlak aan $\Psi(\vartheta, \varphi)$ is evenredig met de verplaatsingscomponente in het bolvlak van het punt ϑ, φ ; verder staat de snijlijn der genoemde raakvlakken loodrecht op de richting van deze verplaatsing.

De funktie Ψ mag daarom worden opgevat als de potentiaal-funkte van de verplaatsingen in den bolwand.

De voorwaarden, dat de verplaatsing in de omgeving der polen analytisch zijn moet, stelt aan de funktie Ψ den eisch, dat ook zij in de omgeving der polen analytisch is. Ψ is dus ontwikkelbaar op gelijke wijze als v .

$$\Psi(z, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^n P_n^\nu(z) (a_{n\nu} \cos \nu\varphi + b_{n\nu} \sin \nu\varphi) \quad (139a)$$

$$v(z, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^n P_n^\nu(z) (c_{n\nu} \cos \nu\varphi + d_{n\nu} \sin \nu\varphi) \quad (139b)$$

Substitutie van (139a, b) in (138a, b) geeft bij gelijktijdige toepassing van de eigenschap (111a) der bolfunkties

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^n [(m+1+2c) + \lambda_n (m+c)] P_n^\nu (a_{n\nu} \cos \nu\varphi + b_{n\nu} \sin \nu\varphi) + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^n [(m+1+2c) + \lambda_n \kappa m] P_n^\nu (c_{n\nu} \cos \nu\varphi + d_{n\nu} \sin \nu\varphi) = 0 \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^n -(\lambda_n + 2) [(m+1+2c) + \lambda_n \kappa m] P_n^\nu (z) (a_{n\nu} \cos \nu\varphi + b_{n\nu} \sin \nu\varphi) + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^n \left\{ 2(m+1+2c) + \lambda_n \left[\kappa(m+1) - c \left(1 - \frac{2h}{a} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \lambda_n (\lambda_n + 2) \kappa m \right\} P_n^\nu (z) (c_{n\nu} \cos \nu\varphi + d_{n\nu} \sin \nu\varphi) = 0, \end{aligned}$$

waarin $\lambda_n = n(n+1) - 2$.

Wegens de lineaire onafhankelijkheid der bolfuncties wordt aan bovenstaande voorwaarden slechts voldaan, indien voor iedere combinatie van n en ν geldt:

$$\begin{aligned} [(m+1+2c) + \lambda_n (m+c)] a_{n\nu} + [(m+1+2c) + \lambda_n \kappa m] c_{n\nu} &= 0 \\ (\lambda_n + 2) \left[(m+1+2c) + \lambda_n \kappa m \right] a_{n\nu} + \left\{ 2(m+1+2c) + \right. & \\ \left. + \lambda_n \left[\kappa (m+1) - c \left(1 - \frac{2h}{a} \right) \right] + \lambda_n (\lambda_n + 2) \kappa m \right\} c_{n\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (140)$$

Dezelfde betrekkingen, doch inplaats van met de coëfficiënten a en c met de coëfficiënten b en d , stellen de voorwaarden, waaraan b en d moeten voldoen.

De coëfficiënten $a_{n\nu}$ en $c_{n\nu}$ (of $b_{n\nu}$ en $d_{n\nu}$) kunnen alleen dan ongelijk nul zijn, indien de beide bijbehorende vergelijkingen (140) afhankelijk zijn. Na substitutie van

$$\frac{a_{n\nu}}{c_{n\nu}} = -\alpha_{n\nu}$$

en deeling van (140) door $c_{n\nu}$ ontstaat een tweetal vergelijkingen, dat volkomen gelijk is aan het stel (106) en (119b).

Eliminatie van $a_{n\nu}$ geeft tusschen c en λ_n de betrekking (123), welke ook hier het systeem van eigenwaarden c bepaalt. Bij een bepaalde eigenwaarde c laat (123), behoudens in de gevallen waarop in het eind van § 1 werd gedoeld, slechts een enkele λ_n -waarde toe, d. w. z. de bijbehorende eigenfuncties zijn

$$\begin{aligned} \Psi_n(z, \varphi) &= \sum_{\nu=0}^n P_n^\nu(z) (a_{n\nu} \cos \nu\varphi + b_{n\nu} \sin \nu\varphi) \\ v_n(z, \varphi) &= \sum_{\nu=0}^n P_n^\nu(z) (c_{n\nu} \cos \nu\varphi + d_{n\nu} \sin \nu\varphi) \end{aligned} \quad (141)$$

De coëfficiënten der lineaire vergelijkingen (140) zijn onafhankelijk van het getal ν , zoodat de wortel $\alpha_{n\nu}$ slechts afhankelijk is van λ_n en c ; en dus alleen van n afhankelijk is.

$$\alpha_{n\nu} = \alpha_n \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Dit ingevoerd in (141) geeft de algemeene eigenschap, welke de eigenfuncties van dit bolprobleem bezitten

$$\Psi_n(z, \varphi) = -\alpha_n v_n(z, \varphi). \quad (142)$$

Hiermede is de noodzakelijkheid van de in § 1 ingevoerde relatie (99) aangetoond. Dit resultaat laat zich als volgt formuleeren: de verplaatsingen in de richting loodrecht op den bolwand hebben ten opzichte van de verplaatsingen in het vlak van den bolwand de beteekenis van potentiaal.

De afwijking in (41) geeft de kleinere eigenwaarde welke de
aanwaakt van de toegenomen bestanden

$$\lambda_2(z, \psi) = -\alpha_2(z, \psi) \quad (42)$$

terwyl de noodzaakelijkheid van de in § 1 ingevoerde ver-
andering (42) tevens is het resultaat van de volgende toegenomen de
veranderingen in de richting loodrecht op het vlak van de
oprichting van de veranderingen in het vlak van den toestand de
betreffende van toegenomen.

De afwijking in (42) geeft de kleinere eigenwaarde welke de
aanwaakt van de toegenomen bestanden

De afwijking in (42) geeft de kleinere eigenwaarde welke de
aanwaakt van de toegenomen bestanden

De afwijking in (42) geeft de kleinere eigenwaarde welke de
aanwaakt van de toegenomen bestanden

De afwijking in (42) geeft de kleinere eigenwaarde welke de
aanwaakt van de toegenomen bestanden

STELLINGEN

I

De methoden van RITZ en GALERKIN voor de bepaling van benaderingsoplossingen van de gewone elasticiteitsvergelijkingen kunnen ook worden gebruikt bij de oplossing van de algemeenere, door BIEZENO en HENCKY opgestelde elasticiteitsvergelijkingen ¹⁾. Ook voor het tweede geval kan de identiteit der beide methoden — die voor het eerste geval reeds vaststond ²⁾ — worden bewezen.

- 1) C. B. BIEZENO and H. HENCKY: On the General Theory of Elastic Stability. Proc. K. A. v. W., Vol. XXXI, No. 6, Equation (6abc).
- 2) C. B. BIEZENO: Over een vereenvoudiging en over een uitbreiding van de methode van RITZ—, „CHRISTIAAN HUYGENS”, 3e Jaargang 1923—'24, No. II.

II

Het knikgeval bij de dunwandige, door wringende koppels in haar uiteinden belaste buis, waarbij deze in haar dwarsdoorsnede cirkelvormig blijft, en waarbij de middelpunten dezer dwarsdoorsneden zich in een schroeflijn plaatsen, wordt volgens SCHWERIN ¹⁾ bereikt bij een belasting, die

$$\frac{1}{1 - \sigma}$$

maal zoo groot is als de belasting, bij welke volgens GREENHILL ²⁾ de buis uitknikt ($\sigma =$ getal van POISSON). Indien bij de berekening van het kritisch wringend moment wordt uitgegaan van de stabiliteitstheorie van BIEZENO en HENCKY, wordt de door GREENHILL afgeleide waarde bevestigd.

- 1) E. SCHWERIN: Die Torsionsstabilität des Dünwandigen Rohres. Proc. of the 1st Intern. Congr. for Appl. Mech. Delft 1924, p. 255.
- 2) A. G. GREENHILL: Proc. of the Institution of Mech. Engineers 1883, p. 183.

A. VAN DER NEUT.

II

III

Bij prismatische balken, waarvan de dwarsdoorsnede meervoudig samenhangend is, en die uit dunne wanden zijn samengesteld, is bij buiging door dwarskracht de lijnintegraal der schuifspanning langs iedere in zichzelf gesloten, binnen de dwarsdoorsnede verloopende, lijn gelijk nul.

IV

De secundaire momenten in de doorgaande gordingen van vakwerkliggers met constante hoogte worden goed benaderd, indien de kromming van de gording verondersteld wordt gelijk te zijn aan de kromming van den balk, die in iedere dwarsdoorsnede dezelfde buigingsstijfheid heeft als de vakwerkligger.

V

Wanneer gedurende korten tijd een axiale kracht werkt op een slanke, nagenoeg rechte, staaf, is de intensiteit van den stoot niet de, voor de belasting van de staaf, beslissende grootheid.

VI

De door BACH¹⁾ gegeven voorstelling van het gedrag van den gebogen balk, volgens welke de balk zou bestaan uit zich in zijn lengterichting uitstrekkende vezels, werkt misleidend, zooals blijkt uit de foutieve conclusies, waartoe deze beschouwingwijze aanleiding geeft, wanneer een zekere wisselwerking der vezels ten gevolge van de dwarscontractie wordt verwacht, die in werkelijkheid fictief is.

1) C. BACH und R. BAUMANN: Elastizität und Festigkeit. 9. Auflage Berlin 1924, S. 263 u. f.

VII

Bij Compound-zuigerstoomwerktuigen volgens het systeem van WOOLF verdient het aanbeveling de vullingen van den H. D.-cylinder aan de beide zuigerzijden zoodanig te kiezen, dat de totale expansieverhouding voor beide cylinderzijden dezelfde is.

III

VIII

Ten onrechte acht STUMPF volledige uitbalanceering van zijn Compound-scheepsmachine mogelijk ¹⁾.

1) Werft, Reederei,, Hafen, 22 Juni 1927.

IX

De door PRANDTL ¹⁾ gegeven beschouwingen over de richting van de ter plaatse van een gebonden wervel op de vloeistof uitgeoefende, kracht, leveren nog niet het bewijs, dat deze richting loodrecht staat op de plaatselijke stroomingsrichting.

1) L. PRANDTL: Tragflügeltheorie I, Nachrichten von der Königl. Gesellsch. der Wissensch. zu Göttingen 1918, S. 459.

X

De grootste belastingen, aan welke verkeersvliegtuigen bij normaal gebruik in de lucht worden onderworpen, treden op ten gevolge van atmosferische storingen.

XI

Het vlieggeval met ver naar achteren gelegen drukpunt, dat algemeen in belastingsvoorschriften voor verkeersvliegtuigen is opgenomen, en dat meestal beslissend is bij het bepalen der afmetingen van den achterligger in vleugels van het twee-ligger-systeem, correspondeert niet met een, bij normaal gebruik van een verkeersvliegtuig mogelijken, belastingstoestand.

XII

De oplossing van de differentiaalvergelijkingen voor den vrijdragenden al of niet bekleeden vleugel met ribverband met behulp van machtreeksen ¹⁾ leidt alleen dan tot practisch-convergente reeksen, indien de verhouding van de torsiestijfheid der vleugeldoorsnede tot de buigingsstijfheid der langsliggers klein is in de omgeving van het vleugeluiteinde.

IV

Bij naar de uiteinden dunner wordende vleugels, welke met triplex bekleed zijn, wordt niet aan deze voorwaarde voldaan.

- 1) C. KONING: De invloed van het ribverband op de sterkte van vliegtuigvleugels IV, R. S. L.-Rapport V. 357. (De Ingenieur 1931, No. 3 en Verslagen en Verhandelingen van den R. S. L., Deel VI, 1931, blz. 35).

XIII

De oplossing van de in stelling XII genoemde vergelijkingen kan op eenvoudige wijze door toepassing van differentie-rekening worden benaderd.

XIV

De afschuiving van de doosliggers in houten vleugels is van niet te verwaarloozen beteekenis voor den invloed van het ribverband op de spanningsverdeeling onder torsiebelasting.

XV

Plotselinge dikteveranderingen in de bekleeding van vliegtuigvleugels veroorzaken bij buiging van den vleugel in deze bekleeding plaatselijk hoge schuifspanningen, welke van dezelfde orde van grootte zijn als de schuifspanningen, die er in optreden bij torsie.

XVI

Bij vliegproeven kunnen zoowel de door de strooming om den thermometer veroorzaakte miswijzing als de traagheid van den thermometer, fouten in de temperatuursmeting van de lucht tengevolge hebben, die van practisch belang kunnen worden bij de in de toekomst te verwachten vliegtuigprestaties.

XVII

In de discussie over de samenstelling van het wiskunde-onderwijs aan middelbare scholen moet niet in de eerste plaats tot norm gesteld worden de practische waarde van het onderwezene met het oog op zijn toepassingen, doch veeleer zijn beteekenis als hulpmiddel ter vorming van het exact denken.

ERRATA.

Blz.	in plaats van:	te lezen:
15 formule (13)	$\left(\frac{\bar{S}'_{mn}}{1+\Delta}\right) - S'_{mn}$	$\left(\frac{\bar{S}'_{mn}}{1+\Delta} - S'_{mn}\right)$
21 formule (21), 4 ^{de} regel	ω_r	$\omega_{\phi r}$
„ „ „	$\sin \chi$	$\sin \vartheta$
30 5 ^{de} regel	$\partial \vartheta \phi$	$\sigma \vartheta \phi$
36 formule (39) 5 ^{de} regel	$C_r (\Delta . \delta')$	$C_r (\Delta . \sigma')$
38 formule (42), 3 ^{de} regel	$\frac{\partial^2 v_0}{\sin^2 \partial \vartheta \partial \varphi^2}$	$\frac{\partial^2 v_0}{\sin^2 \vartheta \partial \varphi^2}$
39 formule (43c), 4 ^{de} regel	$\frac{\partial^3 x}{\partial \vartheta^2 \partial \varphi}$	$\frac{\partial^3 \chi}{\partial \vartheta^2 \partial \varphi}$

FECHA DE DEVOLUCION

El lector se obliga a devolver este libro antes del vencimiento de préstamo señalado por el último sello.





