PROEVE EENER THEORIE VAN HET ROTEEREND MAGNETISCH VELD.

PROEVE EENER THEORIE VAN HET ROTEEREND MAGNETISCH VELD.

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE TECHNISCHE WETENSCHAP AAN DE TECHNISCHE HOOGESCHOOL TE DELFT, OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS DR. J. CARDINAAL, W.I., HOOGLEERAAR IN DE AFDEELING DER ALGEMEENE WETENSCHAPPEN, VOOR DEN SENAAT TE VERDEDIGEN OP MAANDAG 22 APRIL 1912, DES NAMIDDAGS TE 3 UUR, DOOR

PAULUS MARTINUS VERHOECKX, W.I., GEBOREN TE 'S-HERTOGENBOSCH.

'S GRAVENHAGE — GIUNTA D'ALBANI — 1912

Aan mijne Moeder.

Bij het verschijnen van dit proefschrift is het mij aangenaam een woord van dank te kunnen richten tot mijne beide Promotoren.

Wees er van overtuigd, Hooggeleerde Snijders, dat de van U ondervonden belangstelling in mijnen arbeid door mij op hoogen prijs gesteld is.

Hooggeleerde Schouten, de belangrijke gesprekken, die ik meermalen met U mocht voeren, hebben in een niet geringe mate mijne inzichten omtrent de bruikbaarheid van zuiver wiskundige methoden voor de oplossing van physisch technische vraagstukken verruimd.

Uwe vriendelijke hulpvaardigheid, die ik in zoo velerlei opzicht mocht ondervinden, zal mij steeds in aangename herinnering blijven.

INLEIDING.

Indien we op een ijzeren ring op onderling gelijke afstanden een even aantal, $= 2p$, gelijke spoelen aanbrengen, welke we onderling en met een electrische stroombron zoodanig verbinden, dat een stroom, dien we ons voorloopig constant denken, de opvolgende spoelen telkens in omgekeerden zin doorloopt, zoo zal het magnetisch veld, ontstaande onder den invloed van dezen stroom, hierdoor gekenmerkt zijn, dat op den ring magneetpolen ontstaan, welke, afgezien van hun verschil in teeken, onderling gelijk zijn, en waarvan de begrenzingen samenvallen met de middens der spoelen.

Brengen we op denzelfden ring een tweede systeem spoelen aan, gelijk aan het eerste, en zenden we door deze spoelen eveneens een electrischen stroom, zoo zal onder den invloed van dit systeem eveneens een $2p$-polig magnetisch veld ontstaan.

Het „magnetisch" standsverschil van beide velden zal gelijk zijn aan het standsverschil der beide groepen spoelen, dat we bijgevolg ook als het magnetisch standsverschil der spoelen zullen aanduiden.

De sterkte van beide velden zal afhankelijk zijn van de grootte der stroomen in de beide groepen, en, mits de magnetiseering van den ring nergens de grens der verzadiging nabij komt, zullen we de sterkte der velden als evenredig met de stroomsterkten mogen beschouwen.

Het resulteerend magnetisch veld zal blijkbaar eveneens een $2p$-polig veld zijn, waarvan echter de ligging der polen afhankelijk is van het magnetisch standsverschil der beide groepen, en van de verhouding der beide stroomsterkten, welke we ons tot dusverre nog steeds als constant hebben voorgesteld.

Laten we thans den stroom in een der beide groepen afnemen, zoo verplaatsen zich de polen naar den stand, welken ze zouden innemen indien de tweede groep alleen aanwezig was, en omgekeerd.

Hebben we te doen met wisselstroomen, welke ten opzichte van elkaar een verschil in phase bezitten, zoo zal de verhouding tusschen beide stroomsterkten voortdurend veranderen: m. a. w. het magnetisch veld zal zich continu verplaatsen, en het blijkt mogelijk te zijn standsverschil en phaseverschil zoodanig te kiezen, dat deze verplaatsing van het magnetisch veld bij benadering overeenkomt met eene eenparige rotatie-beweging.

Ferraris was de eerste die, in 1888, op deze wijze een roteerend veld verkreeg met behulp van twee magnetisch 90° ten opzichte van elkaar verplaatste wisselstroomen van gelijke sterkte met een phaseverschil van 90°.

Eenigen tijd later werd zijn arrangement door von Dolivo Dobrowolsky in dier voege gewijzigd, dat in plaats van twee, drie gelijk sterke wisselstroomen werden gebezigd met een magnetisch standsverschil en een verschil in phase van telkens 60°.

De ontdekking van Ferraris leidde tot de uitvinding van den meerphasigen inductiemotor, die voor het eerst in practisch bruikbaren vorm geconstrueerd werd door Dobrowolsky, en waaraan voor een goed deel de snelle vooruitgang der wisselstroomtechniek in de laatste 20 jaar te danken is.

Het beginsel van den inductie-motor komt neer op het volgende:

Brengen we op de as van den eersten ring een tweeden ring aan, welke over zijn geheelen omvang voorzien is van in zichzelf kortgesloten windingen, zoo laat zich de werking van het roteerend veld op dezen ring met behulp van den regel van Lenz als volgt verklaren. In de kortgesloten windingen zullen stroomen geïnduceerd worden, welke eenerzijds het veld verzwakken en waarop anderzijds door dit veld krachten worden uitgeoefend, welke zoodanig zijn, dat zij eene rotatie van den ring in den zin der rotatie van het veld trachten te veroorzaken.

Indien zich geen vreemde krachten tegen de rotatie van den ring verzetten, zoo zal deze zich in beweging stellen en zich zoolang versnellen tot zijn rotatiesnelheid gelijk geworden is aan die van het veld. Gedurende deze versnelling zullen de in de kortgesloten windingen geïnduceerde stroomen geleidelijk op 0 afnemen, en hiermede eveneens hunne reactie op het roteerend veld: zoodra de „synchrone" snelheid bereikt is zal de reactie van den ring op het veld, en hiermede tevens de krachtswerking van het veld op den ring, hebben opgehouden; de ring *blijft* bijgevolg met eenparige snelheid roteeren.

Passen we nu dit beginsel toe op een *motor*, d. w. z. laten we den roteerenden ring mechanischen arbeid verrichten, zoo zal blijkbaar de synchrone snelheid niet *bereikt* kunnen worden: de omwentelingssnelheid van den „rotor" zal steeds achterblijven bij die van het veld, en wel in meerdere mate naarmate de motor zwaarder belast is.

Door Elihu Thomson werd onderzocht in hoeverre het verschijnsel gewijzigd wordt, indien op den vasten ring slechts één enkele groep spoelen wordt aangebracht, waarin een wisselstroom circuleert, m. a. w. indien het roteerend veld door een wisselveld wordt vervangen.

Hij vond dat in een dergelijk veld de rotor niet uit zichzelf in beweging komt, doch eenmaal door een oorzaak van buitenaf in beweging gebracht, van zelf verder roteert en in onbelasten toestand de snelheid aanneemt, overeenkomende met die van een meerphasen-systeem van gelijke frequentie.

Het verschijnsel laat zich gemakkelijk verklaren, indien we opmerken, dat het eenphasen-systeem van Thomson beschouwd kan worden als de superpositie van twee tweephasen-systemen volgens Ferraris van gelijke sterkte, doch waarvan de phasen elkaar in omgekeerden zin opvolgen.

In deze opvatting is het wisselveld te beschouwen als resultante van twee gelijke roteerende velden met gelijke en tegengesteld gerichte omwentelingssnelheden. Zoolang de rotor stilstaat heffen de ponderomotorische werkingen van beide velden elkaar op. De reactie van de in den rotor geïnduceerde stroomen is voor ieder der beide roteerende velden afhankelijk van de relatieve snelheid van den rotor ten opzichte van het beschouwde veld, en dus bij stilstaanden rotor voor beide velden gelijk. Neemt evenwel de rotor aan de rotatie van een der velden deel, zoo is het gevolg hiervan een afname der reactie op het in gelijken zin roteerend veld en eene toename der reactie op het in tegengestelden zin roteerend veld.

Zoodra dus aan den rotor een rotatie in bepaalden zin is meegedeeld neemt het in denzelfden zin roteerende veld de overhand, en de werking van den motor zal steeds meer naderen tot die van een motor met roteerend veld, naarmate zijn snelheid meer nadert tot de synchrone.

Stellen we ons thans de vraag of de verschijnselen, waarmee we bij een inductiemotor te doen hebben, inderdaad zóó eenvoudig zijn als we ze in het voorgaande hebben voorgesteld, zoo moet in de eerste plaats worden uitgemaakt of we in het arrangement van Ferraris of van Dobrowolsky de veranderingen, die het veld ondergaat, in werkelijkheid kunnen omschrijven als eene eenvoudige rotatie, *zonder meer!*

Om deze vraag algemeen te beantwoorden, denken we ons om den vasten ring f gelijke groepen ieder van $2p$ spoelen aangebracht, telkens met een magnetisch standsverschil van $\frac{180^\circ}{f}$, en in deze groepen wisselstroomen telkens met een phaseverschil van eveneens $\frac{180^\circ}{f}$. Op twee tijdstippen, welke het $2f^e$ deel van de periode der wisselstroomen verschillen, zal dan in de bewikkeling van den ring dezelfde stroomverdeeling optreden, echter over den afstand van twee opvolgende spoelen, dus over een hoek $= \frac{180^\circ}{pf}$ verplaatst. Hetzelfde geldt natuurlijk eveneens van de magnetische velden op de beide beschouwde tijdstippen. Indien we dus het veld alleen waarnemen op een aantal tijdstippen, waarvan twee opvolgende telkens het $2f^e$ deel der periode verschillen, zoo vertoont het zich als een veld van constanten vorm en sterkte, roteerende met een constante hoeksnelheid $= \frac{\omega}{p}$, waarin ω de pulsatie der wisselstroomen voorstelt.

Indien we echter, uitgaande van verschillende tijdstippen, het veld op deze wijze waarnemen, zoo zullen we weliswaar telkens een zelfde waarde der constante rotatiesnelheid constateeren, doch het veld zelf zal in het algemeen telkens bepaalde veranderingen in vorm en sterkte ondergaan hebben.

We hebben slechts te doen met een quasi-roteerend veld, waarvan de *gemiddelde* omwentelingssnelheid $\frac{\omega}{p}$ bedraagt.

Slechts in één geval zullen we tot het optreden van een eenparig roteerend veld van constanten vorm en sterkte mogen besluiten, n.l. indien $f = \infty$ is.

Denken we ons een ring, gelijkmatig bewikkeld met een oneindig aantal oneindig dunne windingen, welke in zich zelf zijn kortgesloten, en waarin wisselstroomen optreden van gelijke sterkte en met een phaseverschil, dat voor de stroomen in twee windingen met een standsverschil θ gelijk is aan $p\theta$.

In de onderstelling dat we te doen hebben met enkelvoudige wisselstroomen, wier pulsatie $= \omega$ is, kunnen we de stroomsterkte ten tijde t in een winding, bepaald door den hoek θ, voorstellen door eene uitdrukking van den vorm:

$$i = I \sqrt{2}.\, sin\, (\omega t - p\theta)$$

De stroomverdeeling is dus blijkbaar een $2\,p$-polige sinusoidale, roteerende met de hoeksnelheid $\frac{\omega}{p}$.

Zij zal aanleiding geven tot het optreden van een $2p$-polig sinusoidaal magnetisch veld, roteerend met dezelfde hoeksnelheid.

Met de bepaling van een dergelijk sinusoidaal veld en het onderzoek van zijne eigenschappen zullen we ons in dit proefschrift op de eerste plaats bezighouden, terwijl we daarna den aard en de samenstelling zullen nagaan van de velden, optredende onder den invloed der stroomverdeelingen in de practisch gebruikelijke wikkelingen van wisselstroommachines. Dit onderzoek zal dan in hoofdzaak de volgende resultaten opleveren:

De stroomverdeeling in eene één- of meerphasige wikkeling kan steeds ontbonden worden in een oneindig aantal roteerende sinusoidale stroomverdeelingen, met ieder waarvan een roteerend sinusoidaal veld overeenkomt. Bij meerphasige $2p$-polige wikkelingen zullen we als *hoofdveld* vinden een $2p$-polig veld, roteerende in den zin, waarin de phasen elkaar in de wikkeling opvolgen, doch bovendien een aantal *nevenvelden*, waarvan het aantal polen een veelvoud is van $2p$, en welke afwisselend in omgekeerden en in gelijken zin met het hoofdveld roteeren.

Bij eenphasige wikkelingen vinden we daarentegen dat de velden *paarsgewijs* optreden met gelijk aantal polen, gelijke sterkte, en gelijke doch tegengestelde omwentelingssnelheid. Ook hierbij is het aantal polen steeds deelbaar door $2p$ en is de sterkte der beide $2p$-polige velden in het algemeen belangrijk grooter dan die der overige velden.

Omtrent de bepaling van het magnetisch veld, ontstaande onder den invloed eener gegeven stroomverdeeling, valt het volgende op te merken:

Bij de berekening van electrische machines stelt men zich in den regel tevreden met de bepaling van den krachtstroom per pool, met behulp der bekende formule van Hopkinson:

$$\Sigma \frac{N\,l}{\mu\,D} = 4\,\pi\,n\,\mathrm{I}$$

waarin de sommatie uit te strekken is over de verschillende deelen, waarin men zich het beschouwde magnetisch circuit verdeeld denkt, en waarin *voor ieder dezer deelen* worden voorgesteld:

de gemiddelde krachtstroom door N
de gemiddelde doorsnede door D
de gemiddelde lengte der krachtlijnen door l
de magnetische permeabiliteit door μ

terwijl $n\,\mathrm{I}$ voorstelt het aantal stroomwindingen, onder wier invloed het veld in het beschouwde circuit tot stand komt.

Indien we te doen hebben met een „volkomen" magnetisch circuit, d. i. indien de krachtstroom N overal dezelfde waarde heeft, kan de formule ook als volgt geschreven worden:

$$N\,\Sigma \frac{l}{\mu\,D} = 4\,\pi\,n\,\mathrm{I}$$

De coëfficiënt van N komt in vorm overeen met de uitdrukking voor den Ohm'schen weerstand van een draadvormigen stroomgeleider, en wordt aangeduid als de reluctantie R van het circuit.

Noemen we $4\,\pi\,n\,\mathrm{I}$ de magnetomotorische kracht M van het circuit, zoo kunnen we de uitdrukking voor N bij een volkomen circuit als volgt schijven:

$$N = \frac{M}{R}$$

welke uitdrukking overeenkomt met de wet van Ohm voor de bepaling van een electrischen stroom in een geleider van gegeven weerstand onder den invloed eener gegeven electromotorische kracht.

Aangezien, vooropgesteld de onveranderlijkheid van μ, de evenredigheid van N en M *van zelf spreekt*, ligt in laatstgenoemde betrekking eigenlijk niets bijzonders: zij *definieert* eenvoudig de reluctantie R, en in deze opvatting zullen we de betrekking dan ook in onze beschouwingen bij herhaling toepassen.

Het bijzondere in de practische toepassing is gelegen in de vooruitbepaling der reluctantie uit de afmetingen en de geaardheid der samenstellende deelen van het circuit met behulp van de betrekking:

$$R = \Sigma \frac{l}{\mu D}$$

De formule van Hopkinson berust op de *algemeen geldige* formule:

$$\int \frac{B}{\mu} \, d s = 4 \pi n \mathrm{I}$$

toegepast op eene willekeurige krachtlijn van het circuit, waarin B de waarde der inductie *langs deze krachtlijn* voorstelt.

Zij wordt uit deze formule afgeleid door invoering van

$$N = B \, D$$

en berust dus op de aanname *dat voor één der krachtlijnen van het circuit de inductie B overal gelijk is aan de gemiddelde waarde der inductie over het niveauvlak* door het beschouwde punt der krachtlijn, een onderstelling, waaraan slechts voldaan wordt indien de afmetingen van het beschouwde deel van het niveauvlak overal zéér klein zijn in vergelijking met den kromtestraal der krachtlijn, m. a. w. *indien we te doen hebben met een draadvormig circuit.*

Bij gelijkstroom-machines en in 't algemeen bij machines met vooruitspringende polen kan met voldoende nauwkeurigheid het „gemiddeld" verloop der krachtlijnen worden vastgesteld, en levert de toepassing der Hopkinson'sche formule, met gebruikmaking van een aantal empirisch vastgestelde coëfficiënten, geen ernstig bezwaar op, te minder daar we bij deze machines over geen andere methode ter vooruitbepaling van het veld beschikken.

Bij machines met continu verdeelde wikkelingen daarentegen, met welke we ons uitsluitend zullen bezighouden, berust iedere à-prioristische vaststelling van het krachtlijnen-tracé, evenals die van eene „gemiddelde" krachtlijn, op zuivere fantasie. Bovendien kunnen wij reeds aanstonds opmerken dat de krachtlijnen van eenzelfde circuit onderling zeer belangrijke verschillen zullen vertoonen, waardoor op zichzelf de toepasselijkheid der Hopkinson'sche formule reeds vrij twijfelachtig wordt.

We zullen nu aantoonen, dat juist voor deze klasse van machines het magnetisch veld langs anderen weg nauwkeurig kan worden vastgesteld, en wel door directe integratie der differentiaal-vergelijkingen, welke algemeen de ruimte-verdeeling der magnetische inductie bepalen; hierbij zal echter tevens blijken, dat de theorie van het magnetisch circuit met de op deze wijze verkregen resultaten in tegenspraak is, m.a.w. dat voor de hier bedoelde machines de theorie van het magnetisch circuit tot onjuiste resultaten leidt.

De directe integratie der veld-vergelijkingen heeft dan bovendien nog het voordeel, dat zij ons niet alleen de *waarde* van den krachtstroom leert kennen, doch ons bovendien een nauwkeurig beeld levert van de *verdeeling* der magnetische krachtlijnen, dus van den *vorm* van het veld.

De beteekenis hiervan zal blijken uit de volgende opmerking.

Bij electrische machines, welke met constante spanning en constante snelheid arbeiden, bezit de magnetische krachtstroom een nagenoeg constante waarde.

Door nu in de technische theorieën slechts den *krachtstroom* in te voeren, is men er aan gewoon geraakt het magnetisch *veld* zelf als een constante grootheid te beschouwen.

Dat deze opvatting niet juist *kan* zijn spreekt vanzelf, aangezien het veld als overbrenger der krachtswerkingen tusschen stator en rotor noodzakelijk eene andere gedaante zal moeten aannemen bij verandering der over te brengen krachtswerkingen, dat wil zeggen bij verandering van de belasting der electrische machine.

Omtrent den aard der veranderingen, welke het veld ondergaat bij verandering der belasting, worden we bij het onderzoek naar de verdeeling van het veld volledig ingelicht.

We zullen vinden dat iedere sinusoidale componente van het veld, welke in het algemeen niet symmetrisch is, op hare beurt is saamgesteld uit twee symmetrische sinusoidale velden van verschillend karakter; vallen de symmetrie-lijnen dezer beide velden samen, zoo worden geene krachtswerkingen overgebracht: dit geschiedt eerst zoodra de „enkelvoudige" velden ten opzichte van elkaar verplaatst worden, en voor gegeven sterkte dezer velden blijkt dan de krachtswerking evenredig te zijn met den sinus van hun magnetisch standsverschil.

We zullen dan ook betrekkingen kunnen opstellen, waardoor het mogelijk is de krachtswerking tusschen rotor en stator onmiddellijk uit de verdeeling van het magnetisch veld binnen het entrefer af te leiden.

In de beide laatste hoofdstukken zijn de vergelijkingen afgeleid, welke bij asynchrone motoren voor gegeven klemspanning de beide stroomverdeelingen bepalen als functies der omwentelingssnelheid.

Hiermede hebben we feitelijk reeds het gebied verlaten, waarop zich dit proefschrift beweegt: de theorie *van het roteerend veld*, en zijn we overgegaan op het gebied der *motor*-theorieën.

De vergelijkingen werden opgesteld om te kunnen aantoonen dat de verwaarloozing der nevenvelden in de gangbare motortheorieën leiden kan tot grootere onnauwkeurigheid in de uitkomsten dan gewoonlijk wordt aangenomen.

Het zoeken naar practisch bruikbare methoden ter *oplossing* van deze vergelijkingen vormt echter voor iedere bepaalde klasse van motoren het eigenlijke onderwerp eener *motor-theorie*, en ligt dus geheel buiten het bestek van dit proefschrift.

Ten slotte zij opgemerkt, dat in onze mathematische beschouwingen, waar dit aanleiding gaf tot bekorting van het betoog of tot vereenvoudiging der formules, gebruik gemaakt is van vector-analytische voorstellingen. Hierbij zijn de vector-grootheden ter onderscheiding van scalaire grootheden in het algemeen aangeduid door vet gedrukte letters van het type **A a**, terwijl overigens de gebezigde vector-notaties in overeenstemming gehouden zijn met die, welke door Dr. M. Abraham en Dr. A. Föppl zijn gebezigd in hun bekend werk „Theorie der Elektrizität".

HOOFDSTUK I.

Algemeene beschouwingen.

Voor een gegeven verdeeling van:

de magnetische permeabiliteit μ

en de electrische strooming $\mathbf{I}$

is de verdeeling der magnetische inductie $\mathbf{B}$ bepaald door de differentiaal-vergelijkingen:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

en

$$\operatorname{curl} \frac{\mathbf{B}}{\mu} = 4\pi \mathbf{I}$$

met de grensconditie:

$$\mathbf{B}_\infty = 0$$

Hebben we te doen met een μ-verdeeling, welke onafhankelijk is van den magnetischen toestand, en waarbij dus de permeabiliteit in ieder punt der ruimte eene onveranderlijke waarde bezit, zoo volgt uit de bovenstaande vergelijkingen, dat de $\mathbf{B}$-verdeeling een lineaire functie is der $\mathbf{I}$-verdeeling.

Bepalen we een scalaire functie φ zoodanig dat voor een gegeven $\mathbf{I}$-verdeeling voldaan wordt aan:

$$\mathbf{I} \nabla \varphi = 0$$

Zooals bekend mag ondersteld worden, is er een oneindig aantal functies φ aan te wijzen, welke aan de bovenstaande differentiaal-vergelijking voldoen.

Zijn α en β twee functies, welke aan de vergelijking identiek voldoen, en waartusschen geene betrekking bestaat van den vorm

$$\beta = \Phi(\alpha)$$

zoo is de algemeene oplossing der vergelijking:

$$\varphi = \psi(\alpha\ \beta)$$

waarbij ψ een willekeurige functie is.

We hebben dus te doen met twee van elkaar onafhankelijke oplossingen, en bovendien met een oneindig aantal andere oplossingen, welke uit deze beide kunnen worden afgeleid.

Denken we ons thans twee van elkaar onafhankelijke oplossingen α en β, zoo wordt identiek voldaan aan:

$$\mathbf{I}\,\nabla\,\alpha = 0$$
en
$$\mathbf{I}\,\nabla\,\beta = 0$$

m. a. w. de vector **I** verloopt rakend aan de snijlijn van twee oppervlakken, voorgesteld door

$$\alpha = c$$
$$\beta = c'$$

en deze beide vergelijkingen te samen bepalen dus een zoogenaamde „stroomlijn".

Vervangen we de constanten c en c' door veranderlijke parameters q en q', zoo leveren ons de beide vergelijkingen

$$\alpha = q$$
$$\beta = q'$$

de gezamenlijke stroomlijnen, welke bij de gegeven ruimteverdeeling van **I** optreden.

Ieder der vergelijkingen

$$\alpha = q$$

stelt blijkbaar eene reeks oppervlakken voor, welke de eigenschap bezitten, dat zij door geene enkele stroomlijn kunnen gesneden worden.

Beschouwen we twee oppervlakken dezer reeks:

$$\alpha = c$$
$$\alpha = c'$$

zoo begrenzen deze een schaalvormig deel der ruimte, waarin geene stroomlijnen kunnen in- of uittreden.

Denken we ons nu een vector-verdeeling, welke binnen de schaal overal gelijk is aan **I**, doch die buiten de schaal $= 0$ is, zoo is deze vector-verdeeling, evenals **I** zelf, over de geheele ruimte solenoidaal, en dus *als stroomverdeeling op zich zelf bestaanbaar.*

Blijkbaar verdeelen dus een aantal oppervlakken, behoorende tot de reeks

$$\alpha = q$$

de ruimte in een aantal *stroomschalen*, binnen ieder waarvan de electrische strooming op zichzelf bestaanbaar is.

Kennen we de **B**-verdeelingen, ontstaande onder den invloed der electrische stroomingen binnen ieder dezer schalen afzonderlijk, zoo levert ons de vector-sommatie dezer verdeelingen de werkelijke **B**-verdeeling, ontstaande onder den invloed der totale electrische strooming over de geheele ruimte.

Door de opvolgende waarden van q in de vergelijking:

$$u = q$$

en hiermede de begrenzingen der stroomschalen, waarin we ons de ruimte verdeeld denken, onbepaald tot elkaar te doen naderen, brengen we het vraagstuk der **B**-verdeeling onder den invloed eener ruimtestrooming **I** terug tot de bepaling der **B**-verdeeling onder den invloed van stroomingen **C**, welke slechts optreden in bepaalde oppervlakken.

Denken we ons de ruimte verdeeld in zonen van verschillende permeabiliteit μ, en voeren we tevens in de grensvlakken tusschen deze zonen electrische oppervlaksstroomingen **C** in.

Binnen iedere zone voldoet **B** aan de condities:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

en

$$\operatorname{curl} \mathbf{B} = 0$$

terwijl in het begrenzingsvlak tusschen een zone 1) en een zone 2) de overgangscondities gelden:

$$\mathbf{B}_1 \nu_1 + \mathbf{B}_2 \nu_2 = 0$$

en

$$\frac{[\mathbf{B}_1 \nu_1]}{\mu_1} + \frac{[\mathbf{B}_2 \nu_2]}{\mu_2} = 4\pi \mathbf{C}$$

waarin ν_1 en ν_2 voor de beide zonen de eenheidsvectoren voorstellen volgens de normaal van het grensvlak, binnen iedere zone gericht naar dit grensvlak.

Daar **B** over de geheele ruimte solenoidaal verdeeld is kunnen we met behulp der betrekking:

$$\mathbf{B} = \operatorname{curl} \mathbf{A}$$

deze grootheid afleiden uit een vector-potentiaal **A**.

Aangezien de verdeeling van een vector, welke in het oneindige verdwijnt, ondubbelzinnig bepaald is door een gegeven verdeeling van zijn curl en van zijn divergentie beide, en geen discontinuiteiten bezit, indien curl en divergentie overal eindig zijn, zal de vector-potentiaal **A** over de geheele ruimte continu zijn, mits we aan div **A** overal een eindige waarde toekennen.

Was $\mathbf{B}$ tevens overal wervelvrij, zoo zouden we deze grootheid eveneens kunnen afleiden uit een continu verdeelden scalairen potentiaal V met behulp der betrekking:

$$\mathbf{B} = - \nabla V$$

Daar evenwel in de grensvlakken $\mathbf{B}$ niet aan de wervelvrije conditie voldoet, zullen we bij invoering van een scalairen potentiaal moeten aannemen, dat deze in de verschillende grensvlakken discontinu is, en tevens dat in deze grensvlakken de geldigheid der bovenstaande betrekking tusschen $\mathbf{B}$ en V ophoudt.

Beschouwen we thans het bijzonder geval dat μ in een bepaalde richting, welke we aanduiden door een eenheidsvector k, niet verandert, en dat bovendien de electrische strooming overal deze bepaalde richting bezit.

Bij aanname van een orthogonaal coördinaten-systeem $OXYZ$, waarvan we de Z-as leggen volgens de richting k, is dan de toestand onafhankelijk van z, en zijn de vectorverdeelingen $\mathbf{I}$ en $\mathbf{C}$ bepaald door scalaire verdeelingen I en C in het XY-vlak, zóó dat:

$$\mathbf{I} = k\, I$$

en

$$\mathbf{C} = k\, C$$

Door de verdeeling der electrische strooming en der permeabiliteit is de verdeeling der magnetische inductie:

$$\mathbf{B} = \operatorname{curl} \mathbf{A}$$

ondubbelzinnig bepaald, en dit is dus eveneens het geval met den vector-potentiaal $\mathbf{A}$ zelf, zoodra we nog een bepaalde verdeeling van $\operatorname{div} \mathbf{A}$ hebben aangenomen.

We zullen nu vooreerst aantoonen dat het mogelijk is de stroomverdeeling

$$\mathbf{I} = k\, I$$

af te leiden uit een verdeeling van den vector-potentiaal:

$$\mathbf{A} = k\, A$$

welke dus eveneens gericht is volgens de Z-as, en welke bepaald is door een scalaire verdeeling A in het XY-vlak.

Uit:

$$\operatorname{curl} \frac{\mathbf{B}}{\mu} = 4\, \pi\, \mathbf{I}$$

en

$$\mathbf{B} = \operatorname{curl} \mathbf{A}$$

volgt:

$$\operatorname{curl}\left(\frac{1}{\mu} \operatorname{curl} \mathbf{A}\right) = 4\,\pi\,\mathbf{I}$$

of

$$\frac{1}{\mu} \operatorname{curl}^2 \mathbf{A} + \left[\nabla \frac{1}{\mu} . \operatorname{curl} \mathbf{A}\right] = 4\,\pi\,\mathbf{I}$$

Bij invoering van:

$$\mathbf{A} = k\,A$$

wordt:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{A} = [\nabla A . k]$$

$$\operatorname{curl}^2 \mathbf{A} = \nabla \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A}$$

$$= - \nabla^2 \mathbf{A} = - k\,\nabla^2 A$$

en gaat bovenstaande betrekking over in:

$$- k \frac{1}{\mu} \nabla^2 A + \left[\nabla \frac{1}{\mu} [\nabla A . k]\right] = 4\,\pi\,k\,I$$

Herleiden we den tweeden term dezer vergelijking als volgt:

$$\left[\nabla \frac{1}{\mu} [\nabla A . k]\right] = \nabla A \left(k \nabla \frac{1}{\mu}\right) - k\left(\nabla \frac{1}{\mu} \cdot \nabla A\right)$$

en merken we op dat, aangezien μ onafhankelijk is van z,

$$k \nabla \frac{1}{\mu} = 0$$

zoo verkrijgen we een vergelijking, waarvan alle termen producten zijn van een scalaire grootheid met den eenheidsvector k.

Deze vector-vergelijking is dus identisch met de scalaire vergelijking, welke we verkrijgen door in alle termen den eenheidsvector k weg te laten:

$$\frac{1}{\mu} \nabla^2 A + \nabla \frac{1}{\mu} . \nabla A = - 4\,\pi\,I$$

of

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{\mu}\,\nabla\,A\right) = - 4\,\pi\,I$$

Deze laatste vergelijking is een Poisson'sche vergelijking, welke de verdeeling van A bepaalt voor gegeven verdeelingen van μ en I.

Hiermee is de mogelijkheid bewezen de gegeven stroomverdeeling:

$$\mathbf{I} = k\, I$$

af te leiden uit een vector-potentiaal-verdeeling:

$$\mathbf{A} = k\, A$$

welke blijkbaar voldoet aan de solenoidale conditie:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$$

Aangezien nu bij gegeven verdeeling van **I** en gegeven verdeeling van div **A**, de vector-potentiaal **A** zelf ondubbelzinnig bepaald is, zal de hier onderstelde verdeeling:

$$\mathbf{A} = k\, A$$

de eenig mogelijke zijn, mits we de conditie invoeren dat **A** solenoidaal is.

De magnetische inductie kunnen we thans als volgt uitdrukken:

$$\mathbf{B} = \operatorname{curl} \mathbf{A} = [\nabla A .\, k]$$

welke vector blijkbaar overal evenwijdig gericht is aan het XY-vlak.

Uit bovenstaande betrekking volgt:

$$\mathbf{B}\, k = 0 \text{ of } \mathbf{B}\, \nabla z = 0$$

en

$$\mathbf{B}\, \nabla A = 0$$

Met andere woorden de vergelijkingen:

$$A = q \qquad z = q'$$

waarin q en q' veranderlijke parameters voorstellen, leveren ons de gezamenlijke inductielijnen van het magnetisch veld op.

Daar verder A onafhankelijk van z is, stelt op zich zelf beschouwd

$$A = q$$

de algemeene vergelijking voor der inductielijnen in het XY-vlak.

Denken we ons een lijnelement $d\,\mathbf{r}$ in het XY-vlak.

De aangroeiing van A over dit lijnelement bedraagt:

$$\begin{aligned} d\,A &= \nabla A .\, d\,\mathbf{r} \\ &= [\nabla A .\, k]\, [d\,\mathbf{r} .\, k] \\ &= \mathbf{B}\, [d\,\mathbf{r} .\, k] \end{aligned}$$

welke laatste uitdrukking blijkbaar voorstelt den inductiestroom $d\,N$ gaande door het oppervlakselement $[d\,\mathbf{r} .\, k]$, beschreven op het lijnelement $d\,\mathbf{r}$ en op de lengte-eenheid in de richting der Z-as.

De integratie van:

$$d\,N = d\,A$$

tusschen de waarden q_1 en q_2 van A, geeft ons onmiddellijk de waarde van den inductiestroom per lengte-eenheid der Z-as, welke in het XY-vlak begrensd wordt door de inductielijnen $A = q_1$ en $A = q_2$:

$$N_{12} = q_2 - q_1$$

Gaan we thans over tot eene nadere beschouwing der potentialen A en V binnen een zone van constante permeabiliteit, waarin geene electrische stroomingen optreden.

Uit:

$$\mathbf{B} = [\nabla A \,.\, k]$$

en

$$\mathbf{B} = - \nabla V$$

volgt

$$\nabla V = [k \nabla A]$$

Vervangen we in deze vector-vergelijking de eenheidsvectoren volgens de X- en Y-as respectievelijk door de reëele eenheid en door de imaginaire eenheid i, zoo gaat zij over in:

$$\frac{\delta V}{\delta x} + i \frac{\delta V}{\delta y} = i \frac{\delta A}{\delta x} - \frac{\delta A}{\delta y}$$

of

$$\frac{\delta}{\delta y} (A + i V) = i \frac{\delta}{\delta x} (A + i V)$$

van welke differentiaal-vergelijking de algemeene oplossing is:

$$A + i V = f(x + i y)$$

In deze oplossing is voor iedere zone de functie f zoodanig te kiezen dat aan de volgende voorwaarden voldaan wordt:

In de eerste plaats levert de eisch dat $\mathbf{A}$ over de geheele ruimte continu is, voor een discontinuiteitsvlak tusschen de zonen 1) en 2) de overgangsconditie op:

$$A_1 = A_2$$

In de tweede plaats moet in de discontinuiteitsvlakken voldaan worden aan de op bladz. 12 opgestelde overgangscondities voor de magnetische inductie $\mathbf{B}$.

Aan de eerste dezer beide overgangscondities, welke volgt uit de solenoidale verdeeling van $\mathbf{B}$, wordt identiek voldaan door de invoering van den vector-potentiaal $\mathbf{A}$. De tweede overgangsconditie:

$$\frac{[\mathbf{B}_1 \nu_1]}{\mu_1} + \frac{[\mathbf{B}_2 \nu_2]}{\mu_2} = 4 \pi \mathbf{C}$$

kunnen we als volgt schrijven:

$$\frac{\left[[\nabla A_1 . k] \nu_1\right]}{\mu_1} + \frac{\left[[\nabla A_2 . k] \nu_2\right]}{\mu_2} = 4 \pi k C.$$

Nemen we in aanmerking dat $k \nu = 0$ is, en dus

$$\left[[\nabla A . k] \nu\right] = k (\nu \nabla A)$$

zoo vinden we na weglating van k in beide leden der vergelijking, de tweede overgangsconditie voor A:

$$\frac{1}{\mu_1} (\nu_1 \nabla) A_1 + \frac{1}{\mu_2} (\nu_2 \nabla) A_2 = 4 \pi C.$$

Ten slotte moeten $f(x + i y)$ en $f'(x + i y)$ zoowel voor $x = \infty$ als voor $y = \infty$ verdwijnen.

In de functie:

$$f(x + i y) = A + i V$$

treden de beide potentialen A en V op, welke binnen ieder der zonen, waarin we ons de ruimte verdeeld denken, continu en eindig, doch in het algemeen meerwaardig zijn.

In de afgeleide functie:

$$f'(x + i y) = \frac{\delta f}{\delta x} = \frac{\delta A}{\delta x} + i \frac{\delta V}{\delta x} = - B_y - i B_x$$

treden de componenten der magnetische inductie **B** op, welke binnen ieder der beschouwde zonen eveneens continu en eindig, en bovendien noodzakelijk eenwaardig zijn.

Hieruit volgt dat de beide functies:

$$f(x + i y)$$

en

$$f'(x + i y)$$

binnen iedere zone continu en eindig zijn, doch dat in 't algemeen slechts de afgeleide functie eenwaardig is.

Binnen een gebied in het XY-vlak, begrensd door twee concentrische cirkels, wier middelpunt gelegen is in den oorsprong van het coördinaten-stelsel, zullen we bijgevolg de afgeleide functie kunnen ontwikkelen volgens een dubbelreeks van Laurent:

$$\begin{aligned} f'(x + i y) = c_0 &+ c_1 (x + i y) + c_2 (x + i y)^2 + \text{enz.} \ldots \\ &+ d_1 (x + i y)^{-1} + d_2 (x + i y)^{-2} + \text{enz.} \ldots \end{aligned}$$

waarin de grootheden c en d constanten voorstellen.

De integratie dezer reeks levert ons echter onmiddellijk een reeks-ontwikkeling voor de potentiaal-functie zelf op, n.l.:

$$f(x+iy) = a_0 + a_1(x+iy) + a_2(x+iy)^2 + \text{enz.} \ldots$$
$$+ b_0 \,\mathrm{l}\,(x+iy) + b_1(x+iy)^{-1} + b_2(x+iy)^{-2} + \text{enz.} \ldots$$

welke in vorm slechts van de reeks van Laurent verschilt door het optreden van een logarithmischen term, en waarin de grootheden a en b weer constanten voorstellen.

De constante term a_0 levert geen bijdrage tot het magnetisch veld.

Van den logarithmischen term:

$$b_0 \,\mathrm{l}\,(x+iy)$$

moet in de eerste plaats worden opgemerkt, dat hij in tegenstelling met de overige termen meerwaardig is, wat onmiddellijk blijkt bij invoering van poolcoördinaten ϱ en θ, n.l.:

$$b_0 \,\mathrm{l}\,(x+iy) = b_0 \,\mathrm{l}\, \varrho e^{i\theta} = b_0 \,\mathrm{l}\, \varrho + i b_0 \theta$$

Over een gesloten kromme, welke geheel in het beschouwde gebied gelegen is, en waarbinnen zich de oorsprong van het coördinaten-systeem bevindt, m. a. w. welke den binnensten begrenzings-cirkel geheel insluit, zal de totale variatie van den logarithmischen term bijgevolg bedragen:

$$2\pi i b_0$$

en deze term kan dus eene reeks waarden aannemen, waarvan 2 opvolgende telkens een bedrag $2\pi i b_0$ met elkaar verschillen.

De verandering over een gesloten kromme van den logarithmischen term in de reeks-ontwikkeling van de potentiaal-functie $A + iV$ zal intusschen gelijk moeten zijn aan de verandering dezer functie zelf over dezelfde kromme, welke we kunnen voorstellen door:

$$\int \nabla A . d\mathbf{r} + i \int \nabla V . d\mathbf{r}$$

zoodat voor de beschouwde kromme de betrekking geldt:

$$2\pi i b_0 = \int \nabla A . d\mathbf{r} + i \int \nabla V . d\mathbf{r}$$

Van de beide laatste integralen kennen we de physische beteekenis.

De eerste integraal:

$$\int \nabla A \, . \, d\,\mathbf{r} = \int \mathbf{B}\,[d\,\mathbf{r}\,k]$$

stelt blijkbaar den stroom der magnetische inductie voor, welke per lengte-eenheid der beschrijvende lijn uittreedt uit het cylinder-oppervlak, dat de gesloten kromme tot richtlijn heeft.

Duiden we de hoeveelheid „waar" magnetisme, per lengte-eenheid der beschrijvende lijn optredende binnen dit cylinder-oppervlak, aan door m, zoo geldt de betrekking:

$$\int \nabla A \, . \, d\,\mathbf{r} = 4\,\pi\,m$$

De tweede integraal:

$$\int \nabla V \, . \, d\,\mathbf{r} = -\int \mathbf{B}\,d\,\mathbf{r}$$

welke op het teeken na den lijn-integraal der magnetische inductie voorstelt, is bepaald door den totalen electrischen stroom I, optredende binnen de gesloten kromme, dus binnen den kleinsten der beide cirkels, welke het beschouwde gebied begrenzen, en wel geldt de betrekking:

$$\int \nabla V \, . \, d\,\mathbf{r} = -4\,\pi\,\mu\,\mathrm{I}$$

De constante b_0 is bijgevolg bepaald door:

$$2\,\pi\,i\,b_0 = -4\,\pi\,i\,\mu\,\mathrm{I} + 4\,\pi\,m$$

of

$$b_0 = -2\,\mu\,\mathrm{I} - 2\,i\,m$$

We vinden dus thans dat van de constante b_0 het reëele deel evenredig is met den electrischen stroom, optredende binnen den kleinsten begrenzings-cirkel van het beschouwde gebied, terwijl het imaginaire deel dezer constante evenredig is met de hoeveelheid „waar" magnetisme, dat per lengte-eenheid der beschrijvende lijn binnen dit gebied aanwezig is.

Aangezien evenwel „waar" magnetisme niet bestaat, volgt hieruit dat de constante b_0 steeds reëel is, en vinden we voor de waarde dezer constante:

$$b_0 = -2\,\mu\,\mathrm{I}$$

Voor het aandeel van den logarithmischen term in de ontwikkeling der potentiaal-functie vinden we bijgevolg:

$$A_0 + i V_0 = -2 \mu I (l \varrho + i \theta)$$

dus:

$$A_0 = -2 \mu I l \varrho$$
$$V_0 = -2 \mu I \theta$$

waaruit dus blijkt, dat van de beide potentialen slechts de scalaire V meerwaardig is.

Verder volgt uit de bovenstaande uitdrukkingen, dat deze een veld bepalen, waarin de inductielijnen concentrische cirkels zijn, wier gemeenschappelijk middelpunt gelegen is op de Z-as, de niveaulijnen rechten, welke deze as snijden.

Voor de waarde der magnetische inductie vinden we in dit geval:

$$B = -\frac{\delta A}{\delta \varrho} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\delta V}{\delta \theta} = \frac{2 \mu I}{\varrho}$$

Het aandeel van het magnetisch veld, opgeleverd door den logarithmischen term, stemt dus blijkbaar geheel overeen met het veld, dat ontstaan zou onder den invloed van een stroom I, optredende in een oneindig langen rechten geleider, geplaatst langs de Z-as.

In onze volgende beschouwingen zullen we ons slechts bezighouden met stroomverdeelingen, waarbij de totale strooming binnen ieder cylinderoppervlak, dat de Z-as tot omwentelingsas heeft, $= 0$ is.

Voor het onder den invloed eener dergelijke stroomverdeeling optredende magnetisch veld zal in de reeks-ontwikkeling van

$$A + i V = f(x + i y)$$

de logarithmische term niet optreden, en er blijven dus slechts termen over van één der beide vormen:

$$a (x + i y)^n$$

en

$$b (x + i y)^{-n}$$

welke bij invoering van poolcoördinaten overgaan in:

$$a \varrho^n (\cos n \theta + i \sin n \theta)$$

en

$$b \varrho^{-n} (\cos n \theta - i \sin n \theta)$$

Velden, welke van een dezer beide termen kunnen worden afgeleid, zullen we in het vervolg aanduiden als enkelvoudige sinusoidale velden, en wel van de eerste soort of van de tweede soort al naarmate ze van den eersten of van den tweeden der bovenstaande termen worden afgeleid.

In het algemeen zullen we het veld, optredende in de ruimte tusschen twee co-axiale cylinderoppervlakken, bijvoorbeeld in het entrefer eener electrische machine, kunnen opvatten als de superpositie van een aantal enkelvoudige sinusoidale velden, waarbij zoowel velden van de eerste als van de tweede soort kunnen optreden.

In het gebied, waarbinnen de Z-as gelegen is, zou blijkbaar de sterkte van een veld der tweede soort onbepaald toenemen, zoodat dus hier slechts velden der eerste soort kunnen optreden.

Omgekeerd kunnen in een gebied, dat zich uitstrekt tot in het oneindige, slechts velden der tweede soort optreden.

Beschouwen we thans nader de beide $2p$-polige enkelvoudige sinusoidale velden, welke blijkbaar worden bepaald door de termen der reeks:

$$a(x+iy)^p$$

en

$$b(x+iy)^{-p}$$

Bij invoering van:

$$a = P e^{ip\alpha}$$
$$b = Q e^{-ip\beta}$$

vinden we voor de grootheden A en V de volgende uitdrukkingen; bij een veld der eerste soort:

$$A = P \varrho^p \cos p(\theta + \alpha)$$
$$V = P \varrho^p \sin p(\theta + \alpha)$$

bij een veld der tweede soort:

$$A = Q \varrho^{-p} \cos p(\theta + \beta)$$
$$V = -Q \varrho^{-p} \sin p(\theta + \beta)$$

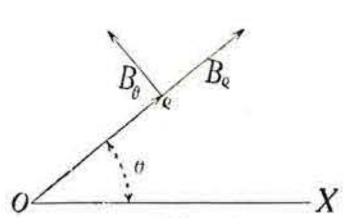


Fig. 1.

Denken we ons de magnetische inductie **B**, als aangegeven in fig 1 ontbonden in een componente B_ϱ, gericht volgens ϱ, en een componente B_θ normaal op ϱ in den zin, waarin θ positief gerekend wordt, zoo zijn deze componenten bepaald door:

$$B_\varrho = \frac{1}{\varrho}\frac{\delta A}{\delta \theta} = -\frac{\delta V}{\delta \varrho}$$

en

$$B_\theta = -\frac{\delta A}{\delta \varrho} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\delta V}{\delta \theta}$$

We vinden dan bij een enkelvoudig veld der eerste soort:

$$B_\varrho = -p\,P\,\varrho^{p-1} \sin p\,(\theta + \alpha)$$

$$B_\theta = -p\,P\,\varrho^{p-1} \cos p\,(\theta + \alpha)$$

en dus

$$B = p\,P\,\varrho^{p-1}$$

bij een enkelvoudig veld der tweede soort:

$$B_\varrho = -p\,Q\,\varrho^{-p-1} \sin p\,(\theta + \beta)$$

$$B_\theta = p\,Q\,\varrho^{-p-1} \cos p\,(\theta + \beta)$$

en dus

$$B = p\,Q\,\varrho^{-p-1}$$

De B_θ-verdeeling is blijkbaar ten opzichte van de B_ϱ-verdeeling bij een veld der eerste soort 90^0 naar rechts, bij een veld der tweede soort 90^0 naar links verplaatst. In beide gevallen is de waarde der totale inductie B onafhankelijk van θ.

In het geval van een saamgesteld sinusoidaal veld, waarbij voor A de betrekking geldt:

$$A = P\,\varrho^p \cos p\,(\theta + \alpha) + Q\,\varrho^{-p} \cos p\,(\theta + \beta)$$

vinden we natuurlijk de waarden der componenten B_ϱ en B_θ door de bovenstaande uitdrukkingen, geldende voor de enkelvoudige velden, te sommeeren.

Krachtstroom per pool. — In het geval van een sinusoidaal magnetisch veld ontstaat over ieder cylinder-oppervlak dat de Z-as, welke we in het vervolg zullen aanduiden als de as van het veld, tot omwentelingsas heeft, een $2\,p$-polige verdeeling der magnetische krachtlijnen.

De opvolgende polen worden hierbij begrensd door de beschrijvende lijnen van het cylinder-oppervlak, waar A afwisselend eene maximale en eene minimale waarde bereikt, en waarvan de ligging bepaald is door:

$$P\,\varrho^p \sin p\,(\theta + \alpha) + Q\,\varrho^{-p} \sin p\,(\theta + \beta) = 0$$

Elimineeren we met behulp van deze betrekking θ uit de uitdrukking voor A, zoo levert ons dit voor de waarden der maxima en minima de uitdrukking:

$$A_{\substack{max \\ min}} = \pm \left\{ P^2 \varrho^{2p} + Q^2 \varrho^{-2p} + 2 P Q \cos p (\alpha - \beta) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

We vinden bijgevolg voor den krachtstroom per pool over een lengte l der beschrijvende lijn van het cylinderoppervlak:

$$N = l \left(A_{max} - A_{min} \right)$$

of

$$N = 2 l \left\{ P^2 \varrho^{2p} + Q^2 \varrho^{-2p} + 2 P Q \cos p (\alpha - \beta) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

welke uitdrukking voor een enkelvoudig veld van de eerste soort overgaat in:

$$N = 2 P l \varrho^p$$

voor een veld van de tweede soort in:

$$N = 2 Q l \varrho^{-p}$$

Wij zullen de gevonden resultaten thans vooreerst toepassen op een eenvoudig voorbeeld.

Zij aan de binnenzijde van een gegeven cylinder-oppervlak:

$$\varrho = r$$

de magnetische permeabiliteit μ_1, aan de buitenzijde μ_2, en nemen we aan dat in het cylinder-oppervlak eene electrische strooming optreedt in de richting der beschrijvende lijnen, bepaald door:

$$C = C_0 \sin p \theta$$

Binnen het cylinder-oppervlak zal een veld der eerste soort, buiten het cylinder-oppervlak een veld der tweede soort optreden.

Uit de overgangs-condities, geldende voor het cylinder-oppervlak:

$$A_1 = A_2$$

$$\frac{1}{\mu_1} \frac{\delta A_1}{\delta \varrho} - \frac{1}{\mu_2} \frac{\delta A_2}{\delta \varrho} = 4 \pi C_0 \sin p \theta$$

volgt onmiddellijk dat de beide A-verdeelingen gelijkstandig zijn met de C-verdeeling.

Bijgevolg is binnen het cylinder-oppervlak:

$$A = P \varrho^p \sin p \theta$$

buiten het cylinder-oppervlak:

$$A = Q \varrho^{-p} \sin p \theta$$

De overgangscondities gaan thans over in:

$$P r^p = Q r^{-p}$$

$$\frac{p}{\mu_1} P r^{p-1} + \frac{p}{\mu_2} Q r^{-p-1} = 4 \pi C_0$$

waaruit volgt:

$$P = 4 \pi C_0 \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \frac{r^{-p+1}}{p}$$

$$Q = 4 \pi C_0 \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \frac{r^{p+1}}{p}$$

Bijgevolg is binnen het cylinder-oppervlak:

$$A = 4 \pi C_0 \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^p \frac{r}{p} \sin p\theta$$

$$B_\varrho = 4 \pi C_0 \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{p-1} \cos p\theta$$

$$B_\theta = -4 \pi C_0 \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{p-1} \sin p\theta$$

buiten het cylinderoppervlak:

$$A = 4 \pi C_0 \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \left(\frac{r}{\varrho}\right)^p \frac{r}{p} \sin p\theta$$

$$B_\varrho = 4 \pi C_0 \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{p+1} \cos p\theta$$

$$B_\theta = 4 \pi C_0 \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \left(\frac{r}{\varrho}\right)^{p+1} \sin p\theta$$

De krachtstroom per pool bedraagt over een lengte l der beschrijvende lijn van het cylinderoppervlak:

$$N = 4 \pi C_0 \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \frac{2 l r}{p}$$

De magnetomotorische kracht per pool bedraagt:

$$M = 4 \pi \int_0^{\frac{\pi}{p}} C r \, d\theta = 4 \pi C_0 \frac{2 r}{p}$$

Bijgevolg vinden we voor de reluctantie:

$$R = \frac{M}{N} = \frac{1}{l} \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}\right)$$

R blijkt dus onafhankelijk te zijn zoowel van den straal van het cylinder-oppervlak als van het aantal polen van het veld, en bijgevolg ook van de poolbreedte.

HOOFDSTUK II.

Roteerende velden.

In het algemeen hebben we te doen met *veranderlijke* magnetische velden; m. a. w. de grootheid A, waarvan we in het voorgaande hoofdstuk den vorm bepaalden als functie van de coördinaten ϱ en θ, is bovendien afhankelijk van den tijd t.

Over een lijnelement $d\,\mathbf{r}$ bedraagt de verandering van A:

$$\nabla A \,.\, d\,\mathbf{r}$$

vooropgesteld dat we de beide waarden van A, optredende aan de uiteinden van $d\,\mathbf{r}$, beschouwen *op hetzelfde tijdstip*. Denken we ons echter $d\,\mathbf{r}$ doorloopen in een tijd $d\,t$, zoo zal A bovendien als functie van t de verandering:

$$\frac{\delta A}{\delta t}\, d\,t$$

ondergaan hebben, en de totale verandering van A bedraagt bijgevolg:

$$d\,A = \nabla A \,.\, d\,\mathbf{r} + \frac{\delta A}{\delta t}\, d\,t$$

Beschouwen we thans de verandering van A in een puntensysteem, dat om de Z-as roteert met de hoeksnelheid:

$$\mathbf{w} = k\,w$$

Voor een punt, bepaald door den radius-vector $\mathbf{r}$, is de verplaatsing in den tijd $d\,t$:

$$d\,\mathbf{r} = [\mathbf{w}\,\mathbf{r}]\, d\,t = [k\,\mathbf{r}]\, w\, d\,t$$

en dus:

$$d\,A = \nabla A \,.\, [k\,\mathbf{r}]\, w\, d\,t + \frac{\delta A}{\delta t}\, d\,t$$

of, indien we in aanmerking nemen dat:

$$\nabla A \,.\, [k\,\mathbf{r}] = k[\mathbf{r}\,\nabla A] = \frac{\delta A}{\delta \theta}$$

$$\frac{d\,A}{d\,t} = w\,\frac{d\,A}{\delta \theta} + \frac{\delta A}{\delta t}$$

Gesteld nu, dat de op deze wijze bepaalde afgeleide van A naar $t = 0$ is, zoo beteekent dit dat het veld, waargenomen van uit het roteerende puntensysteem, niet veranderlijk is; m.a.w.

het veld zelf neemt aan de ondersteld rotatie deel, doch ondergaat overigens geenerlei verandering.

Hieruit volgt, dat indien algemeen is voldaan aan de conditie:

$$w = - \frac{\frac{\delta A}{\delta t}}{\frac{\delta A}{\delta \theta}} = constant$$

we te doen hebben met een veld *van onveranderlijken vorm, dat met de constante hoeksnelheid w om zijne as roteert,* dus met een zoogenaamd „draaiveld".

We zullen nu aantoonen dat we steeds, mits A een *periodieke* functie van t is, het veld kunnen beschouwen als de superpositie van een aantal dergelijke draaivelden.

Voorloopig onderstellen we hierbij dat de logarithmische term in de ontwikkeling van A niet optreedt.

Aangezien het dan steeds mogelijk is het veld op ieder oogenblik te ontbinden in een aantal enkelvoudige sinusoidale velden, is het voldoende de mogelijkheid der splitsing in roteerende velden voor een enkelvoudig sinusoidaal veld aan te toonen.

Nemen we aan, dat in de uitdrukking voor A bij een enkelvoudig $2p$-polig veld der eerste soort:

$$A'_p = P_p \varrho^p \cos p\,(\theta + \alpha_p)$$

P_p en α_p, en dus $P_p \cos p\,(\theta + \alpha_p)$ periodieke functies van t zijn met de periode:

$$T = \frac{2\,\pi}{\omega}$$

Het is dan steeds mogelijk deze functie te ontwikkelen in een reeks van Fourier naar $\omega\, t$; we kunnen dus stellen:

$$P_p \cos p\,(\theta + \alpha_p) = X_1 \sin \omega\, t + X_2 \sin 2\,\omega\, t + \text{enz.} \ldots$$
$$+ \tfrac{1}{2} Y_0 + Y_1 \cos \omega\, t + Y_2 \cos 2\,\omega\, t + \text{enz.} \ldots$$

of

$$P_p \cos p\,(\theta + \alpha_p) = \tfrac{1}{2} Y_0 + \sum_{q=1}^{q=\infty} (X_q \sin q\,\omega\, t + Y_q \cos q\,\omega\, t)$$

waarin de coëfficienten X en Y bepaald zijn door:

$$X_q = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P_p \cos p\,(\theta + \alpha_p) \sin q\,\omega\, t \,.\, d\,\omega\, t$$

$$Y_q = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} P_p \cos p\,(\theta + \alpha_p) \cos q\,\omega\,t\,.\,d\,\omega\,t$$

Voeren we thans de *constanten* $P_{pq}, \alpha_{pq}, P'_{pq}$ en α'_{pq} in, welke bepaald zijn door:

$$P_{pq} \sin p\,\alpha_{pq} = \frac{1}{2\,\pi}\int_0^{2\pi} P_p \sin\,(p\,\alpha_p + q\,\omega\,t)\,.\,d\,\omega\,t$$

$$P_{pq} \cos p\,\alpha_{pq} = \frac{1}{2\,\pi}\int_0^{2\pi} P_p \cos\,(p\,\alpha_p + q\,\omega\,t)\,.\,d\,\omega\,t$$

$$P'_{pq} \sin p\,\alpha'_{pq} = \frac{1}{2\,\pi}\int_0^{2\pi} P_p \sin\,(p\,\alpha_p - q\,\omega\,t)\,.\,d\,\omega\,t$$

$$P'_{pq} \cos p\,\alpha'_{pq} = \frac{1}{2\,\pi}\int_0^{2\pi} P_p \cos\,(p\,\alpha_p - q\,\omega\,t)\,.\,d\,\omega\,t$$

waarbij we opmerken, dat voor $q = 0$

$$P_{p0} = P'_{p0}$$

$$\alpha_{p0} = \alpha'_{p0}$$

zoo gaan de uitdrukkingen voor X_q en Y_q over in:

$$X_q = (P_{pq} \sin p\,\alpha_{pq} - P'_{pq} \sin p\,\alpha'_{pq}) \cos p\,\theta + (P_{pq} \cos p\,\alpha_{pq} - P'_{pq} \cos p\,\alpha'_{pq}) \sin p\,\theta.$$

$$Y_q = (P_{pq} \cos p\,\alpha_{pq} + P'_{pq} \cos p\,\alpha'_{pq}) \cos p\,\theta - (P_{pq} \sin p\,\alpha_{pq} + P'_{pq} \sin p\,\alpha'_{pq}) \sin p\,\theta.$$

We vinden bijgevolg:

$$\tfrac{1}{2}\,Y_0 = P_{p0}\,(\cos p\,\alpha_{p0} \cos p\,\theta - \sin p\,\alpha_{p0} \sin p\,\theta) = P_{p0} \cos p\,(\theta + \alpha_{p0})$$

$$\begin{aligned} X_q \sin q\,\omega\,t + Y_q \cos q\,\omega\,t &= P_{pq}\left\{\cos(p\,\alpha_{pq} - q\,\omega\,t) \cos p\,\theta - \sin\,(p\,\alpha_{pq} - q\,\omega\,t) \sin p\,\theta\right\} \\ &\quad + P'_{pq}\left\{\cos(p\,\alpha'_{pq} + q\,\omega\,t) \cos p\,\theta - \sin\,(p\,\alpha'_{pq} + q\,\omega\,t) \sin p\,\theta\right\} \\ &= P_{pq} \cos\left\{p\,(\theta + \alpha_{pq}) - q\,\omega\,t\right\} + P'_{pq} \cos\left\{p\,(\theta + \alpha'_{pq}) + q\,\omega\,t\right\} \end{aligned}$$

De term $\frac{1}{2}\,Y_0$ der Fourier'sche reeks stemt blijkbaar overeen met den term $q = 0$ eener reeks, waarvan de algemeene term is:

$$P_{pq} \cos\left\{p\,(\theta + \alpha_{pq}) - q\,\omega\,t\right\}$$

terwijl de overige termen der Fourier'sche reeks gelijk zijn aan de som van twee termen dezer laatste reeks, overeenkomende met 2 gelijk en tegengestelde waarden van q.

Beschouwen we dus q niet meer als rangcijfer der termen in een Fourier'sche reeks, doch eenvoudig als een cijfer dat alle geheele waarden doorloopt van $-\infty$ tot $+\infty$, zoo vinden we:

$$P_p \cos p\,(\theta + \alpha_p) = \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} P_{pq} \cos\left\{ p\,(\theta + \alpha_{pq}) - q\,\omega\,t \right\}$$

waaruit volgt:

$$A'_p = \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} P_{pq}\, \varrho^p \cos\left\{ p\,(\theta + \alpha_{pq}) - q\,\omega\,t \right\}$$

Voor een periodiek veranderlijk enkelvoudig sinusoidaal veld van de tweede soort, bepaald door:

$$A''_p = Q_p\, \varrho^{-p} \cos p\,(\theta + \beta_p)$$

vinden we op volkomen dezelfde manier:

$$A''_p = \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} Q_{pq}\, \varrho^{-p} \cos\left\{ p\,(\theta + \beta_{pq}) - q\,\omega\,t \right\}$$

Voor een periodiek veranderlijk samengesteld sinusoidaal veld geldt bijgevolg:

$$A_p = \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} \left\{ P_{pq}\, \varrho^p \cos\left\{ p\,(\theta + \alpha_{pq}) - q\,\omega\,t \right\} + Q_{pq}\, \varrho^{-p} \cos\left\{ p\,(\theta + \beta_{pq}) - q\,\omega\,t \right\} \right\}$$

Duiden we den vorm achter het Σ-teeken aan door A_{pq}, zoo geldt blijkbaar voor ieder der termen A_{pq} de betrekking:

$$\frac{\delta A_{pq}}{\delta \theta}\,\frac{q\,\omega}{p} + \frac{\delta A_{pq}}{\delta t} = 0$$

Ieder dezer termen levert bijgevolg een $2p$-polig sinusoidaal veld op van onveranderlijken vorm, en roteerende met de constante hoeksnelheid

$$w_{pq} = \frac{q\,\omega}{p}$$

Al naarmate q positief dan wel negatief is, hebben we te doen met een *links*, dan wel met een *rechts* roteerend veld.

Met $q = 0$ komt overeen een veld, dat een vasten stand in de ruimte inneemt; in de gevallen, waarmede we ons nader zullen bezighouden, zullen in het algemeen deze termen niet optreden.

Beschouwen we thans nader den logarithmischen term in de ontwikkeling van A:

$$A_0 = b_0\, l\, \varrho$$

waarin b_0 in het algemeen eene periodieke functie van den tijd t is.

Aangezien het magnetisch veld bepaald wordt door ∇A zal dit veld geenerlei verandering ondergaan door toevoeging aan A_0 van een term, welke niet afhangt van de coördinaten ϱ en θ; indien dus r een constanten straal voorstelt, mogen we aannemen:

$$A_0 = b_0 \, 1 \frac{\varrho}{r}$$

Merken we thans op, dat:

$$\operatorname*{Lim}_{p=0} \frac{\left(\frac{\varrho}{r}\right)^p - \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{-p}}{p} = 2 1 \frac{\varrho}{r}$$

en

$$\operatorname*{Lim}_{p=0} \cos p\,\theta = 1$$

en denken we ons 2 grootheden P en Q, welke bij onbepaalde afname van p onbepaald toenemen, evenwel zóó dat steeds de gelijkheid bestaat:

$$P\, r^{\,p} = Q\, r^{-p}$$

terwijl

$$\operatorname*{Lim}_{p=0} p\, P\, r^{\,p} = \operatorname*{Lim}_{p=0} p\, Q\, r^{-p} = {}^1\!/_2\, b_0$$

zoo kunnen we de uitdrukking voor den logarithmischen term als volgt schrijven:

$$A_0 = \operatorname*{Lim}_{p=0} P\, r^{\,p} \left\{ \left(\frac{\varrho}{r}\right)^p - \left(\frac{\varrho}{r}\right)^{-p} \right\} \cos p\,\theta$$

of

$$A_0 = \operatorname*{Lim}_{p=0} \left(P\, \varrho^{\,p} \cos p\,\theta - Q\, \varrho^{-p} \cos p\,\theta \right)$$

De vorm tusschen haken in bovenstaande uitdrukking stelt algemeen de waarde van A_p voor, geldende voor een $2p$-polig sinusoidaal veld, waarvan de beide samenstellende enkelvoudige velden ten opzichte van elkaar een magnetisch standsverschil van 180° bezitten.

Hieruit volgt, dat we het veld, opgeleverd door den logarithmischen term, kunnen beschouwen als grensgeval van een sinusoidaal veld, en in deze opvatting worden we er toe geleid dit „logarithmisch" veld als „0-polig" sinusoidaal veld aan de tot dusverre beschouwde reeks der $2p$-polige sinusoidale velden toe te voegen.

Passen we dan ook op den logarithmischen term de reeksontwikkeling naar Fourier toe, zoo zal ieder veld, opgeleverd door een der harmonische componenten, welke we aanduiden door A_{oq}, kunnen beschouwd worden als grensgeval van een $2p$-polig sinusoidaal veld, roteerende met de hoeksnelheid :

$$w_{oq} = \underset{p=o}{Lim} \pm \frac{q\,\omega}{p} = \infty$$

De logarithmische term levert dus op een oneindig aantal 0-polige sinusoidale velden, roteerende met een oneindig groote hoeksnelheid.

In het meest algemeene geval zullen we dus, mits *A periodiek* veranderlijk is, de volgende ontwikkeling kunnen opstellen.

$$A = \sum_{p=o}^{p=\infty} \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} A_{pq}$$

waarin ieder der termen A_{pq} een $2p$-polig sinusoidaal veld oplevert, roteerende met de constante hoeksnelheid w_{pq}.

Hiermede is de mogelijkheid der splitsing in roteerende sinusoidale velden voor een willekeurig, mits periodiek veranderlijk, veld algemeen aangetoond.

HOOFDSTUK III.

Energie-verplaatsing in een uit sinusoidale velden saamgesteld magnetisch veld.

Het vectorproduct van:

$$\text{de electrische kracht } \mathbf{E} = -\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta t}$$

en

$$\text{de magnetische kracht } \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu}$$

bepaalt in het magnetisch veld den stralingsvector van Poynting:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi}\left[\mathbf{E}\mathbf{H}\right] = \frac{1}{4\pi\mu}\left[\mathbf{B}\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta t}\right]$$

De integratie van den vector $\mathbf{S}$ over de buitenzijde van een gesloten oppervlak levert ons de energie-hoeveelheid W op, welke per tijdseenheid dit oppervlak binnentreedt:

$$W = \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{\mu}\left[\mathbf{B}\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta t}\right]_\nu d\,o$$

in welke uitdrukking ν den eenheidsvector voorstelt in de richting der normaal naar het oppervlaks-element $d\,o$.

Voor den bijzonderen vorm van het magnetisch veld, waarbij wij aannamen:

$$\mathbf{A} = k\,A$$

en bijgevolg:

$$\mathbf{B} = [\,\nabla A \,.\, k\,]$$

is de vorm achter het integraalteeken als volgt te herleiden:

$$\left[\mathbf{B}\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta t}\right]_\nu = \left[\,[\,\nabla A . k\,]\frac{\delta A}{\delta t}\,k\,\right]_\nu$$

$$= \frac{\delta A}{\delta t}\left\{k\,(k\,\nabla A) - k^2\,\nabla A\,\right\}_\nu$$

$$= \frac{\delta A}{\delta t}\left(k\,\frac{\delta A}{\delta z} - \nabla A\right)_\nu$$

en daar:

$$\frac{\delta A}{\delta z} = 0$$

$$\left[\mathbf{B}\frac{\delta \mathbf{A}}{\delta t}\right]_\nu = -\frac{\delta A}{\delta t}(\nu\,\nabla\,)A.$$

De uitdrukking voor W gaat dus in dit bijzondere geval over in:

$$W = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{\mu}\frac{\delta A}{\delta t}(\nu \nabla) A \, do$$

Kiezen we thans als integratie-oppervlak een cylinder-oppervlak:

$$\varrho = r$$

gelegen in eene zone van constante permeabiliteit, en nemen we in aanmerking dat voor dit oppervlak:

$$(\nu \nabla) A = -\frac{\delta A}{\delta \varrho}$$

zoo vinden we voor de hoeveelheid energie, welke zich per tijdseenheid over een lengte l der beschrijvende lijn door het cylinder-oppervlak in de richting der as verplaatst:

$$W = \frac{l r}{4 \pi \mu} \int_0^{2\pi} \frac{\delta A}{\delta \varrho} \frac{\delta A}{\delta t} \, d\theta$$

We merken hierbij op, dat deze uitdrukking voor een draaiveld met de rotatiesnelheid w overgaat in:

$$W = -\frac{l r w}{4 \pi \mu} \int_0^{2\pi} \frac{\delta A}{\delta \varrho} \frac{\delta A}{\delta \theta} \, d\theta$$

Aangezien de grootheid A noodzakelijk een periodieke functie van θ is met de periode 2π, is het steeds mogelijk A te ontwikkelen in een Fourier'sche reeks naar θ, welke we schrijven in den vorm:

$$A = \sum_{p=0}^{p=\infty} Z_p \cos p\,(\theta + \gamma_p)$$

en waarin de grootheden Z en γ functies voorstellen van ϱ en t.

Blijkbaar levert ons deze reeksontwikkeling, onafhankelijk van onze beschouwingen in hoofdstuk I, de splitsing van het veld op in sinusoidale velden. *)

*) Het essentieele verschil tusschen bovenstaande reeksontwikkeling voor A en die, waarvan we de mogelijkheid in hoofdstuk I aantoonden, is hierin gelegen dat in deze laatste de termen tevens als functies van ϱ bepaald zijn. De gelijkstelling der overeenkomstige termen in beide reeksen levert ons dus onmiddellijk de waarden der grootheden Z en γ op als functies van ϱ. Aangezien deze ons evenwel ten aanzien van de hier volgende beschouwingen van geen nut zijn, blijft hunne bepaling hier achterwege.

We beschouwen thans vooreerst een veld, waarin geene sinusoidale componenten optreden, waarvan het aantal polen grooter is dan $2n$, zoodat voor dit veld de ontwikkeling geldt:

$$A = \sum_{p=0}^{p=n} A_p = \sum_{p=0}^{p=n} Z_p \cos p\,(\theta + \gamma_p)$$

waaruit volgt:

$$\frac{\delta A}{\delta \varrho} = \sum_{p=0}^{p=n} \left\{ \frac{\delta Z_p}{\delta \varrho} \cos p\,(\theta + \gamma_p) - p\,\frac{\delta \gamma_p}{\delta \varrho} Z_p \sin p\,(\theta + \gamma_p) \right\}$$

en

$$\frac{\delta A}{\delta t} = \sum_{p=0}^{p=n} \left\{ \frac{\delta Z_p}{\delta t} \cos p\,(\theta + \gamma_p) - p\,\frac{\delta \gamma_p}{\delta t} Z_p \sin p\,(\theta + \gamma_p) \right\}$$

Voeren we deze uitdrukkingen in de boven afgeleide uitdrukking voor W in, zoo splitst zich de hierin optredende integraal in een aantal andere, welke, nadat de van θ onafhankelijke factoren vóór het integraalteeken gebracht zijn, van een der vormen zijn:

$$\int_0^{2\pi} \sin p\,(\theta + \gamma_p) \sin p'\,(\theta + \gamma_{p'})\, d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \cos p\,(\theta + \gamma_p) \cos p'\,(\theta + \gamma_{p'})\, d\theta$$

$$\int_0^{2\pi} \sin p\,(\theta + \gamma_p) \cos p'\,(\theta + \gamma_{p'})\, d\theta$$

Integralen van den laatsten vorm zijn steeds $= 0$, terwijl die van een der beide eerste vormen slechts van 0 verschillen voor $p = p'$.

We zullen dus de uitdrukking voor W kunnen splitsen in een aantal termen, welke ieder voor zich slechts afhangen van één der termen A_p in de reeksontwikkeling van A.

Duiden we de som der termen, welke afhangen van A_p, aan door W_p, zoo stelt W_p blijkbaar voor de energiestrooming in het sinusoidale veld, dat bepaald is door A_p, en geldt voor de totale energiestrooming de ontwikkeling:

$$W = \sum_{p=0}^{p=n} W_p$$

Deze uitdrukking zal geldig blijven bij onbepaalde toename van n, mits slechts de reeks, waarvan W_p den algemeenen term voorstelt, convergent is. Nemen we nu in aanmerking, dat divergentie dezer reeks beteekenen zou, dat de energiestrooming in het beschouwde veld oneindig groot, en het veld zelf dus physisch onbestaanbaar is, zoo mogen we de gevolgtrekking maken dat voor een physisch bestaanbaar veld algemeen de betrekking geldt:

$$W = \sum_{p=0}^{p=\infty} W_p$$

Hieruit volgt de stelling:

I. In een uit sinusoidale velden saamgesteld magnetisch veld is op ieder oogenblik de energiestrooming gelijk aan de som der energiestroomingen, welke afzonderlijk zouden optreden onder den invloed van ieder der sinusoidale componenten.

In het algemeen hebben we te doen met veranderlijke velden, en is dus de energiestrooming W een functie van den tijd t. Bij periodiek veranderlijke velden is het van belang de *gemiddelde* waarde van W te kennen over den duur eener periode.

In hoofdstuk II toonden we aan, dat het steeds mogelijk is een periodiek veranderlijk $2p$-polig sinusoidaal veld te ontbinden in eene oneindige reeks $2p$-polige sinusoidale velden van onveranderlijken vorm, roteerende met de constante hoeksnelheid w_{pq}, welke voor de opvolgende velden dezer reeks bepaald is door in de uitdrukking:

$$w_{pq} = \frac{q\,\omega}{p}$$

q alle geheele waarden te doen doorloopen van $-\infty$ tot $+\infty$.

Aangezien we de grootheid A voor een dezer roteerende componenten algemeen kunnen voorstellen door eene uitdrukking van den vorm:

$$A_{pq} = Z_{pq} \cos \left\{ p\,(\theta + \gamma_{pq}) - q\,\omega\,t \right\}$$

waarin de grootheden Z_{pq} en γ_{pq} funties van ϱ zijn, levert ons de uitdrukking:

$$A_p = \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} Z_{pq} \cos \left\{ p\,(\theta + \gamma_{pq}) - q\,\omega\, t \right\}$$

eene reeksontwikkeling op, welke algemeen de splitsing van een periodiek veranderlijk sinusoidaal veld in roteerende velden voorstelt. *)

Beschouwen we nu vooreerst een periodiek veranderlijk sinusoidaal veld, waarin geene roteerende componenten optreden, wier hoeksnelheid eene bepaalde eindige waarde overschrijdt, welke we aangeven door de mogelijke verandering van q te beperken tot de grenswaarden $-n$ en $+n$. Voor een dergelijk veld geldt dan de ontwikkeling:

$$A_p = \sum_{q=-n}^{q=+n} A_{pq} = \sum_{q=-n}^{q=+n} Z_{pq} \cos \left\{ p\,(\theta + \gamma_{pq}) - q\,\omega\, t \right\}$$

waaruit volgt:

$$\frac{\delta A_p}{\delta \varrho} = \sum_{q=-n}^{q=+n} \left\{ \frac{\delta Z_{pq}}{\delta \varrho} \cos \left\{ p\,(\theta + \gamma_{pq}) - q\,\omega\, t \right\} - p \frac{\delta \gamma_{pq}}{\delta \varrho} Z_{pq} \sin \left\{ p\,(\theta + \gamma_{pq}) - q\,\omega\, t \right\} \right\}$$

$$\frac{\delta A_p}{\delta t} = \sum_{q=-n}^{q=+n} q\,\omega\, Z_{pq} \sin \left\{ p\,(\theta + \gamma_{pq}) - q\,\omega\, t \right\}$$

Brengen we thans deze uitdrukkingen over in de integraal:

$$W_p = \frac{l\,r}{4\,\pi\,\mu} \int_0^{2\pi} \frac{\delta A_p}{\delta \varrho} \frac{\delta A_p}{\delta t}\, d\,\theta$$

waardoor de energiestrooming in het $2p$-polige sinusoidale veld bepaald wordt, zoo splitst zich deze integraal in een aantal andere, welke, nadat de van θ en t onafhankelijke factoren vóór het integraalteeken gebracht zijn, van een der beide vormen zijn:

$$\int_0^{2\pi} \sin \left\{ p\,(\theta + \gamma_{pq}) - q\,\omega\, t \right\} \cos \left\{ p\,(\theta + \gamma_{pq'}) - q'\,\omega\, t \right\} d\,\theta =$$

$$\pi \sin \left\{ p\,(\gamma_{pq} - \gamma_{pq'}) - \omega\,(q - q')\, t \right\}$$

*) De gelijkstelling der overeenkomstige termen in bovenstaande uitdrukking voor A_p en die, welke we afleidden in hoofdstuk II, levert ons onmiddellijk de waarden der grootheden Z en γ als functies van ϱ op. Overigens zij hier verwezen naar de noot op bladz. 32.

en

$$\int_0^{2\pi} \sin\left\{ p\,(\theta + \gamma_{pq}) - q\,\omega\, t \right\} \sin\left\{ p\,(\theta + \gamma_{pq'}) - q'\,\omega\, t \right\} d\,\theta =$$

$$\pi \cos\left\{ p\,(\gamma_{pq} - \gamma_{pq'}) - \omega\,(q - q')\, t \right\}$$

Beide integralen zijn blijkbaar in het algemeen harmonische functies van t, wier gemiddelde waarde over den duur eener periode $= 0$ is.

Slechts voor het geval $q = q'$ is, bezitten de integralen een van t onafhankelijke waarde, welke voor den eersten integraal $= 0$, voor den tweeden integraal $= \pi$ is.

Bij de bepaling der gemiddelde waarde van W_p, welke we zullen aanduiden door $\overline{W}_p$, over den duur eener periode, hebben we dus slechts rekening te houden met die termen in de ontwikkeling van W_p, welke slechts afhangen van één der termen A_{pq} in de reeksontwikkeling van A_p.

Duiden we den term in de ontwikkeling van W_p, welke afhangt van A_{pq} aan door W_{pq}, zoo stelt W_{pq} blijkbaar voor de *van t onafhankelijke* waarde der energiestrooming in het roteerende sinusoidale veld, dat bepaald is door A_{pq}, en geldt voor de gemiddelde waarde der totale energiestrooming in het beschouwde veld de ontwikkeling:

$$\overline{W}_p = \sum_{q=-n}^{q=+n} W_{pq}$$

Merken we thans weer op dat, vooropgesteld de physische bestaanbaarheid van het veld, W_p en dus $\overline{W}_p$ niet onbepaald zullen kunnen toenemen, zelfs niet bij onbepaalde toename van n, zoo mogen we de gevolgtrekking maken, dat bovenstaande uitdrukking voor $\overline{W}_p$ geldig blijft, ook indien n oneindig groot wordt, zoodat voor een periodiek veranderlijk sinusoidaal veld algemeen de betrekking geldt:

$$\overline{W}_p = \sum_{q=-\infty}^{q=+\infty} W_{pq}$$

Hieruit volgt de stelling:

II. In een periodiek veranderlijk sinusoidaal magnetisch veld is de gemiddelde waarde der energiestrooming over den duur eener periode gelijk aan de som der energiestroomingen, welke afzonderlijk zouden optreden onder den invloed van ieder der roteerende sinusoidale velden, waaruit het beschouwde veld is saamgesteld.

We kunnen thans met groote benadering de geldigheid dezer stelling uitbreiden *over eene willekeurige tijdruimte*, mits slechts deze tijdruimte groot is ten opzichte van den duur eener periode.

Om dit aan te toonen hebben we slechts op te merken dat de integraal:

$$\int_0^t (W_p - \overline{W}_p)\, d\, t$$

telkens over den duur eener periode dezelfde waardenreeks doorloopt, en aan het eind van iedere opvolgende periode $= 0$ wordt.

De uitdrukking:

$$\frac{1}{t}\int_0^t (W_p - \overline{W}_p)\, d\, t$$

zal dus eveneens aan het eind van iedere periode $= 0$ worden, doch bovendien zullen de doorloopen waarden gedurende de opvolgende perioden hoe langer hoe minder van 0 verschillen, en ten slotte na een onbepaald toenemend aantal perioden eveneens tot 0 naderen, zoodat dus:

$$\lim_{t=\infty} \frac{1}{t}\int_0^t (W_p - \overline{W}_p)\, d\, t = 0$$

of

$$\lim_{t=\infty} \frac{1}{t}\int_0^t W_p\, d\, t = \overline{W}_p$$

Hieruit volgt nu, dat niet alleen de gemiddelde waarde van W_p over een oneindig langen tijd gelijk is aan $\overline{W}_p$, doch tevens dat de afwijking der gemiddelde waarde van W_p in een willekeurigen tijd t van de waarde van $\overline{W}_p$: gedurende iedere opvolgende periode afneemt, en dus *na een groot aantal perioden* ten opzichte van $\overline{W}_p$ kan verwaarloosd worden ; m. a. w. :

de gemiddelde waarde der energiestrooming over een tijdruimte, welke groot is ten opzichte van den duur eener periode, is bij benadering gelijk aan de gemiddelde waarde der energiestrooming over den duur eener periode.

Bij onze beschouwingen over asynchrone wisselstroom-machines zullen we sinusoidale magnetische velden leeren kennen, die, *hoewel niet periodiek veranderlijk*, toch uit roteerende sinusoidale velden zijn saamgesteld. De uitdrukking voor A_p zal dus bij een dergelijk veld, wèl evenals bij een periodiek veranderlijk sinusoidaal veld van den vorm zijn:

$$A_p = \Sigma\, Z_{pq} \cos \left\{ p\,(\theta + \gamma_{pq}) - q\,\omega\, t \right\}$$

doch de in deze ontwikkeling optredende grootheden q zullen in het algemeen niet meer door meetbare getallen kunnen voorgesteld worden.

Passen we nu op een dergelijk veld dezelfde beschouwingen toe, welke ons voor een periodiek veranderlijk sinusoidaal veld leidden tot de uitkomst, uitgedrukt in de stelling *II*, en *definieeren* we thans de gemiddelde waarde der energiestrooming als:

$$\overline{W}_p = \lim_{t=\infty} \frac{1}{t} \int_0^t W_p\, dt$$

zoo blijkt weer, dat van de in de uitdrukking voor W_p optredende integralen, slechts die van den vorm:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \left\{ p\,(\theta + \gamma_{pq}) - q\,\omega\, t \right\} d\theta = \pi$$

een aandeel opleveren in de gemiddelde waarde $\overline{W}_p$, zoodat ook voor het hier beschouwde geval de betrekking geldt:

$$\overline{W}_p = \Sigma\, W_{pq}.$$

We mogen dus de stelling *II* uitbreiden tot *niet periodiek veranderlijke* sinusoidale velden, mits deze slechts uit roteerende velden zijn saamgesteld, en mits we de gemiddelde waarde der energiestrooming beschouwen over een oneindig langen tijd.

Uit de stellingen *I* en *II* volgt dan de stelling:

III. In een uit roteerende sinusoidale velden saamgesteld magnetisch veld is de gemiddelde waarde der energiestrooming gelijk aan de som der energiestroomingen, welke afzonderlijk zouden optreden onder den invloed van ieder der roteerende sinusoidale componenten.

Hiermede hebben we het vraagstuk, waarmee we ons in dit hoofdstuk bezighouden, teruggebracht tot het onderzoek der energie-verplaatsing in een roteerend sinusoidaal veld.

De uitdrukking voor A bij een dergelijk veld is van den vorm:

$$A_{pq} = P_{pq}\, \varrho^{p} \cos \left\{ p\,(\theta + \alpha_{pq}) - q\, \omega\, t \right\} + Q_{pq}\, \varrho^{-p} \cos \left\{ p\,(\theta + \beta_{pq}) - q\, \omega\, t \right\}$$

waaruit volgt:

$$\frac{\delta A_{pq}}{\delta \varrho} = \frac{p}{\varrho} P_{pq}\, \varrho^{p} \cos \left\{ p\,(\theta + \alpha_{pq}) - q\, \omega\, t \right\} - \frac{p}{\varrho} Q_{pq}\, \varrho^{-p} \cos \left\{ p\,(\theta + \beta_{pq}) - q\, \omega\, t \right\}$$

$$\frac{\delta A_{pq}}{\delta t} = q\, \omega\, P_{pq}\, \varrho^{p} \sin \left\{ p\,(\theta + \alpha_{pq}) - q\, \omega\, t \right\} + q\, \omega\, Q_{pq}\, \varrho^{-p} \sin \left\{ p\,(\theta + \beta_{pq}) - q\, \omega\, t \right\}$$

Indien we, na vervanging van ϱ door r, deze uitdrukkingen invoeren in:

$$W_{pq} = \frac{l\, r}{4\, \pi\, \mu} \int_0^{2\pi} \frac{\delta A_{pq}}{\delta \varrho} \frac{\delta A_{pq}}{\delta t}\, d\,\theta$$

en in aanmerking nemen dat:

$$\int_0^{2\,\pi} \sin(p\,\theta + \delta) \cos(p\,\theta + \varepsilon)\, d\,\theta = \pi \sin(\delta - \varepsilon)$$

zoo vinden we:

$$W_{pq} = \frac{l}{2\,\mu}\, p\, q\, \omega\, P_{pq}\, Q_{pq} \sin p\; (\beta_{pq} - \alpha_{pq})$$

of, bij invoering der rotatiesnelheid:

$$w_{pq} = \frac{q\, \omega}{p}$$

$$W_{pq} = \frac{l\, p^{2}}{2\, \mu}\, w_{pq}\, P_{pq}\, Q_{pq} \sin p\; (\beta_{pq} - \alpha_{pq})$$

Uit deze uitdrukking volgt in de eerste plaats, dat in een uit gelijksoortige enkelvoudige velden saamgesteld magnetisch veld geene energie-overbrenging plaats heeft.

De energie-overbrenging komt blijkbaar tot stand door de samenwerking van de velden der eerste soort met de velden der tweede soort van gelijk aantal polen en gelijke omwentelingssnelheid.

Bovendien blijkt echter, dat onder den invloed van 2 *ongelijksoortige* velden met gelijk aantal polen en gelijke omwentelingssnelheid alleen dan eene overbrenging van energie tot stand komt, indien zij ten opzichte van elkaar een magnetisch standsverschil bezitten. Is hierbij het veld der eerste soort ten opzichte van het veld der tweede soort verplaatst in den zin der rotatie, dus bij *voorijling* van het veld der eerste soort, zoo is voor deze velden $\sin p\,(\beta - \alpha)$ positief, en de energie verplaatst zich dus *naar de as toe.*

Is daarentegen het veld der eerste soort *naijlend* bij het veld der tweede soort, zoo verplaatst zich de energie *van de as afwaarts.*

Volledigheidshalve zouden we thans bovenstaande beschouwingen nog kunnen uitbreiden tot het van den logarithmischen term A_0 afgeleide veld; we kunnen echter gemakkelijk langs directen weg aantoonen, dat de gemiddelde waarde der energiestrooming in deze veld-componente steeds $= 0$ is:

Hiertoe schrijven we A_0 in den vorm:

$$A_0 = f(t)\,\mathrm{l}\,\varrho$$

waaruit volgt:

$$\frac{\delta A_0}{\delta \varrho} = f(t)\,\frac{1}{\varrho}$$

$$\frac{\delta A_0}{\delta t} = f'(t)\,\mathrm{l}\,\varrho$$

De invoering dezer uitdrukkingen in die voor de energiestrooming W_0 levert ons na vervanging van ϱ door r op:

$$W_0 = \frac{l}{4\,\pi\,\mu}\,\mathrm{l}\,r \,.\, f(t)\,f'(t) \int_0^{2\pi} d\,\theta$$

$$= \frac{l}{2\mu} \, \mathrm{l}\, r \, . \, f(t) \, f'(t)$$

De in totaal gedurende het tijdsverloop tusschen twee tijdstippen t_1 en t_2 verplaatste energie zal bijgevolg bedragen:

$$\int_{t_1}^{t_2} W_0 \, dt = \frac{l}{2\mu} \, \mathrm{l}\, r \int_{t_1}^{t_2} f(t) \, f'(t) \, dt$$

$$= \frac{l}{4\mu} \, \mathrm{l}\, r \left\{ f^2(t_2) - f^2(t_1) \right\}$$

Kiezen we dus de tijdstippen t_1 en t_2 zoodanig dat:

$$f(t_1) = f(t_2)$$

zoo is:

$$\int_{t_1}^{t_2} W_0 \, dt = 0.$$

m. a. w.:

de verplaatste hoeveelheid energie, *en dus ook de gemiddelde waarde der energiestrooming*, in een logarithmisch veld zijn = 0 *over ieder tijdsverloop, waarbij de begintoestand en de eindtoestand van het veld aan elkaar gelijk zijn.*

Voor een periodiek veranderlijk veld volgt hieruit onmiddellijk dat de gemiddelde waarde der energiestrooming over een geheel aantal perioden = 0 is.

Doch ook voor een niet periodiek veranderlijk veld kunnen we steeds twee tijdstippen aanwijzen, waarop de toestand dezelfde is, nl. het tijdstip, waarop het veld begint te ontstaan, en het tijdstip, waarop het weer geheel verdwenen is, voor welke beide tijdstippen geldt:

$$f(t_1) = f(t_2) = 0.$$

Hieruit volgt:

De gemiddelde waarde der energiestrooming in een logarithmisch veld over het geheele tijdsverloop, waarin dit veld bestaat, = 0.

Ten slotte kunnen we opmerken dat, aangezien $f(t)$ slechts tusschen *eindige* grenswaarden varieeren kan, bij onbepaalde aangroeiing van t noodzakelijk voldaan wordt aan:

$$\lim_{t=\infty} \frac{1}{t} \left\{ f^2(t) - f^2(0) \right\} = 0$$

en dus aan:

$$\lim_{t=\infty} \frac{1}{t} \int_0^t W_0 \, dt = 0$$

zoodat, ook afgezien van den werkelijken bestaansduur van het veld, de gemiddelde waarde der energiestrooming in een logarithmisch veld bij onbepaalde toename van de beschouwde tijdsruimte steeds tot 0 nadert.

Hiermede is aangetoond, dat we in het vraagstuk, waarmee we ons in dit hoofdstuk bezighouden, den logarithmischen term A_0 steeds buiten beschouwing mogen laten.

We keeren thans terug tot de beschouwing der energiestrooming in een $2p$-polig sinusoidaal veld, roteerende met de hoeksnelheid w, dat we ons voorstellen als geheel zelfstandig optredend, en waarvoor we dus, met weglating der indices p en q, welke dienen ter onderscheiding van meerdere gelijktijdig optredende velden, de uitdrukking voor de energiestrooming schrijven in den vorm:

$$W = \frac{l\,p^2}{2\,\mu} w \, P \, Q \sin p \, (\beta - \alpha)$$

Uit de in hoofdstuk I afgeleide uitdrukking voor den krachtstroom per pool N volgt voor een enkelvoudig veld der eerste soort:

$$N_1 = 2 \, P \, l \, \varrho^p$$

voor een enkelvoudig veld der tweede soort:

$$N_2 = 2 \, Q \, l \, \varrho^{-p}$$

Hebben beide krachtstroomen betrekking op hetzelfde cylinderoppervlak, zoo is dus:

$$N_1 \, N_2 = 4 \, P \, Q \, l^2$$

waaruit volgt, dat we de uitdrukking voor de energiestrooming bij een roteerend sinusoidaal veld in den vorm kunnen brengen:

$$W = \frac{p^2 w}{8 \mu l} N_1 N_2 \sin p (\beta - \alpha)$$

Het optreden van den vorm $N_1 N_2 \sin p (\beta - \alpha)$ in bovenstaande uitdrukking leidt ons tot de vraag, of we niet de beide krachtstroomen mogen voorstellen door de vectoren $\mathbf{N}_1$ en $\mathbf{N}_2$, beide normaal op de richting k, wier tensoren gelijk zijn aan N_1 en N_2 en waarvan het richtingsverschil gelijk is aan het magnetisch standsverschil der velden $p (\beta - \alpha)$.

Om deze vraag te beantwoorden merken we op, dat gelijksoortige enkelvoudige velden met gelijk aantal polen slechts van elkaar zijn onderscheiden door een verschil in intensiteit en door een verschil in stand, en dat dus de *voorstelling* dezer velden door gelijksoortige vectoren geoorloofd is, mits hunne samenstelling tot een resulteerend veld kan geschieden door uitvoering van eene mathematische operatie, welke met de samenstelling van vectoren identisch is.

Aangezien nu de samenstelling dezer velden neerkomt op de sommatie van eenige harmonische functies van θ, van den vorm $P \cos p (\theta + \alpha)$, welke sommatie, zooals bekend mag ondersteld worden, kan worden vervangen door de samenstelling van eenige vectoren, gelegen in eenzelfde vlak, wier tensoren gelijk zijn aan de waarden van P, en wier richtingsverschillen met een willekeurig gegeven rechte, gelegen in hun vlak, gelijk zijn aan de waarden van $p \alpha$ in de overeenkomstige harmonischen, is aan de laatstgenoemde voorwaarde voldaan.

We zullen dus gelijksoortige enkelvoudige velden, en de bij deze velden behoorende krachtstroomen, mogen samenstellen als vectoren, mits we aan deze vectoren richtingsverschillen toekennen, welke gelijk zijn aan de magnetische standsverschillen der overeenkomstige velden.

De voorstelling der in de uitdrukking voor W optredende krachtstroomen door de vectoren $\mathbf{N}_1$ en $\mathbf{N}_2$, normaal op de richting k, en met een richtingsverschil $= p (\beta - \alpha)$ is dus volkomen geoorloofd. Voeren we met deze voorstelling dan tevens de rotatiesnelheid van het veld in als een vector:

$$\mathbf{w} = k\,w$$

zoo gaat de uitdrukking voor de energiestrooming over in:

$$W = \frac{p^2\,\mathbf{w}}{8\,\mu\,l}\,[\mathbf{N}_2\,\mathbf{N}_1]$$

Met behulp der boven afgeleide betrekkingen zijn we thans in staat de energie-verplaatsing tusschen den stator en den rotor eener electrische machine te bepalen, zoodra slechts het magnetisch veld binnen het entrefer, en de veranderingen, welke dit veld ondergaat, volkomen bekend zijn.

Hierbij valt nog de volgende opmerking te maken.

Indien we twee *ongelijksoortige* enkelvoudige velden voorstellen door twee vectoren, zoo is het duidelijk dat we deze vectoren hebben op te vatten als ongelijksoortige grootheden, *welke niet voor vectorale samenstelling vatbaar zijn.*

Dit is nl. een onmiddelijk gevolg van het feit, dat de beide beschouwde velden behalve door een verschil in stand en een verschil in intensiteit nog op andere wijze, nl. *door een verschil in vorm*, van elkaar zijn onderscheiden.

Een saamgesteld sinusoidaal veld zal dus slechts kunnen worden voorgesteld door de beide vectoren *te samen*, welke ieder voor zich een der enkelvoudige veld-componenten bepalen.

In hoofdstuk V zal worden aangetoond dat de krachtstroomen per pool in een enkelvoudig veld symmetrisch zijn; we kunnen dus aan deze krachtstroomen bepaalde richtingen, nl. die der symmetrie-lijnen, toekennen, en in verband hiermee de richtingen der vectoren, waardoor de enkelvoudige velden worden voorgesteld, opvatten als overeenkomende met de richtingen der krachtstroomen.

In deze opvatting kunnen we dus eveneens nog een bepaalde richting toekennen aan de krachtstroomen in een saamgesteld veld, waarvan de enkelvoudige componenten kunnen worden voorgesteld door gelijk of tegengesteld gerichte vectoren; *in het algemeen* echter zal de toekenning van een bepaalde richting aan de krachtstroomen in een saamgesteld sinusoidaal veld *niet* mogelijk zijn. Inderdaad zal uit onze beschouwingen in hoofdstuk V blijken, dat in een saamgesteld sinusoidaal veld de krachtstroomen slechts dan symmetrisch zijn, indien de enkelvoudige velden hetzij gelijkstandig zijn, hetzij een magnetisch standsverschil bezitten van 180°.

Denken we ons nu de beide vectoren $\mathbf{N}_1$ en $\mathbf{N}_2$, welke te samen een saamgesteld sinusoidaal veld bepalen, ontbonden volgens 2 richtingen $O\overline{X}$ en $O\overline{Y}$, en duiden we hierbij de componenten van den vector $\mathbf{N}_1$ aan door $N_{1\bar{x}}$ en $N_{1\bar{y}}$, die van den vector $\mathbf{N}_2$ door $N_{2\bar{x}}$ en $N_{2\bar{y}}$.

De vector-componenten $N_{1\bar{x}}$ en $N_{2\bar{x}}$ stellen dan *te samen* een sinusoidaal veld voor, waaraan we een bepaalde richting kunnen toekennen, welke correspondeert met de richting $O\overline{X}$ in het vlak der vectoren.

Evenzoo stellen de vector-componenten $N_{1\bar{y}}$ en $N_{2\bar{y}}$ *te samen* een veld voor, waaraan we de richting kunnen toekennen, welke correspondeert met de richting $O\overline{Y}$ in het vlak der vectoren.

We hebben dus het saamgestelde sinusoidale veld, waarvan we zijn uitgegaan, volgens de richtingen $O\overline{X}$ en $O\overline{Y}$ ontbonden in 2 sinusoidale velden, die in 't algemeen eveneens weer saamgesteld zijn. Wanneer we nu aannemen, dat de vectoren $\mathbf{N}_1$ en $\mathbf{N}_2$ verschillende richtingen bezitten, zoo zal het blijkbaar niet mogelijk zijn de richtingen $O\overline{X}$ en $O\overline{Y}$ zoodanig te kiezen, dat de ontbondenen van *beide* vectoren in een der beide richtingen $= 0$ zijn, en dus het veld in die richting verdwijnt.

Dit laatste zal slechts het geval zijn, indien het veld, voorgesteld door de vectoren $\mathbf{N}_1$ en $\mathbf{N}_2$, *zelf* een bepaalde richting bezit, met andere woorden indien de richtingen dezer beide vectoren samenvallen, en dus voldaan is aan de conditie:

$$[\mathbf{N}_1\,\mathbf{N}_2] = 0$$

Is dit laatste echter het geval, zoo volgt uit de boven afgeleide uitdrukking voor de energieverplaatsing onmiddelijk:

$$W = 0$$

Hieruit mogen we de gevolgtrekking maken:

Bij eene electrische machine, waarbij energie tusschen den stator en den rotor wordt overgebracht, is het niet mogelijk aan het magnetisch veld binnen het entrefer een bepaalde richting toe te kennen.

Bij ontbinding van het veld naar 2 richtingen zullen, *hoe ook deze richtingen gekozen worden*, steeds *beide* veld-componenten verschillend van 0 zijn.

HOOFDSTUK IV.

Bepaling van het krachtskoppel eener electrische machine uit de verdeeling van het magnetisch veld binnen het entrefer.

De bepaling van de resultante der krachten, die op een systeem magneten en electrische stroomen door het omringende magnetisch veld worden uitgeoefend, komt neer op de bepaling van volume-integralen, welke volgens bekende methoden in oppervlaks-integralen kunnen worden omgezet.

Door Maxwell is aangetoond, dat het verband tusschen de volume-integralen eenerzijds en de oppervlaks-integralen anderzijds de volgende physische interpretatie toelaat:

de resultante der over het volume van de beschouwde magneten en stroomgeleiders verdeelde krachten is identisch met de resultante van een systeem spanningen, verdeeld over een willekeurig oppervlak, dat het beschouwde volume geheel insluit.

Duiden we weer door ν den eenheidsvector aan in de richting der normaal naar een oppervlaks-element $d\,o$, zoo is voor dit oppervlaks-element de Maxwell'sche spanning $\mathbf{T}$ bepaald door:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{8\pi\mu}(\nu\,\mathbf{B}^2 - 2\,\mathbf{B}\,.\,\mathbf{B}\,\nu)$$

Voor een cylinderoppervlak, waarvan de richting der beschrijvende lijnen bepaald is door den eenheidsvector k, zal de eenheidsvector ν overal loodrecht op k gericht zijn en, daar dit bij de door ons beschouwde velden eveneens het geval is met de magnetische inductie $\mathbf{B}$, zal de spanning $\mathbf{T}$ in eenig punt van een dergelijk cylinderoppervlak geen componente volgens de richting k bezitten.

Voor een oneindig smalle strook van het cylinderoppervlak, begrensd door 2 vlakken, normaal op de richting k, zullen de spanningen $\mathbf{T}$ als resultante opleveren een kracht, normaal op de richting k, benevens een koppel volgens de richting k, waarvan de grootte afhankelijk is van het aan de kracht toegekende aangrijpingspunt.

Om nu de resultante der spanningen te leeren kennen, werkende op een deel van het cylinderoppervlak, overeenkomende met een eindige lengte l der beschrijvende lijn, denken we ons dit oppervlak verdeeld in oneindig smalle strooken, en voor ieder dezer strooken de resulteerende kracht en het resulteerende koppel bepaald, waarbij we de aangrijpingspunten van al deze elementaire krachten kiezen op eene as, evenwijdig met de richting der beschrijvende lijnen. Aangezien we te doen hebben met een toestand, die in de richting k geene verandering ondergaat, zullen de op de as aangrijpende elementaire krachten als resultante opleveren een kracht, normaal op de richting der as, en aangrijpende in het midden dezer as, terwijl de elementaire koppels te samen weer een koppel zullen opleveren volgens deze as.

Denken we ons thans binnen het entrefer eener electrische machine een cylinderoppervlak:

$$\varrho = r$$

waarvan de omwentelingsas samenvalt met die der machine, zoo levert ons de bovenbedoelde samenstelling der spanningen $\mathbf{T}$, verdeeld over de buitenzijde van het cylinderoppervlak, de kracht en het koppel op, werkende op de as der machine.

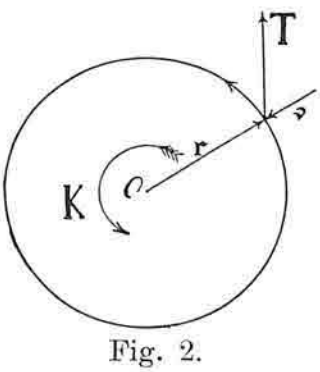


Fig. 2.

Aangezien de resulteerende kracht geenerlei beweging der machine-as zal kunnen veroorzaken, doch door de reactie der steunpunten van deze as zal worden opgeheven *), is het voor ons alleen van belang de waarde van het door de spanningen opgeleverde koppel te leeren kennen dat blijkbaar (zie fig. 2) bepaald is door:

$$\mathbf{K} = \int [\mathbf{r} \, . \, \mathbf{T}] \, d\,o$$

*) *In het algemeen* zal deze kracht niet = o zijn. Bij de practisch toegepaste machines is dit weliswaar het geval, vooropgesteld een *volkomen* centreering van den rotor; een machine waarbij, ook bij volmaakte uitvoering, het veld op de as een kracht uitoefent, die door de steunpunten moet worden opgenomen, is evenwel zéér goed denkbaar.

waarin:

$$d\,o = l\,r\,d\,\theta$$

en, daar ν een eenheidsvector is volgens de *binnenwaarts* gerichte normaal op het cylinderoppervlak:

$$\mathbf{r} = -\,\nu\,r$$

zoodat:

$$\mathbf{K} = l\,r^2 \int_0^{2\pi} [\,\mathbf{T}\,\nu\,]\,d\,\theta$$

welke uitdrukking na invoering der bovenaangegeven waarde van $\mathbf{T}$ overgaat in:

$$\mathbf{K} = \frac{l\,r^2}{8\,\pi\,\mu}\int_0^{2\pi}\Big[\,(\,\nu\,\mathbf{B}^2 - 2\,\mathbf{B}\,.\,\mathbf{B}\,\nu\,)\,\nu\,\Big]\,d\,\theta$$

of, in aanmerking nemende dat:

$$\mathbf{B}\,\nu = -\,B_\varrho = -\,\frac{1}{r}\frac{\delta\,A}{\delta\,\theta}$$

$$[\,\mathbf{B}\,\nu\,] = k\,B_\theta = -\,k\,\frac{\delta\,A}{\delta\,\varrho}$$

$$\mathbf{K} = -\,\frac{l\,r}{4\,\pi\,\mu}\,k\int_0^{2\pi}\frac{\delta\,A}{\delta\,\varrho}\,\frac{\delta\,A}{\delta\,\theta}\,d\,\theta$$

In het vorige hoofdstuk vonden we voor de waarde der energiestrooming in het geval van een roteerend magnetisch veld:

$$W = -\,\frac{l\,r\,w}{4\,\pi\,\mu}\int_0^{2\pi}\frac{\delta\,A}{\delta\,\varrho}\,\frac{\delta\,A}{\delta\,\theta}\,d\,\theta$$

zoodat in dit geval de betrekking geldt:

$$W = \mathbf{K}\,\mathbf{w}.$$

Hieruit volgt:

bij een electromotor met roteerend magnetisch veld is de hoeveelheid energie, welke door het entrefer van den stator op den rotor wordt overgebracht, gelijk aan de hoeveelheid energie, welke vereischt wordt om den motor met synchrone snelheid te doen arbeiden.

Er kunnen zich nu ten aanzien van een dergelijken motor drie gevallen voordoen, nl.:

1°. Aan de rotorwikkeling wordt juist die hoeveelheid electrische energie toegevoerd, welke overeenstemt met de energieverliezen in den rotor. De rotatiesnelheid van den motor is dan noodzakelijk gelijk aan de rotatiesnelheid van het veld, en we hebben dus te doen met een zoogenaamden synchronen motor.

2°. Aan de rotorwikkeling wordt geene electrische energie toegevoerd of onttrokken, wat het geval is bij de asynchrone motoren met kortgesloten rotorwikkeling. De motorsnelheid w_0 zal dan een geringere waarde aannemen dan de veldsnelheid w.

Tusschen het snelheidsverlies (den z.g. „slip") $w - w_0$ en het energieverlies V in den rotor bestaat dan de betrekking:

$$\frac{w - w_0}{w} = \frac{V}{W}$$

3°. Aan de rotorwikkeling kan naar willekeur electrische energie toegevoerd of onttrokken worden, zooals het geval is bij de meerphasige collector-motoren naar G o e r g e s, H e y l a n d e.a.

Deze toevoering of onttrekking van electrische energie aan de rotorwikkeling heeft dan als direct gevolg eene daarmede evenredige vergrooting of verkleining der motorsnelheid boven of beneden de synchrone.

Op volkomen dezelfde wijze als de stellingen van hoofdstuk III, welke betrekking hebben op de energie-verplaatsing in een saamgesteld magnetisch veld, kunnen we thans ook de volgende hiermee analoge stellingen ten aanzien van het door het veld overgebrachte krachtskoppel bewijzen:

I. In een uit sinusoidale velden saamgesteld magnetisch veld is op ieder oogenblik het krachtskoppel gelijk aan de som der krachtskoppels, welke afzonderlijk zouden optreden onder den invloed van ieder der sinusoidale velden.

II. In een periodiek veranderlijk sinusoidaal magnetisch veld is de gemiddelde waarde van het krachtskoppel over den duur eener periode gelijk aan de som der constante krachtskoppels, welke afzonderlijk zouden optreden onder den invloed van ieder der roteerende velden, waaruit het beschouwde veld is saamgesteld.

III. In een uit roteerende sinusoidale velden saamgesteld magnetisch veld is de gemiddelde waarde van het krachtskoppel gelijk aan de som der constante krachtskoppels, welke afzonderlijk zouden optreden *onder den invloed van ieder der roteerende sinusoidale componenten.*

Hierbij hebben we onder de gemiddelde waarde $\overline{\mathbf{K}}$ van het krachtskoppel te verstaan:

$$\overline{\mathbf{K}} = \lim_{t=\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \mathbf{K}\, d\, t$$

welke uitdrukking voor een periodiek veranderlijk veld gelijk is aan de gemiddelde waarde van het koppel over den duur eener periode.

Voor een *willekeurig veranderlijk* sinusoidaal veld, bepaald door:

$$A = P\, \varrho^{p} \cos p\,(\,\theta + \alpha\,) + Q\, \varrho^{-p} \cos p\,(\,\theta + \beta\,)$$

vinden we op volkomen dezelfde wijze als in hoofdstuk III de waarde van W bepaald werd voor een *roteerend* sinusoidaal veld:

$$\overline{\mathbf{K}} = \frac{l\, p^2}{2\, \mu}\, k\, P\, Q \sin p\,(\,\beta - \alpha\,)$$

welke uitdrukking na invoering der krachtstroomen $\mathbf{N}_1$ en $\mathbf{N}_2$ overgaat in:

$$\overline{\mathbf{K}} = \frac{p^2}{8\, \mu\, l} \left[\mathbf{N}_2\, \mathbf{N}_1 \right]$$

Uit deze uitdrukking volgt weer:

1°. Evenals de energie-verplaatsing komt het krachtskoppel tot stand onder de samenwerking van de velden der eerste soort met die der tweede soort van gelijk aantal polen; zijn dus in het entrefer eener electrische machine slechts gelijksoortige velden aanwezig, zoo treedt geen krachtskoppel op.

2°. Onder den invloed van 2 *ongelijksoortige* velden met gelijk aantal polen komt alleen dan een krachtskoppel tot stand, indien zij ten opzichte van elkaar een magnetisch standsverschil bezitten. Het koppel, werkende op den rotor eener electrische machine, is gericht in den zin, waarin het veld der eerste soort ten opzichte van het veld der tweede soort verplaatst is.

Roteeren de beide ongelijksoortige velden, onder wier invloed het krachtskoppel tot stand komt, met ongelijke snelheden, zoo is het koppel periodiek veranderlijk, en zijn gemiddelde waarde $= 0$.

Beschouwen we thans nog volledigheidshalve het aandeel in het krachtskoppel, opgeleverd door den logarithmischen term A_0.

Hierbij valt onmiddellijk op te merken, dat aangezien A_0 onafhankelijk is van θ, de integraal:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\delta A_0}{\delta \varrho} \frac{\delta A_0}{\delta \theta} d\theta$$

noodzakelijk $= 0$ is, en dat dit dus eveneens het geval is met het krachtskoppel $\mathbf{K}_0$, dat door de hier beschouwde veld-componente wordt opgeleverd.

Bij de bepaling van het krachtskoppel kan dus de logarithmische term geheel buiten beschouwing blijven.

Met behulp der boven afgeleide betrekkingen kunnen we thans ook het koppel eener electrische machine bepalen zoodra het magnetisch veld binnen het entrefer volkomen bekend is.

Op dezelfde gronden, als in hoofdstuk III geschiedde ten aanzien der energie-overbrenging, kunnen we ook hier weer de gevolgtrekking maken:

Indien bij eene electrische machine het krachtskoppel verschillend van 0 *is, zoo is het niet mogelijk aan het magnetisch veld binnen het entrefer eene bepaalde richting toe te kennen.*

Bij ontbinding van het veld naar 2 richtingen, zullen, *hoe ook deze richtingen gekozen worden,* steeds *beide* veld-componenten verschillend van 0 zijn.

HOOFDSTUK V.

Nader onderzoek van het sinusoidale magnetisch veld.

Om de verdeeling van een sinusoidaal magnetisch veld volledig te leeren kennen is het voldoende de functie:

$$A = P \varrho^p \cos p(\theta + \alpha) + Q \varrho^{-p} \cos p(\theta + \beta)$$

te onderzoeken over een hoek $\frac{\pi}{p}$.

Daar nl. voor gelijke waarden van ϱ en twee waarden van θ, welke $\frac{\pi}{p}$ verschillen, de waarden van A op het teeken na aan elkaar gelijk zijn, zal binnen twee opvolgende hoeken $\frac{\pi}{p}$ steeds weer hetzelfde verloop der krachtlijnen optreden, waarbij slechts op te merken valt, dat hierbij aan overeenkomstige krachtlijnen een verschillende zin moet worden toegekend.

Symmetrische velden. — Indien de krachtstroomen per pool symmetrisch zijn, zullen in twee punten met gelijke ϱ, gelegen op gelijken hoekafstand ter weerszijden van de symmetrie-lijnen, steeds waarden van A moeten optreden, welke op het teeken na aan elkaar gelijk zijn. In de symmetrie-lijnen zelf zal dus $A = 0$ moeten zijn.

Hieruit volgt als noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor de symmetrie van het veld, dat de krachtlijnen:

$$A = 0$$

rechten zijn, gaande door den oorsprong van het coördinaten-systeem, dien wij nader aanduiden als het centrum van het veld

Uit de vergelijking dezer krachtlijnen volgt:

$$\operatorname{tg} p\,\theta = \frac{P \varrho^p \cos p\,\alpha + Q \varrho^{-p} \cos p\,\beta}{P \varrho^p \sin p\,\alpha + Q \varrho^{-p} \sin p\,\beta}$$

welke uitdrukking blijkbaar onafhankelijk van ϱ is voor:

$$\operatorname{tg} p\,\alpha = \operatorname{tg} p\,\beta$$

Is aan deze laatste conditie voldaan, zoo gaat de vergelijking der krachtlijnen:

$$A = 0$$

over in:

$$\operatorname{tg} p\,\theta = \operatorname{cotg} p\,\alpha$$

voorstellende een systeem van $2p$ rechte lijnen door het centrum, welke elkaar opvolgen op gelijke hoekafstanden $\frac{\pi}{p}$.

Door draaiing van het coördinaten-systeem over een hoek $-\alpha$ brengen we de uitdrukking voor A tot den vorm:

$$A = (P \varrho^{p} \pm Q \varrho^{-p}) \cos p \theta$$

waarin we het $\pm$ teeken aanhouden teneinde aan P en Q beide steeds *positieve* waarden te kunnen toekennen.

Blijkbaar is dus een *symmetrisch* sinusoidaal veld hetzij enkelvoudig, hetzij saamgesteld uit *gelijkstandige* of wel uit *tegengestelde* enkelvoudige componenten; daarentegen zullen twee enkelvoudige velden van verschillende soort, wier magnetisch standsverschil tusschen 0 en 180° gelegen is, steeds een *asymmetrisch* veld tot resultante hebben.

De hartlijnen der krachtstroomen per pool zijn blijkbaar thans bepaald door:

$$\cos p \theta = 0$$

het zijn dus de stralen:

$$\theta = \frac{\pi}{2p}, \; \frac{3\pi}{2p} \text{ enz. } \frac{(4p-1)\pi}{2p}$$

Voor het gebied, waarover we het veld zullen onderzoeken, kiezen we den hoek $\frac{\pi}{p}$ tusschen de hartlijnen:

$$\theta = \pm \frac{\pi}{2p}$$

Wij hebben dus slechts te doen met krachtlijnen, welke *geheel* binnen het beschouwde gebied gelegen zijn; alle krachtlijnen zijn, wat hun vorm aangaat, symmetrisch ten opzichte van den straal $\theta = 0$, en bezitten dus ter weerszijden van deze lijn tegengestelden zin.

a. *Enkelvoudig veld der eerste soort.*

Uit de vergelijking der krachtlijnen:

$$A = P \varrho^{p} \cos p \theta$$

volgt, dat voor de positieve en negatieve waarden van A de krachtlijnen afwisselend zullen gelegen zijn binnen de hoeken $\frac{\pi}{p}$, gevormd door de hartlijnen van het veld.

Binnen het beschouwde gebied, begrensd door de hartlijnen:

$$\theta = \pm \frac{\pi}{2p}$$

zullen we slechts te doen hebben met *positieve* waarden van A.

Tusschen:

$$\theta = -\frac{\pi}{2p} \text{ en } \theta = 0$$

is

$$\frac{\delta A}{\delta \theta}, \text{ en dus } B_\varrho = \frac{1}{\varrho}\frac{\delta A}{\delta \theta}$$

positief, daarentegen tusschen:

$$\theta = 0 \text{ en } \theta = \frac{\pi}{2p}$$

negatief; m.a.w. $\theta = -\frac{\pi}{2p}$ is hartlijn van een *buitenwaarts* gerichten krachtstroom, $\theta = \frac{\pi}{2p}$ van een *binnenwaarts* gerichten krachtstroom.

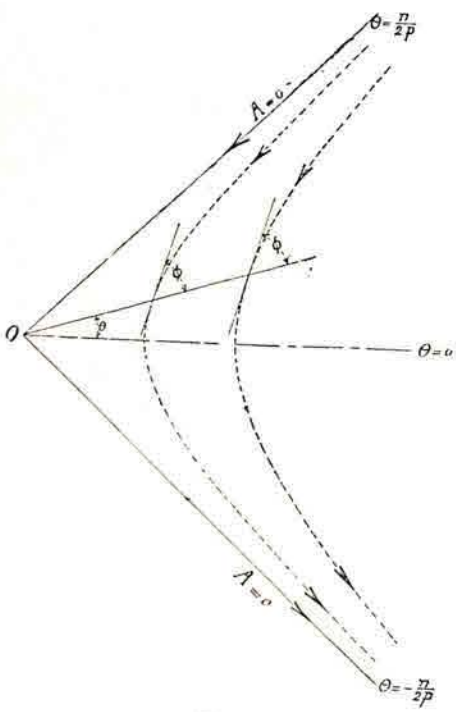


Fig. 3.

Gaan we in fig. 3 het verloop na der krachtlijn:

$$P \varrho^p \cos p\,\theta = a$$

waarin a een positieve constante is, zoo blijkt onmiddellijk dat de minimale waarde van ϱ:

$$\varrho = \sqrt[p]{\frac{a}{P}}$$

optreedt voor $\theta = 0$, terwijl bij verandering van θ van 0 tot $\pm\frac{\pi}{2p}$, ϱ regelmatig aangroeit tot ∞. De krachtlijn loopt dus asymptotisch aan de beide hartlijnen, welke het beschouwde gebied begrenzen.

Is eenmaal het verloop eener bepaalde krachtlijn vastgesteld zoo worden alle andere krachtlijnen verkregen door verandering der voerstralen in reden van $\sqrt[p]{a}$.

Bepalen we den hoek Φ, waaronder de voerstralen de krachtlijnen snijden.

Uit:

$$P\,\varrho^{p}\cos p\,\theta = a$$

volgt voor constante a:

$$\varrho^{p-1}\cos p\,\theta - \varrho^{p}\sin p\,\theta\,\frac{\delta\,\theta}{\delta\,\varrho} = 0$$

dus:

$$\operatorname{tg}\Phi = \varrho\,\frac{\delta\,\theta}{\delta\,\varrho} = \operatorname{cotg} p\,\theta$$

De hoek Φ blijkt dus onafhankelijk te zijn van ϱ, m. a. w.: *iedere voerstraal snijdt de gezamentlijke krachtlijnen onder gelijke hoeken.*

In het geval van een tweepolig veld is:

$$\operatorname{tg}\Phi = \operatorname{cotg}\theta$$

dus:

$$\Phi = \frac{\pi}{2} - \theta$$

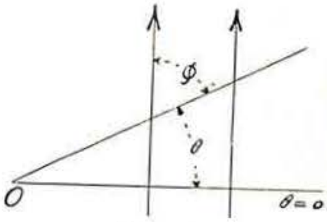


Fig. 4.

De krachtlijnen (fig. 4) zijn in dit geval normaal gericht op de lijn $\theta = 0$, en dus evenwijdige rechte lijnen.

Het 2-polig sinusoidaal veld der eerste soort is bijgevolg eenparig.

Heeft men eenmaal het verloop der krachtlijnen vastgesteld binnen een hoek $\frac{\pi}{p}$, zoo verkrijgt men door $2p$-voudige verplaatsing dezer krachtlijnen telkens over een hoek van deze grootte het volledig beeld van het magnetisch veld. Dit laatste is in fig. 5 voor een vierpolig veld der eerste soort uitgevoerd.

Uit de betrekking:

$$P\,\varrho^{2}\cos 2\,\theta = a$$

volgt, dat in dit geval de krachtlijnen takken van gelijkzijdige hyperbolen zijn, wier asymptoten de beide hartlijnen zijn van het veld.

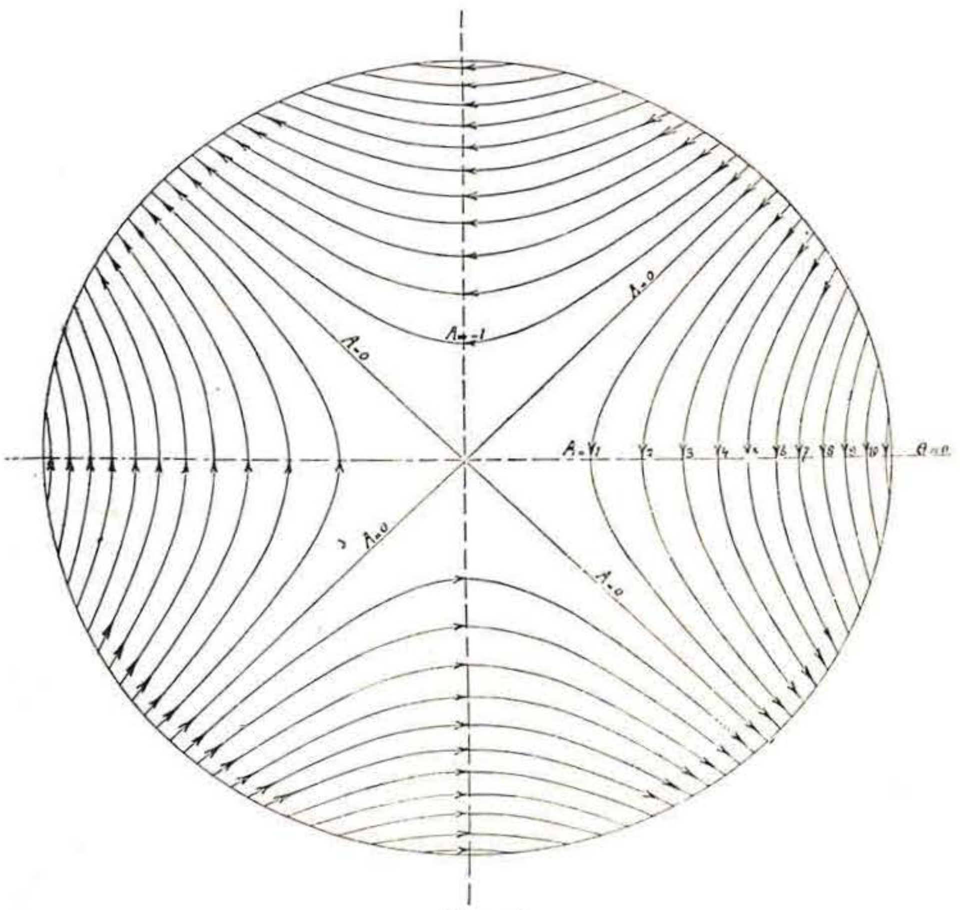


Fig. 5.

De krachtlijnen zijn in deze figuur geteekend voor waarden van a, welke telkens 1 verschillen, zoodat tusschen twee opvolgende krachtlijnen per lengte-eenheid der asrichting een krachtstroom $= 1$ optreedt. De krachtlijnen trekken zich buitenwaarts steeds meer naar de hartlijnen samen; de waarde der krachtstroomen neemt dus toe naarmate men zich verder van de as van het veld verwijdert.

Dit laatste volgt trouwens onmiddellijk uit de uitdrukking voor den krachtstroom per pool:

$$N = 2\,P\,l\,\varrho^{p}\,.$$

Het gevolg hiervan is, dat een veld der eerste soort zich nimmer tot in het oneindige kan uitstrekken, doch steeds uitwendig begrensd moet zijn door een discontinuiteitsvlak, waarbuiten het veld een anderen vorm aanneemt.

b. *Enkelvoudig veld der tweede soort.*

Evenals bij een veld der eerste soort zullen in het beschouwde gebied, begrensd door de hartlijnen $\theta = \pm \frac{\pi}{2p}$ slechts positieve waarden van:

$$A = Q \varrho^{-p} \cos p\,\theta$$

optreden.

Tusschen:

$$\theta = -\frac{\pi}{2p} \text{ en } \theta = 0$$

bezit
$$B_\varrho = \frac{1}{\varrho}\frac{\delta A}{\delta \theta}$$

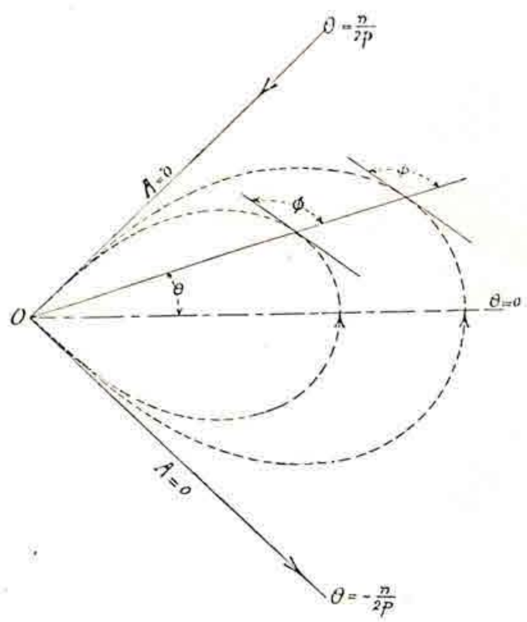


Fig. 6.

weer een *positieve*, tusschen:

$$\theta = 0 \text{ en } \theta = \frac{\pi}{2p}$$

een *negatieve* waarde; m. a. w. $\theta = -\frac{\pi}{2p}$ is weer hartlijn van een *buitenwaarts*, $\theta = \frac{\pi}{2p}$ van een *binnenwaarts* gerichten krachtstroom.

Onderzoeken we in fig. 6 de krachtlijn:

$$Q \varrho^{-p} \cos p\,\theta = b$$

zoo blijkt dat thans de *maximale* waarde van ϱ:

$$\varrho = \sqrt[p]{\frac{Q}{b}}$$

optreedt voor $\theta = 0$, terwijl bij verandering van θ van 0 tot $\pm \frac{\pi}{2p}$

de waarde van ϱ regelmatig op 0 afneemt. In het centrum raakt de krachtlijn aan de beide hartlijnen, welke het te onderzoeken gebied begrenzen.

Nadat het verloop van een bepaalde krachtlijn is vastgesteld, kan iedere willekeurige andere krachtlijn bepaald worden door verandering der voerstralen in omgekeerde reden van $\sqrt[p]{b}$.

Op dezelfde wijze als bij een veld der eerste soort den hoek ϱ bepalende, welken de voerstralen maken met de richting der krachtlijnen, vinden we:

$$\mathrm{tg}\,\varrho = -\,\mathrm{cotg}\,p\,\theta.$$

Iedere voerstraal snijdt dus weer de gezamentlijke krachtlijnen onder gelijke hoeken.

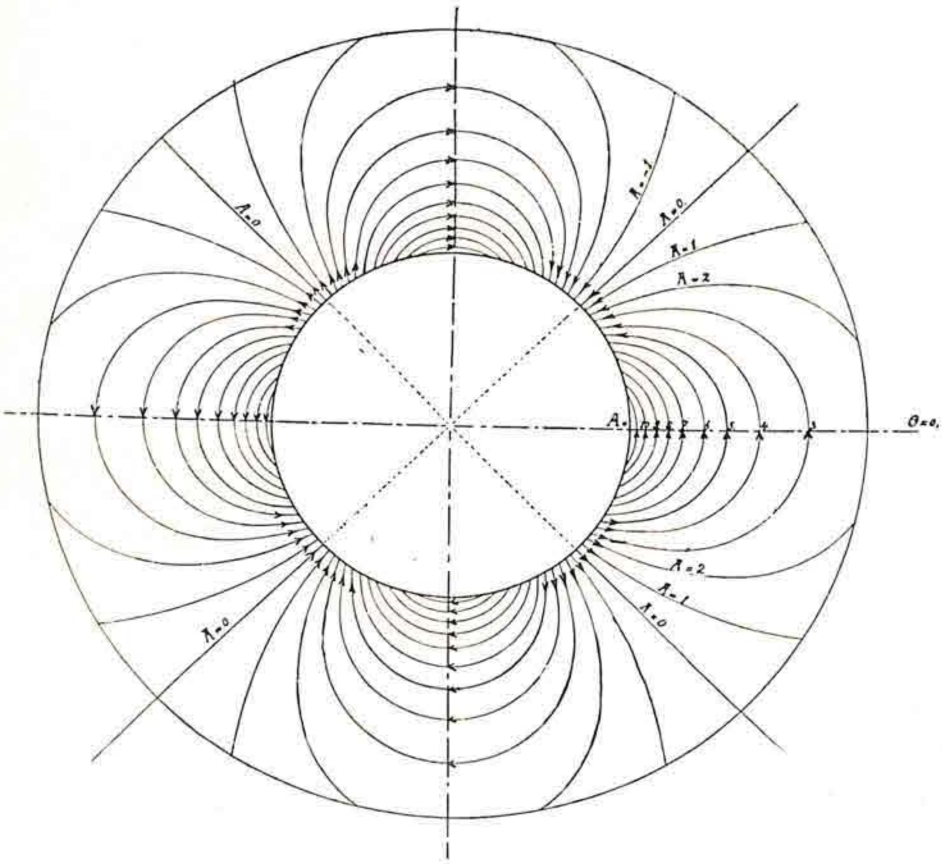


Fig. 7.

Door $2p$-voudige verplaatsing van het krachtlijnen-tracé tusschen twee opvolgende hartlijnen telkens over een hoek $\frac{\pi}{p}$ verkrijgen we weer het volledige beeld van het magnetisch veld. In fig. 7 is dit voor een vierpolig veld uitgevoerd, waarbij weer de krachtlijnen zijn geteekend voor de waarden van $a = 0, \ \pm 1, \ \pm 2$ enz.

Uit de betrekking:

$$Q \varrho^{-p} \cos 2 \theta = b$$

volgt, dat thans de krachtlijnen, gelegen tusschen twee opvolgende hartlijnen, halve lemniscaten zijn. *)

De krachtstroomen per pool:

$$N = 2 Q l \varrho^{-p}$$

nemen thans binnenwaarts onbepaald toe.

Hieruit volgt dus, dat een veld der tweede soort zich nimmer tot het centrum kan uitstrekken, doch steeds inwendig begrensd zal moeten zijn door een discontinuiteitsvlak, waarbinnen een veld van anderen vorm optreedt.

c. *Saamgestelde symmetrische velden.*

In het algemeen kan het krachtlijnen-tracé van een saamgesteld veld op eenvoudige wijze uit de krachtlijnen-tracé's der samenstellende velden worden afgeleid.

---

*) Blijkbaar zijn dus de krachtlijnen in twee 4-polige gelijkstandige ongelijksoortige enkelvoudige velden elkaars inversen, waarbij het centrum der beide velden tevens het inversiecentrum der krachtlijnen is.

Dat deze eigenschap *algemeen* geldig is voor twee $2p$-polige gelijkstandige ongelijksoortige enkelvoudige velden, blijkt onmiddelijk, indien we opmerken dat uit de voor dit geval geldende vergelijkingen van 2 ongelijksoortige krachtlijnen:

$$P \varrho_1{}^p \cos p \theta = a$$

en

$$Q \varrho_2^{-p} \cos p \theta = b$$

onmiddelijk volgt:

$$\frac{P}{Q} \varrho_1{}^p \varrho_2{}^p = \frac{a}{b}$$

dus:

$$\varrho_1 \varrho_2 = \mathit{constant}$$

welke betrekking algemeen uitdrukt, dat de beide beschouwde krommen elkaars inversen zijn.

Duiden we de functie A voor de enkelvoudige componenten aan door A_1 en A_2, zoo is voor het resulteerende veld:

$$A = A_1 + A_2$$

Het snijpunt der krachtlijnen van de samenstellende velden:

$$A_1 = a$$

en

$$A_2 = b$$

levert ons bijgevolg een punt der krachtlijn:

$$A = a + b$$

van het resulteerend veld.

Denken we ons thans (fig. 8) een reeks krachtlijnen van het eerste veld:

$$A_1 = a_1\ , a_2\ , a_3 \text{ enz.}$$

en een reeks krachtlijnen van het tweede veld:

$$A_2 = b_1\ , b_2\ , b_3 \text{ enz.}$$

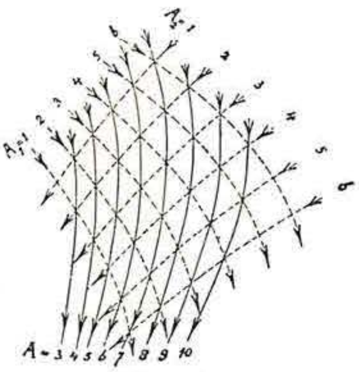


Fig. 8.

waarin de getallen a en b rekenkundige reeksen vormen met hetzelfde verschil, zoo leveren ons de snijpunten der opvolgende krachtlijnen van de eerste reeks volgens toenemende waarden van a, met de opvolgende krachtlijnen van de tweede reeks volgens afnemende waarden van b, een serie punten, welke alle gelegen zijn op eene krachtlijn van het resulteerend veld.

Op deze wijze vinden we bijgevolg een reeks krachtlijnen van het resulteerend veld als diagonaals-gewijze verbindingskrommen der snijpunten van de krachtlijnen der samenstellende velden.

De in het volgende afgebeelde krachtlijnen-figuren van saamgestelde velden zijn alle op deze wijze verkregen door superpositie der boven voorgestelde enkelvoudige velden.

Beschouwen we vooreerst een uit twee *gelijkstandige* enkelvoudige velden van verschillende soort samengesteld veld, waarvan het krachtlijnen-tracé in fig. 9 is afgebeeld.

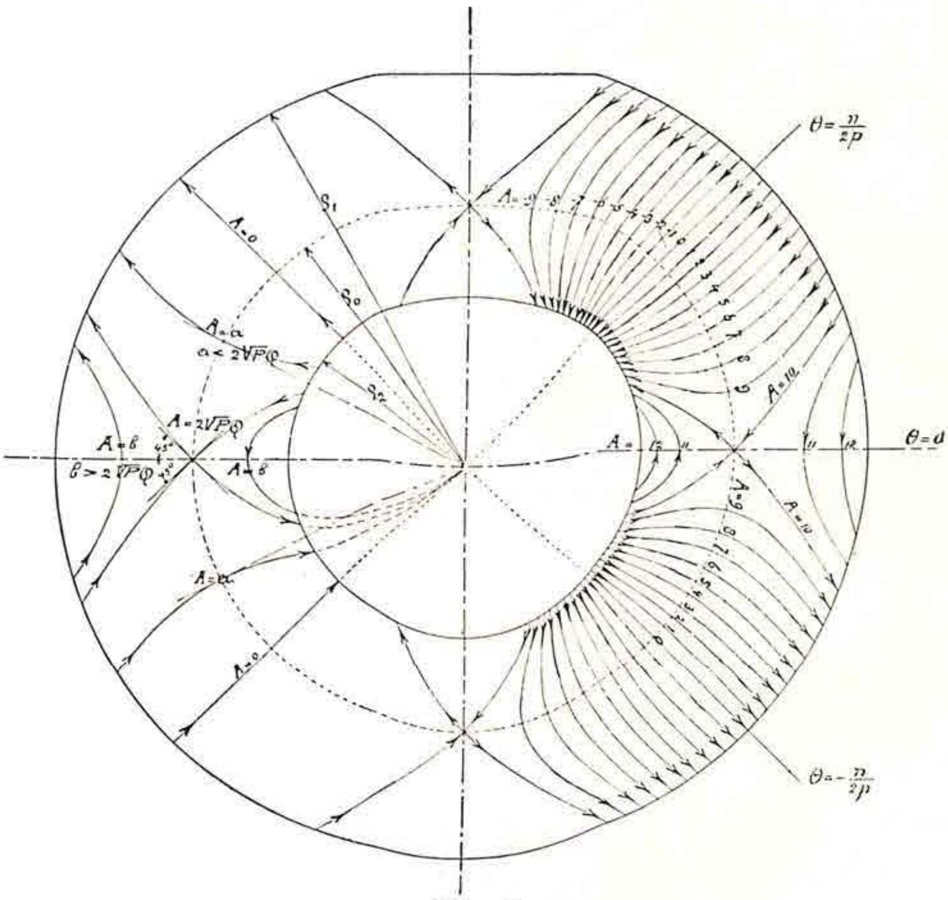


Fig. 9.

Uit de voor een dergelijk veld geldende uitdrukking der functie A:

$$A = (P \varrho^{p} + Q \varrho^{-p}) \cos p\, \theta$$

volgt weer, dat binnen het te onderzoeken gebied slechts *positieve* waarden van A optreden. De straal $\theta = -\frac{\pi}{2p}$ is weer hartlijn van een *buitenwaarts* gerichten krachtstroom, $\theta = \frac{\pi}{2p}$ van een *binnenwaarts* gerichten krachtstroom.

We merken vooreerst op, dat bij onbepaald toenemende ϱ de invloed van het veld der tweede soort, bij onbepaald afnemende ϱ de invloed van het veld der eerste soort op het resulteerend veld verdwijnen; hieruit volgt: *in het centrum raken alle krachtlijnen aan de hartlijnen van het veld, terwijl zij bovendien deze hartlijnen tot asymptoten hebben.*

Lossen we uit de vergelijking der krachtlijn:

$$A = a$$

ϱ op als functie van θ, zoo vinden we:

$$\varrho^p = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4\,P\,Q\cos^2 p\,\theta}}{2\,P\cos p\,\theta}$$

welke uitdrukking voor:

$$4\,P\,Q\cos^2 p\,\theta < a^2$$

twee *positieve* waarden van ϱ^p, en dus van ϱ, oplevert.

Voor:

$$4\,P\,Q\cos^2 p\,\theta = a^2$$

worden beide waarden van ϱ aan elkaar gelijk, terwijl voor:

$$4\,P\,Q\cos^2 p\,\theta > a^2$$

geen bestaanbare waarden van ϱ optreden.

Blijkbaar zullen we dus te doen hebben met een verschillend verloop der krachtlijnen, alnaarmate de constante, waarmede de functie A gelijk gesteld wordt, grooter dan, gelijk aan, of kleiner dan $2\sqrt{PQ}$ is.

We zullen deze drie gevallen achtereenvolgens onderzoeken.

1°. $$A = a < 2\sqrt{P\,Q}$$

We verkrijgen twee waarden van ϱ voor waarden van θ, waarbij:

$$\cos^2 p\,\theta < \frac{a^2}{4\,P\,Q}$$

welke waarden aan elkaar gelijk worden voor:

$$\cos^2 p\,\theta = \frac{a^2}{4\,P\,Q}$$

en dan bedragen:

$$\varrho_0 = \sqrt[2p]{\frac{Q}{P}}$$

Krachtlijnen van deze soort bestaan dus blijkbaar uit twee takken, welke symmetrisch liggen ten opzichte van de lijn $\theta = 0$.

Beide takken strekken zich uit van het centrum tot in het oneindige; een der takken is gelegen tusschen de hartlijn:

$$\theta = \frac{\pi}{2\,p}$$

en den voerstraal:

$$\theta = \frac{1}{p} \operatorname{bg} \cos \frac{a}{2\sqrt{P\,Q}}$$

de andere tak is gelegen tusschen de hartlijn:

$$\theta = -\frac{\pi}{2\,p}$$

en den voerstraal:

$$\theta = -\frac{1}{p} \operatorname{bg} \cos \frac{a}{2\sqrt{P\,Q}}$$

In het centrum raken beide takken de hartlijnen; vervolgens naderen ze tot de voerstralen:

$$\theta = \pm \frac{1}{p} \operatorname{bg} \cos \frac{a}{2\sqrt{P\,Q}}$$

welke zij raken in hunne snijpunten met den cirkel:

$$\varrho = \varrho_0$$

om daarna weer te naderen tot de hartlijnen, waaraan zij asymptotisch verloopen.

2°. $$A = 2\sqrt{P\,Q}$$

Voor dit grensgeval gaat de vergelijking der krachtlijn over in:

$$\varrho^p = \sqrt{\frac{Q}{P}} \cdot \frac{1 \pm \sin p\,\theta}{\cos p\,\theta} = \sqrt{\frac{Q}{P}} \cdot \frac{\cos p\,\theta}{1 \mp \sin p\,\theta}$$

Van de beide takken, overeenkomende met het + en — teeken in bovenstaande uitdrukkingen, zien we onmiddelijk in, dat zij symmetrisch gelegen zijn ten opzichte der lijn $\theta = 0$, zoodat we kunnen volstaan met den tak, overeenkomende met het + teeken in de eerste en met het — teeken in de tweede uitdrukking, nader te onderzoeken.

Vooreerst merken we op, dat iedere waarde van θ tusschen $\pm \frac{\pi}{2p}$ één positieve waarde van ϱ oplevert, welke continu aangroeit met θ.

Uit:
$$\varrho^p = \sqrt{\frac{Q}{P}} \cdot \frac{\cos p\,\theta}{1 - \sin p\,\theta}$$

volgt voor $\theta = -\frac{\pi}{2p}$ $\qquad \varrho = 0$

uit beide uitdrukkingen:

voor $\theta = 0$ $\qquad \varrho = \varrho_0 = \sqrt[2p]{\frac{Q}{P}}$

en uit:
$$\varrho^p = \sqrt{\frac{Q}{P}} \cdot \frac{1 + \sin p\,\theta}{\cos p\,\theta}$$

voor $\theta = \frac{\pi}{2p}$ $\qquad \varrho = \infty$

De beschouwde tak raakt dus in het centrum de hartlijn $\theta = -\frac{\pi}{2p}$ en verloopt asymptotisch aan de hartlijn $\theta = \frac{\pi}{2p}$; omgekeerd zal dus de tweede tak in het centrum de hartlijn $\theta = \frac{\pi}{2p}$ raken, en asymptotisch verloopen aan de hartlijn $\theta = -\frac{\pi}{2p}$. Beide takken hebben voor $\theta = 0$ een gemeenschappelijk snijpunt met den cirkel $\varrho = \varrho_0$; *de krachtlijn bezit dus een dubbelpunt.*

Voor de overige krachtlijnen vonden we, dat zij den cirkel $\varrho = \varrho_0$ *normaal* snijden; dat dit met de beide takken der beschouwde krachtlijn *niet* het geval is, toonen we gemakkelijk aan door bepaling van ψ.

Uit
$$\varrho^p = \sqrt{\frac{Q}{P}} \cdot \frac{1 \pm \sin p\,\theta}{\cos p\,\theta}$$

volgt onmiddellijk:
$$\varrho^{p-1} = \sqrt{\frac{Q}{P}} \cdot \frac{\pm 1 + \sin p\,\theta}{\cos^2 p\,\theta} \, \frac{\delta\,\theta}{\delta\,\varrho}$$

en dus:

$$\operatorname{tg} \phi = \varrho \frac{\delta \theta}{\delta \varrho} = \pm \cos p \, \theta$$

zoodat voor $\theta = 0$ $\quad \operatorname{tg} \phi = \pm 1$, dus $\phi = \pm \frac{\pi}{4}$

De beide takken der krachtlijn snijden bijgevolg den voerstraal van het dubbelpunt onder een hoek van $\pm 45^0$, dus elkaar onder een hoek van 90^0. Aangezien de krachtlijnen tusschen $\theta = -\frac{\pi}{2p}$ en $\theta = 0$ buitenwaarts, tusschen $\theta = 0$ en $\theta = \frac{\pi}{2p}$ binnenwaarts gericht zijn, keert in het dubbelpunt in beide takken de richting der krachtlijn om. De waarde der inductie B in het dubbelpunt is dus $= 0$, wat trouwens reeds hieruit volgt, dat in het dubbelpunt de afgeleiden der functie A, zoowel naar ϱ als naar θ, $= 0$ moeten zijn.

3^0. $\qquad A = b > 2\sqrt{PQ}$

In dit geval levert iedere waarde van θ twee positieve waarden van ϱ op.

Voor $\theta = 0$ is de vorm achter het wortelteeken zoo klein mogelijk, en dus de waarde van ϱ, overeenkomende met het $+$ teeken, een minimum, bepaald door:

$$\varrho^p = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4PQ}}{2P} > \varrho_0^p$$

die met het — teeken, een maximum, bepaald door:

$$\varrho^p = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4PQ}}{2P} < \varrho_0^p$$

Bij verandering van θ van 0 tot $\pm \frac{\pi}{2p}$ neemt de eerste waarde van ϱ onbepaald toe, terwijl de tweede op 0 afneemt.

Iedere krachtlijn van deze soort bestaat dus uit twee takken, uit- en inwendig gelegen ten opzichte van den cirkel $\varrho = \varrho_0$, waarvan de eerste in vorm eene overeenkomst vertoont met de krachtlijnen van een veld der eerste soort, de tweede met die van een veld der tweede soort.

Een veld, dat zoowel een componente der eerste soort als een componente der tweede soort bezit, zal zich noch tot in het oneindige, noch tot in het centrum kunnen uitstrekken, en zal dus zoowel in- als uitwendig door discontinuiteitsvlakken moeten begrensd zijn.

Nemen we als zoodanig aan de cylinder-oppervlakken:

$$\varrho = \varrho_1 \text{ en } \varrho = \varrho_2$$

Voor het geval voldaan is aan de ongelijkheden:

$$\varrho_1 > \varrho_0 > \varrho_2$$

zullen binnen het beschouwde gebied optreden:

1°. Krachtlijnen, welke punten van beide discontinuiteitsvlakken met elkaar verbinden.

De krachtstroomen, welke uit deze krachtlijnen zijn saamgesteld, worden eenerzijds begrensd door een der krachtlijnen:

$$A = 2\sqrt{PQ}$$

anderzijds door een der krachtlijnen:

$$A = -2\sqrt{PQ}$$

De waarde der krachtstroomen, overgaande van het eene discontinuiteitsvlak naar het andere, bedraagt bijgevolg:

$$N_0 = 4\,l\sqrt{PQ}$$

2°. Krachtlijnen, welke twee punten van eenzelfde discontinuiteitsvlak met elkaar verbinden.

Zij zijn alle gelegen tusschen de beide takken van een der krachtlijnen:

$$A = \pm 2\sqrt{PQ}$$

hetzij aan de buitenzijde, hetzij aan de binnenzijde van hun snijpunt.

Denken we ons de beide discontinuiteitsvlakken als de begrenzingen van het entrefer eener electrische machine, zoo dringt zich de overeenstemming op van de sub 1 bedoelde krachtstroomen met de voorstelling, die men zich gewoonlijk maakt van het zoogenaamde restveld der machine, en evenzoo van de sub 2 bedoelde krachtstroomen met die der zoogenaamde lekvelden.

We zullen echter nader aantoonen dat deze overeenstemming in het algemeen *niet bestaat!*

Beschouwen we ten slotte het symmetrische veld, ontstaande door samenstelling van twee *tegengestelde* enkelvoudige velden van verschillende soort.

Uit de voor dit geval geldende uitdrukking:

$$A = (P\varrho^{p} - Q\varrho^{-p}) \cos p\,\theta$$

volgt, dat voor:

$$\varrho = \varrho_0$$

$A = 0$ wordt, en dat bijgevolg het volledige krachtlijnen-complex $A = 0$ thans niet meer uitsluitend bestaat uit de $2p$ hartlijnen van het veld, doch bovendien den cirkel $\varrho = \varrho_0$ omvat.

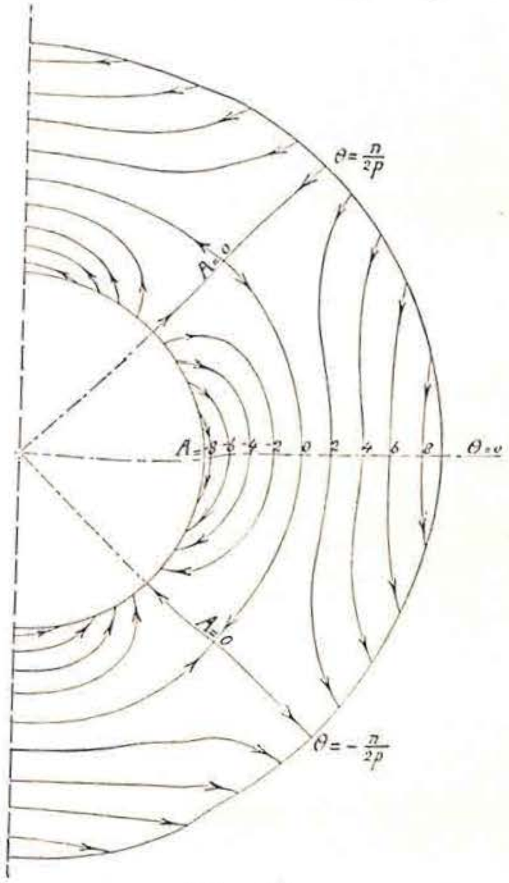


Fig. 10.

Binnen het te onderzoeken gebied, begrensd door de hartlijnen:

$$\theta = \pm \frac{\pi}{2p}$$

is A positief aan de buitenzijde, negatief aan de binnenzijde van den cirkel $\varrho = \varrho_0$.

De hartlijn $\theta = -\frac{\pi}{2p}$ behoort bij een binnenwaarts gerichten krachtstroom aan de binnenzijde van den cirkel $\varrho = \varrho_0$, en tegelijkertijd bij een buitenwaarts gerichten krachtstroom aan de buitenzijde van dezen cirkel. De hartlijn $\theta = \frac{\pi}{2p}$ daarentegen behoort bij een buitenwaarts gerichten krachtstroom aan de binnenzijde, en een binnenwaarts gerichten krachtstroom aan de buitenzijde van den cirkel $\varrho = \varrho_0$.

Aan de buitenzijde van den cirkel $\varrho = \varrho_0$ treden krachtlijnen op, die eene overeenkomst in vorm vertoonen met die van een veld der eerste soort, aan de binnenzijde krachtlijnen, in vorm overeenkomend met die van een veld der tweede soort, zooals blijkt uit het krachtlijnen-tracé van fig. 10.

Kiezen we voor de discontinuiteitsvlakken, welke het veld in- en uitwendig begrenzen, weer twee cylinder-oppervlakken:

$$\varrho = \varrho_1 \text{ en } \varrho = \varrho_2$$

waarbij:

$$\varrho_1 > \varrho_0 > \varrho_2$$

zoo treden geen krachtlijnen op, welke deze vlakken met elkaar verbinden.

Asymmetrische velden. — Zooals we gezien hebben, levert de samenstelling van twee enkelvoudige velden van verschillende soort een asymmetrisch veld op, indien het „magnetisch" standsverschil γ der componenten gelegen is tusschen 0 en 180°.

Conditie voor de asymmetrie van het veld is dus:

$$P\,Q \sin\gamma \lessgtr 0$$

Blijkens de in de hoofdstukken III en IV afgeleide uitdrukkingen voor de energie-overbrenging door het entrefer, en voor het koppel eener electrische machine, zijn deze beide grootheden met bovenstaande uitdrukking evenredig; m. a. w.:

het magnetisch veld van eene electrische machine, waarbij energie-overbrenging door het entrefer plaats heeft, of waarbij een koppel op den rotor wordt uitgeoefend, is noodzakelijk asymmetrisch.

Het asymmetrische veld speelt dus in de theorie der electrische machines een veel gewichtiger rol dan de in het voorgaande beschouwde symmetrische velden.

Bij invoering van het magnetisch standsverschil γ der componenten, is het steeds mogelijk het coördinaten-systeem zoodanig te kiezen, dat de uitdrukking voor A den vorm aanneemt:

$$A = P\,\varrho^{p} \cos\left(p\,\theta - \frac{\gamma}{2}\right) + Q\,\varrho^{-p} \cos\left(p\,\theta + \frac{\gamma}{2}\right)$$

waarbij de lijn $\theta = 0$ den hoek $\frac{\gamma}{p}$ tusschen de hartlijnen van twee krachtstroomen der samenstellende velden middendoor deelt.

De hartlijnen van de componente der eerste soort zijn dan:

$$\theta = \frac{\pi + \gamma}{2p}, \frac{3\pi + \gamma}{2p} \text{ enz. } \frac{(4p-1)\pi + \gamma}{2p}$$

die van de componente der tweede soort:

$$\theta = \frac{\pi - \gamma}{2p}, \frac{3\pi - \gamma}{2p} \text{ enz. } \frac{(4p-1)\pi - \gamma}{2p}$$

Merken we weer op, dat bij onbepaald toenemende ϱ de invloed van de componente der tweede soort, bij onbepaald afnemende ϱ de invloed van de componente der eerste soort verdwijnt, zoo volgt hieruit dat in het centrum de krachtlijnen raken aan de lijnen:

$$\theta = \frac{\pi - \gamma}{2p}, \frac{3\pi - \gamma}{2p} \text{ enz.}$$

terwijl zij asymptotisch verloopen aan de lijnen:

$$\theta = \frac{\pi + \gamma}{2p}, \frac{3\pi + \gamma}{2p} \text{ enz.}$$

Onderzoeken we in de eerste plaats het verloop der krachtlijnen $A = 0$. Uit de vergelijking dezer krachtlijnen:

$$P \varrho^p \cos(p\theta - \frac{\gamma}{2}) + Q \varrho^{-p} \cos(p\theta + \frac{\gamma}{2}) = 0$$

volgt:

$$\varrho^{2p} = -\frac{Q}{P} \frac{\cos(p\theta + \frac{\gamma}{2})}{\cos(p\theta - \frac{\gamma}{2})}$$

zoodat we één positieve waarde van ϱ vinden, mits $\cos(p\theta + \frac{\gamma}{2})$ en $\cos(p\theta - \frac{\gamma}{2})$ verschillende teekens bezitten.

Tusschen:

$$\theta = \frac{-\pi + \gamma}{2p} \text{ en } \theta = \frac{\pi - \gamma}{2p}$$

en eveneens tusschen:

$$\theta = \frac{\pi + \gamma}{2p} \text{ en } \theta = \frac{3\pi - \gamma}{2p}$$

hebben $\cos(p\theta + \frac{\gamma}{2})$ en $\cos(p\theta - \frac{\gamma}{2})$ hetzelfde teeken, dat in het eerste geval positief, in het tweede geval negatief is, en vinden we dus géén bestaanbare waarde van ϱ.

Tusschen:

$$\theta = \frac{\pi - \gamma}{2p} \text{ en } \theta = \frac{\pi + \gamma}{2p}$$

is $\cos\left(p\,\theta + \frac{\gamma}{2}\right)$ negatief, $\cos\left(p\,\theta - \frac{\gamma}{2}\right)$ positief, en vinden we dus één positieve waarde van ϱ.

Eén der krachtlijnen $A = 0$ verloopt dus geheel tusschen de hartlijnen:

$$\theta = \frac{\pi \pm \gamma}{2p}$$

van de beide samenstellende velden.

Evenzoo vinden we krachtlijnen $A = 0$ van gelijken vorm tusschen de hartlijnen der samenstellende velden:

$$\theta = \frac{3\pi \pm \gamma}{2p}$$

enz.

$$\theta = \frac{(4p - 1)\pi \pm \gamma}{2p}$$

Voor:

$$\theta = \frac{\pi}{2p}, \frac{3\pi}{2p} \quad \text{enz.} \quad \frac{(4p - 1)\pi}{2p}$$

wordt:

$$\varrho = \varrho_0.$$

We zullen nu het veld onderzoeken tusschen de beide opvolgende krachtlijnen $A = 0$, welke den cirkel $\varrho = \varrho_0$ snijden in $\theta = \pm \frac{\pi}{2p}$. In het beschouwde gebied is dan A overal positief.

Lossen we uit de vergelijking der krachtlijnen:

$$A = a$$

ϱ op als functie van θ, zoo vinden we:

$$\varrho^p = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4\,PQ\left(\cos^2 p\,\theta - \sin^2 \frac{\gamma}{2}\right)}}{2\,P \cos\left(p\,\theta - \frac{\gamma}{2}\right)}$$

welke uitdrukking twee positieve waarden voor ϱ oplevert, indien:

$$4\,PQ\,(\cos^2 p\,\theta - \sin^2 \frac{\gamma}{2}) < a^2$$

is, welke waarden aan elkaar gelijk worden voor:

$$4\,PQ\,(\cos^2 p\,\theta - \sin^2 \frac{\gamma}{2}) = a^2$$

terwijl voor:

$$4\,PQ\,(\cos^2 p\,\theta - \sin^2 \frac{\gamma}{2}) > a^2$$

geen bestaanbare waarden van ϱ optreden.

Wat aangaat het verloop der krachtlijnen, hebben we dus weer de drie volgende gevallen te onderscheiden:

1°. $$A = a < 2\sqrt{PQ}\cos\frac{\gamma}{2}$$

Voor waarden van θ, waarbij:

$$\cos^2 p\,\theta < \frac{a^2}{4\,PQ} + \sin^2\frac{\gamma}{2}$$

worden twee positieve waarden van ϱ verkregen, welke aan elkaar gelijk worden voor:

$$\cos^2 p\,\theta = \frac{a^2}{4\,PQ} + \sin^2\frac{\gamma}{2}$$

Krachtlijnen van deze soort bestaan dus uit twee takken, welke zich uitstrekken van het centrum tot in het oneindige. In het centrum raken zij aan de hartlijnen van het veld der tweede soort:

$$\theta = \frac{\pm\pi - \gamma}{2p}$$

terwijl zij asymptotisch verloopen aan de hartlijnen van het veld der eerste soort:

$$\theta = \frac{\pm\pi + \gamma}{2p}$$

Bepalen we de snijpunten der beide takken met den cirkel $\varrho = \varrho_0$. Uit:

$$\frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4\,PQ\,(\cos^2 p\,\theta - \sin^2\frac{\gamma}{2})}}{2\,P\cos(p\,\theta - \frac{\gamma}{2})} = \sqrt{\frac{Q}{P}}$$

volgt na eenige herleiding:

$$\cos p\,\theta = \frac{a}{2\sqrt{PQ}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

De snijpunten der beide takken met den cirkel $\varrho = \varrho_0$ liggen dus ter weerszijden en op gelijken afstand van $\theta = 0$. Tevens blijkt dat de krachtlijnen, waarvoor:

$$a > 2\sqrt{PQ}\cos\frac{\gamma}{2}$$

den cirkel $\varrho = \varrho_0$ *niet* snijden.

Bepalen we den hoek ϑ, waaronder de voerstralen de krachtlijnen snijden:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \varrho\frac{\delta\theta}{\delta\varrho} = -\frac{\varrho\frac{\delta A}{\delta\varrho}}{\frac{\delta A}{\delta\theta}}$$

Uit:

$$\varrho\frac{\delta A}{\delta\varrho} = p\,P\,\varrho^{p}\cos\left(p\,\theta - \frac{\gamma}{2}\right) - p\,Q\,\varrho^{-p}\cos\left(p\,\theta + \frac{\gamma}{2}\right)$$

en

$$-\frac{\delta A}{\delta\theta} = p\,P\,\varrho^{p}\sin\left(p\,\theta - \frac{\gamma}{2}\right) + p\,Q\,\varrho^{-p}\sin\left(p\,\theta + \frac{\gamma}{2}\right)$$

volgt:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{P\,\varrho^{p}\cos\left(p\,\theta - \frac{\gamma}{2}\right) - Q\,\varrho^{-p}\cos\left(p\,\theta + \frac{\gamma}{2}\right)}{P\,\varrho^{p}\sin\left(p\,\theta - \frac{\gamma}{2}\right) + Q\,\varrho^{-p}\sin\left(p\,\theta + \frac{\gamma}{2}\right)}$$

Voor $\varrho = \varrho_0$ wordt:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\cos\left(p\,\theta - \frac{\gamma}{2}\right) - \cos\left(p\,\theta + \frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\left(p\,\theta - \frac{\gamma}{2}\right) + \sin\left(p\,\theta + \frac{\gamma}{2}\right)} = tg\,\frac{\gamma}{2}$$

of:

$$\vartheta = \frac{\gamma}{2}$$

De krachtlijnen snijden dus den cirkel $\varrho = \varrho_0$ *onder gelijke hoeken, en wel is de hoek, dien de krachtlijnen met den voerstraal insluiten,* *gelijk aan de helft van het magnetisch standsverschil der samenstellende velden.*

Om den zin der krachtlijnen te bepalen, merken we op dat voor $\varrho = \varrho_0$

$$\frac{\delta A}{\delta \theta} = -2p\sqrt{PQ}\sin p\theta \cos\frac{\gamma}{2}$$

wordt; m.a.w.: B_ϱ is op den cirkel $\varrho = \varrho_0$ in teeken tegengesteld aan $\sin p\theta$. Krachtlijnen, die dezen cirkel snijden tusschen $\theta = -\frac{\pi}{2p}$ en $\theta = 0$ zijn dus *buitenwaarts,* die welke den cirkel snijden tusschen $\theta = 0$ en $\theta = \frac{\pi}{2p}$ *binnenwaarts* gericht.

2°. $$A = 2\sqrt{PQ}\cos\frac{\gamma}{2}$$

Voor dit grensgeval gaat de vergelijking der krachtlijn over in:

$$\varrho^p = \sqrt{\frac{Q}{P}} \cdot \frac{\cos\frac{\gamma}{2} \pm \sin p\theta}{\cos(p\theta - \frac{\gamma}{2})}$$

Zij bestaat dus uit twee takken, waarvan de eerste, overeenkomende met het + teeken in bovenstaande uitdrukking, in het centrum de lijn $\theta = -\frac{\pi+\gamma}{2p}$ raakt, en asymptotisch verloopt aan de lijn $\theta = \frac{\pi+\gamma}{2p}$, terwijl de tweede tak, overeenkomende met het — teeken, in het centrum de lijn $\theta = \frac{\pi-\gamma}{2p}$ raakt, en asymptotisch verloopt aan de lijn $\theta = -\frac{\pi-\gamma}{2p}$. Beide takken snijden elkaar in het *dubbelpunt* der krachtlijn:

$$\theta = 0 \qquad \varrho = \varrho_0$$

Om aan te toonen dat dit punt werkelijk een dubbelpunt is merken we op, dat voor $\theta = 0$, $\varrho = \varrho_0$ de uitdrukking:

$$\operatorname{tg} 0 = \frac{P\varrho^p\cos(p\theta - \frac{\gamma}{2}) - Q\varrho^{-p}\cos(p\theta + \frac{\gamma}{2})}{P\varrho^p\sin(p\theta - \frac{\gamma}{2}) + Q\varrho^{-p}\sin(p\theta + \frac{\gamma}{2})}$$

den vorm $\frac{0}{0}$ aanneemt, zoodat we, teller en noemer naar ϱ differentieerende vinden:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{P\varrho^{p}\cos\left(p\theta-\frac{\gamma}{2}\right)+Q\varrho^{-p}\cos\left(p\theta+\frac{\gamma}{2}\right)-\operatorname{tg}\vartheta\left\{P\varrho^{p}\sin\left(p\theta-\frac{\gamma}{2}\right)-Q\varrho^{-p}\sin\left(p\theta+\frac{\gamma}{2}\right)\right\}}{P\varrho^{p}\sin\left(p\theta-\frac{\gamma}{2}\right)-Q\varrho^{-p}\sin\left(p\theta+\frac{\gamma}{2}\right)+\operatorname{tg}\vartheta\left\{P\varrho^{p}\cos\left(p\theta-\frac{\gamma}{2}\right)+Q\varrho^{-p}\cos\left(p\theta+\frac{\gamma}{2}\right)\right\}}$$

of, na invoering van $\theta = 0$, $\varrho = \varrho_0$

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\cos\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\vartheta\sin\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\vartheta\cos\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\gamma}{2}}$$

Dit geeft ons dus voor de bepaling van $\operatorname{tg}\vartheta$ de vierkantsvergelijking:

$$\operatorname{tg}^2\vartheta - 2\operatorname{tg}\vartheta\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} - 1 = 0$$

waaruit volgt:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \pm \sec\frac{\gamma}{2}$$

Duiden we de beide waarden van ϑ, dus de hoeken, die beide takken der krachtlijn met den voerstraal van het dubbelpunt insluiten, aan door ϑ_1 en ϑ_2, zoo is de hoek, waaronder zij elkaar snijden, bepaald door:

$$\operatorname{tg}(\vartheta_1-\vartheta_2) = \frac{2\sec\frac{\gamma}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}-\sec^2\frac{\gamma}{2}} = \infty$$

De beide takken snijden elkaar dus rechthoekig.

3^0. $$A = b > 2\sqrt{PQ}\cos\frac{\gamma}{2}$$

In dit geval levert iedere waarde van θ twee positieve waarden van ϱ op. Iedere krachtlijn van deze soort bestaat uit 2 takken, welke gelegen zijn tusschen de beide takken der krachtlijn $A = 2\sqrt{PQ}\cos\frac{\gamma}{2}$, en wel aan de binnenzijde resp. aan de buitenzijde van hun snijpunt.

Nemen we weer (fig. 11) als in- en uitwendige begrenzingen van het veld aan de cylinder-oppervlakken:

$$\varrho = \varrho_1 \text{ en } \varrho = \varrho_2$$

$$\varrho_1 > \varrho_0 > \varrho_2$$

zoo blijkt weer een gelijksoortige verdeeling te bestaan als in het geval van gelijkstandige enkelvoudige componenten.

Tusschen twee opvolgende krachtlijnen:

$$A = \pm 2 \sqrt{PQ} \cos \frac{\gamma}{2}$$

zijn de krachtlijnen gelegen, welke de beide begrenzingen van

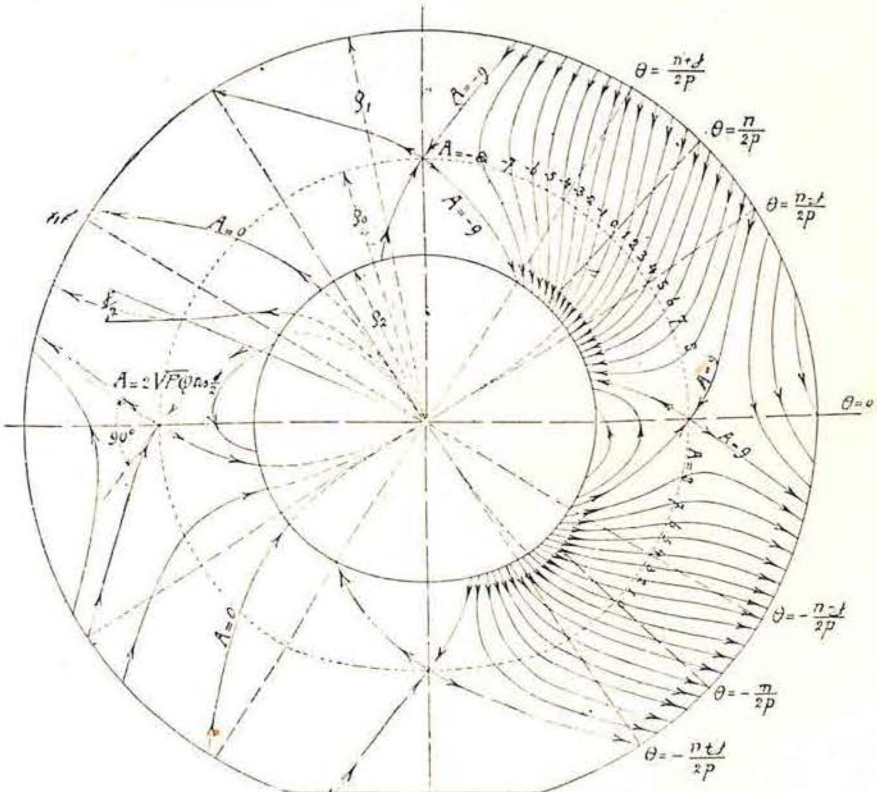


Fig. 11.

het veld met elkaar verbinden. Zij vormen de krachtstroomen, overgaande van de eene begrenzing naar de andere, wier waarde bedraagt:

$$N_0 = 4\, l \sqrt{PQ} \cos \frac{\gamma}{2}$$

Daarentegen liggen tusschen de beide takken eener zelfde krachtlijn:

$$A = \pm\, 2 \sqrt{PQ} \cos \frac{\gamma}{2}$$

aan weerszijden van hun snijpunt de krachtlijnen, welke punten van eenzelfde begrenzingsvlak verbinden.

Omtrent de overeenstemming dezer krachtstroomen met het restveld en de beide lekvelden eener electrische machine geldt natuurlijk hier eveneens de reeds in het voorgaande gemaakte opmerking.

HOOFDSTUK VI.

Bepaling der constanten van een sinusoidaal magnetisch veld.

Wij nemen als discontinuiteitsvlakken aan een aantal co-axiale cylinder-oppervlakken:

$$\varrho = r.$$

De magnetische permeabiliteit μ zal binnen de ringvormige ruimte, begrensd door twee opvolgende discontinuiteitsvlakken constant zijn, doch in 't algemeen ter weerszijden van een discontinuiteitsvlak verschillende waarden bezitten.

In de discontinuiteitsvlakken denken we ons volgens de beschrijvende lijnen de oppervlaksstroomen:

$$C = C_0 \cos p\,(\theta + \psi)$$

en wel nemen we aan dat voor de verschillende stroomvlakken p overal dezelfde waarde heeft, dat echter C_0 en ψ verschillende waarden bezitten.

Binnen ieder der ringvormige zonen zal het magnetisch veld bepaald zijn door een functie A van den vorm:

$$A = P\,\varrho^{p} \cos p\,(\theta + \alpha) + Q\,\varrho^{-p} \cos p\,(\theta + \beta)$$

waarin de constanten P, Q, α en β binnen de verschillende zonen in 't algemeen andere waarden zullen bezitten.

De bepaling van het magnetisch veld, ontstaande onder den invloed der gegeven oppervlaksstroomingen, komt dus neer op de bepaling der constanten P, Q, α en β voor de verschillende zonen.

Zij aan de binnenzijde van een discontinuiteitsvlak:

$$\varrho = r$$

de magnetische permeabiliteit μ, aan de buitenzijde μ', zoo bestaan tusschen de grootheden A en A' ter weerszijden van dit vlak:

$$A = P\,\varrho^{p} \cos p\,(\theta + \alpha) + Q\,\varrho^{-p} \cos p\,(\theta + \beta)$$

$$A' = P'\,\varrho^{p} \cos p\,(\theta + \alpha') + Q'\,\varrho^{-p} \cos p\,(\theta + \beta')$$

de betrekkingen:

$$A = A'$$

en

$$\frac{1}{\mu}\frac{\delta A}{\delta \varrho} - \frac{1}{\mu'}\frac{\delta A'}{\delta \varrho} = 4\,\pi\, C_0 \cos p\,(\,\vartheta + \psi\,)$$

Voeren we in deze betrekkingen bovenstaande uitdrukkingen voor A en A' in, benevens de uitdrukking voor de magnetomotorische kracht per pool:

$$M = \frac{8\,\pi\, C_0\, r}{p}$$

en stellen we ter bekorting:

$$\begin{array}{lll} M_x = M \sin p\,\psi & P_x = P \sin p\,\alpha & Q_x = Q \sin p\,\beta \\ M_y = M \cos p\,\psi & P \;= P \cos p\,\alpha & Q_y = Q \cos p\,\beta \end{array}$$

zoo verkrijgen we de volgende 4 vergelijkingen, waarin de 2×4 constanten van het veld voor de zonen ter weerszijden van het discontinuiteitsvlak als onbekenden optreden:

$$P_x\, r^{p} + Q_x\, r^{-p} = P'_x\, r^{p} + Q'_x\, r^{-p}$$

$$\frac{1}{\mu}\,(\,P_x\, r^{p} - Q_x\, r^{-p}\,) = \frac{1}{\mu'}\,(\,P'_x\, r^{p} - Q'_x\, r^{-p}\,) + \frac{M_x}{2}$$

$$P_y\, r^{p} + Q_y\, r^{-p} = P'_y\, r^{p} + Q'_y\, r^{-p}$$

$$\frac{1}{\mu}\,(\,P_y\, r^{p} - Q_y\, r^{-p}\,) = \frac{1}{\mu'}\,(\,P'_y\, r^{p} - Q'_y\, r^{-p}\,) + \frac{M_y}{2}$$

Nemen we in aanmerking, dat voor de binnenste zone de constante Q, voor de buitenste zone de constante $P = o$ is, zoo blijkt dat we in het geval van n discontinuiteitsvlakken $4\,n$ constanten te bepalen hebben. Daar ieder discontinuiteitsvlak 4 vergelijkingen oplevert, komt het vraagstuk neer op de oplossing van een systeem van $4\,n$ lineaire vergelijkingen met $4\,n$ onbekenden.

Nog op te merken valt, dat het systeem zich onmiddellijk splitst in een systeem van $2\,n$ vergelijkingen, waarin slechts de onbekenden P_x en Q_x, en een tweede systeem van $2\,n$ vergelijkingen, waarin slechts de onbekenden P_y en Q_y optreden.

Nemen wij hierbij nog in aanmerking, dat blijkbaar P_x en Q_x op dezelfde wijze afhangen van M_x als P_y en Q_y van M_y, zoo is hiermee het vraagstuk teruggebracht tot de oplossing van een systeem van $2\,n$ lineaire vergelijkingen met $2\,n$ onbekenden.

Wij zullen thans vooreerst de verkregen uitkomsten toepassen op een bepaald geval, dat bij benadering overeenkomt met dat van een meerphasigen inductiemotor.

We denken ons stator en rotor in- en uitwendig begrensd door cylinder-oppervlakken, waarvan de vergelijkingen zijn:

voor de buitenbegrenzing van den stator		$\varrho = \mathrm{r}_1$
„ „ binnenbegrenzing „ „ „		$\varrho = r_1$
„ „ buitenbegrenzing „ „	rotor	$\varrho = r_2$
„ „ binnenbegrenzing „ „ „		$\varrho = \mathrm{r}_2$

We nemen aan, dat de magnetische permeabiliteit bedraagt:

aan de buitenzijde van den stator	μ_0'
binnen den stator	μ_1
in het entrefer	μ_0
binnen den rotor	μ_2
aan de binnenzijde van den rotor *)	μ_0'

In de binnenbegrenzing van den stator denken we ons eene $2p$-polige sinusoidale electrische strooming, waarvoor de componenten der magnetomotorische kracht M_{1x} en M_{1y} bedragen; in de buitenbegrenzing van den rotor eene $2p$-polige electrische strooming met de componenten der magnetomotorische kracht M_{2x} en M_{2y}.

Duiden we thans de te bepalen constanten voor de verschillende zonen als volgt aan:

aan de buitenzijde van den stator		Q_{0x}		Q_{0y}
binnen den stator	P_{1x}	Q_{1x}	P_{1y}	Q_{1y}
in het entrefer	P_x	Q_x	P_y	Q_y
binnen den rotor	P_{2x}	Q_{2x}	P_{2y}	Q_{2y}
aan de binnenzijde van den rotor	P_{0x}		P_{0y}	

zoo verkrijgen we voor de verschillende grensvlakken de volgende vergelijkingen ter bepaling van de grootheden P_x en Q_x, terwijl, nadat deze bepaald zijn, de verandering van M_x in M_y ons onmiddelijk de uitdrukkingen voor de overeenkomstige grootheden P_y en Q_y oplevert.

*) De onderscheiding der permeabiliteiten μ_0 en μ_0', welke inderdaad aan elkaar gelijk zijn, zal vanzelf verklaard worden in den loop der berekening.

Buiten- begrenzing stator $\varrho = \mathrm{r}_1$

$$\left\{\begin{aligned} & P_{1x}\,\mathrm{r}_1^{\,p} + Q_{1x}\,\mathrm{r}_1^{\,-p} = Q_{0x}\,\mathrm{r}_1^{\,-p} \\ & \frac{1}{\mu_1}\left(P_{1x}\,\mathrm{r}_1^{\,p} - Q_{1x}\,\mathrm{r}_1^{\,-p} \right) = -\frac{1}{\mu'_0}\,Q_{0x}\,\mathrm{r}_1^{\,-p} \end{aligned}\right.$$

Begrenzing stator- entrefer $\varrho = r_1$

$$\left\{\begin{aligned} & P_{1x}\,r_1^{\,p} + Q_{1x}\,r_1^{\,-p} = P_x\,r_1^{\,p} + Q_x\,r_1^{\,-p} \\ & \frac{1}{\mu_1}\left(P_{1x}\,r_1^{\,p} - Q_{1x}\,r_1^{\,-p} \right) = \frac{1}{\mu_0}\left(P_x\,r_1^{\,p} - Q_x\,r_1^{\,-p} \right) - \frac{M_{1x}}{2} \end{aligned}\right.$$

Begrenzing rotor- entrefer $\varrho = r_2$

$$\left\{\begin{aligned} & P_{2x}\,r_2^{\,p} + Q_{2x}\,r_2^{\,-p} = P_x\,r_2^{\,p} + Q_x\,r_2^{\,-p} \\ & \frac{1}{\mu_2}\left(P_{2x}\,r_2^{\,p} - Q_{2x}\,r_2^{\,-p} \right) = \frac{1}{\mu_0}\left(P_x\,r_2^{\,p} - Q_x\,r_2^{\,-p} \right) + \frac{M_{2x}}{2} \end{aligned}\right.$$

Binnen- begrenzing rotor $\varrho = \mathrm{r}_2$

$$\left\{\begin{aligned} & P_{2x}\,\mathrm{r}_2^{\,p} + Q_{2x}\,\mathrm{r}_2^{\,-p} = P_{0x}\,\mathrm{r}_2^{\,p} \\ & \frac{1}{\mu_2}\left(P_{2x}\,\mathrm{r}_2^{\,p} - Q_{2x}\,\mathrm{r}_2^{\,-p} \right) = \frac{1}{\mu'_0}\,P_{0x}\,\mathrm{r}_2^{\,p} \end{aligned}\right.$$

De oplossing van bovenstaand systeem vergelijkingen zal ons steeds voor P_{0x} en Q_{0x} waarden opleveren, welke van 0 verschillen, tenzij de beide magnetomotorische krachten M_{1x} en M_{2x} zelf $= 0$ zijn, in welk geval *alle* grootheden P en Q verdwijnen. Met andere woorden, het magnetisch veld eener electrische machine strekt zich uit van af het centrum tot in het oneindige.

Blijkbaar nu is dit resultaat in strijd met de aanname, waarvan in de theorie der electrische machines steeds wordt uitgegaan: *dat het magnetisch veld geheel beperkt blijft tusschen de buitenbegrenzing van den stator en de binnenbegrenzing van den rotor.*

Slechts door $\mu'_0 = 0$ aan te nemen, is het *mogelijk* de oplossing der vergelijkingen in dit opzicht in overeenstemming te brengen met de gangbare theorie, en deze theorie berust dus blijkbaar op de aanname, dat bij de bepaling van het magnetisch veld eener electrische machine de omgeving der machine mag beschouwd worden als magnetisch impermeabel, althans dat de invoering dezer beschouwing leidt tot een resultaat, dat met een voor de practijk voldoende mate van nauwkeurigheid het werkelijk optredende veld beschrijft. *)

Door de invoering van $\mu'_0 = 0$ wordt het systeem vergelijkingen als volgt vereenvoudigd.

De beide eerste vergelijkingen gaan over in:

$$P_{1x}\mathrm{r}_1{}^{p} + Q_{1x}\mathrm{r}_1{}^{-p} = 0$$

de beide laatste in:

$$P_{2x}\mathrm{r}_2{}^{p} + Q_{2x}\mathrm{r}_2{}^{-p} = 0$$

Uit de vergelijkingen voor het grensvlak $\varrho = r_1$ volgt:

$$P_{1x} = \frac{\mu_1 + \mu_0}{2\mu_0} P_x - \frac{\mu_1 - \mu_0}{2\mu_0} Q_x\, r_1{}^{-2p} - \frac{\mu_1}{4} M_{1x}\, r_1{}^{-p}$$

en

$$Q_{1x} = -\frac{\mu_1 - \mu_0}{2\mu_0} P_x\, r_1{}^{2p} + \frac{\mu_1 + \mu_0}{2\mu_0} Q_x + \frac{\mu_1}{4} M_{1x}\, r_1{}^{p}$$

Substitueert men deze uitdrukkingen voor P_{1x} en Q_{1x} in de vergelijking voor het grensvlak $\varrho = \mathrm{r}_1$, zoo verkrijgt men de volgende vergelijking tusschen P_x en Q_x:

$$\left(\frac{\mu_1 + \mu_0}{2\mu_0}\mathrm{r}_1{}^{2p} - \frac{\mu_1 - \mu_0}{2\mu_0} r_1{}^{2p}\right)P_x + \left(\frac{\mu_1 + \mu_0}{2\mu_0} - \frac{\mu_1 - \mu_0}{2\mu_0}\mathrm{r}_1{}^{2p}\, r_1{}^{-2p}\right)Q_x =$$

$$\frac{\mu_1}{4} M_{1x}\left(\mathrm{r}_1{}^{2p}\, r_1{}^{-p} - r_1{}^{p}\right)$$

Op dezelfde wijze leiden we uit de vergelijkingen voor de grensvlakken $\varrho = r_2$ en $\varrho = \mathrm{r}_2$ een tweede vergelijking af tusschen P_x en Q_x:

$$\left(\frac{\mu_2 + \mu_0}{2\mu_0}\mathrm{r}_2{}^{2p} - \frac{\mu_2 - \mu_0}{2\mu_0} r_2{}^{2p}\right)P_x + \left(\frac{\mu_2 + \mu_0}{2\mu_0} - \frac{\mu_2 - \mu_0}{2\mu_0}\mathrm{r}_2{}^{2p}\, r_2{}^{-2p}\right)Q_x =$$

$$\frac{\mu_2}{4} M_{2x}\left(r_2{}^{p} - \mathrm{r}_2{}^{2p}\, r_2{}^{-p}\right)$$

---

*) De beantwoording der vraag of de invoering van $\mu'_0 = 0$ *practisch* geoorloofd is hangt niet uitsluitend af van de, *inderdaad zéér kleine*, waarde der verhouding van de permeabiliteiten van lucht en van ijzer. Zij hangt bovendien samen met de vraag of we te doen hebben met eene goed gedimensionneerde machine; is dit nl. het geval, zoo is inderdaad de waarde van het veld buiten de machine verwaarloosbaar klein (zie in verband hiermede de noot op pag. 98). Een verkleining der permeabiliteit in de omgeving der machine kan bijgevolg geen merkbaren invloed hebben op het binnen de machine zelf optredende veld. Dit veld zou dus eveneens niet gewijzigd worden indien men, gesteld dat dit mogelijk was, de machine opstelde in eene impermeabele omgeving.

Na invoering der constanten:

$$\delta_1 = \frac{\mu_0}{\mu_1} \frac{\mathrm{r}_1^{2p} + r_1^{2p}}{\mathrm{r}_1^{2p} - r_1^{2p}} \quad \text{en} \quad \delta_2 = \frac{\mu_0}{\mu_2} \frac{r_2^{2p} + \mathrm{r}_2^{2p}}{r_2^{2p} - \mathrm{r}_2^{2p}}$$

kunnen de beide vergelijkingen als volgt geschreven worden:

$$r_1^p (1 + \delta_1) P_x - r_1^{-p} (1 - \delta_1) Q_x = \frac{\mu_0}{2} M_{1x}$$

en

$$-r_2^p (1 - \delta_2) P_x + r_2^{-p} (1 + \delta_2) Q_x = \frac{\mu_0}{2} M_{2x}$$

waaruit volgt:

$$P_x = \frac{\mu_0}{2} \frac{M_{1x} r_1^p (1 + \delta_2) + M_{2x} r_2^p (1 - \delta_1)}{r_1^{2p} (1 + \delta_1)(1 + \delta_2) - r_2^{2p} (1 - \delta_1)(1 - \delta_2)}$$

$$Q_x = \frac{\mu_0}{2} \frac{M_{1x} r_1^p r_2^{2p} (1 - \delta_2) + M_{2x} r_1^{2p} r_2^p (1 + \delta_1)}{r_1^{2p} (1 + \delta_1)(1 + \delta_2) - r_2^{2p} (1 - \delta_1)(1 - \delta_2)}$$

De uitdrukkingen voor P_y en Q_y vinden we door in bovenstaande uitdrukkingen M_{1x} door M_{1y} en M_{2x} door M_{2y} te vervangen.

Voor de componente N_x van den krachtstroom per pool door een willekeurig cylinder-oppervlak binnen het entrefer:

$$\varrho = constant$$

ontstaande onder den invloed van de componente M_x der magnetomotorische kracht:

$$N_x = 2\, l \left(P_x \varrho^p + Q_x \varrho^{-p} \right)$$

vinden we na eenige herleiding:

$$N_x = \frac{2 \mu_0 r_1^p r_2^p l}{r_1^{2p} (1 + \delta_1)(1 + \delta_2) - r_2^{2p} (1 - \delta_1)(1 - \delta_2)} (M_{1x} + M_{2x})$$

$$+ \frac{r_1^p}{\varrho^p} \frac{\mu_0 \left\{ (\varrho^p - r_2^p)^2 + \delta_2 (\varrho^{2p} - r_2^{2p}) \right\} l}{r_1^{2p} (1 + \delta_1)(1 + \delta_2) - r_2^{2p} (1 - \delta_1)(1 - \delta_2)} M_{1x}$$

$$+ \frac{r_2^p}{\varrho^p} \frac{\mu_0 \left\{ (r_1^p - \varrho^p)^2 + \delta_1 (r_1^{2p} - \varrho^{2p}) \right\} l}{r_1^{2p} (1 + \delta_1)(1 + \delta_2) - r_2^{2p} (1 - \delta_1)(1 - \delta_2)} M_{2x}$$

terwijl wij de uitdrukking voor de componente N_y verkrijgen door in bovenstaande uitdrukking M_{1x} door M_{1y} en M_{2x} door M_{2y} te vervangen.

Ten aanzien van de samenstelling van N_x en N_y moeten we thans het volgende opmerken.

In hoofdstuk III hebben we aangetoond, dat de beide vectoren, welke twee ongelijksoortige enkelvoudige velden voorstellen, niet voor vectorale samenstelling vatbaar zijn, en dat het dus niet mogelijk is een saamgesteld veld door één enkelen vector voor te stellen.

Deze onsamenstelbaarheid was *uitsluitend* het gevolg van het verschil in vorm der ongelijksoortige velden, veroorzaakt door de verschillende wijze waarop de functies A, welke deze velden beschrijven, afhankelijk zijn van ϱ.

Hieruit volgt echter onmiddellijk, dat de samenstelling der vectoren volkomen geoorloofd wordt, zoodra wij de door deze vectoren voorgestelde grootheden beschouwen *voor eene bepaalde waarde van* ϱ; m. a. w.: indien we de vectoren $\mathbf{N}_1$ en $\mathbf{N}_2$ niet meer beschouwen als de voorstelling van 2 enkelvoudige *velden*, doch slechts als die van de beide in deze velden optredende *krachtstroomen* per pool, gaande door een bepaald cylinder-oppervlak, zoo levert ons de resultante $\mathbf{N}$ dezer vectoren de voorstelling van den resulteerenden krachtstroom door ditzelfde cylinder-oppervlak. We zullen dus ook in een saamgesteld sinusoidaal veld den krachtstroom door een bepaald cylinder-oppervlak mogen voorstellen door een vector, welke met andere vectoren van dezelfde soort samenstelbaar is, en die ook omgekeerd bij ontbinding naar bepaalde richtingen de met die richtingen overeenkomende componenten van den krachtstroom oplevert.

De boven bepaalde componenten N_x en N_y kunnen we bijgevolg beschouwen als de ontbondenen naar twee richtingen, OX en OY, van een vector, voorstellende den totalen krachtstroom, waarbij het magnetisch standsverschil van den krachtstroom met zijne beide componenten gelijk is aan het richtingsverschil van den vector met de richtingen OX en OY.

Uit den vorm der boven gevonden betrekkingen voor N_x en N_y blijkt dan evenwel, dat we in deze opvatting de grootheden M_{1x} en M_{1y} eenerzijds, M_{2x} en M_{2y} anderzijds moeten beschouwen als de ontbondenen naar OX en OY van 2 vectoren, voorstellende de beide magnetomotorische krachten M_1 en M_2, waarbij we dus aan ieder dezer magnetomotorische krachten een richting toekennen, overeenkomende met die van den overeenkomstigen krachtstroom.

Stellen we thans de magnetomotorische krachten voor door de vectoren $\mathbf{M}_1$ en $\mathbf{M}_2$, den krachtstroom per pool, gaande door het cylinder-oppervlak, $\varrho = constant$, door den vector $\mathbf{N}_\varrho$, zoo volgt bij invoering der resulteerende magnetomotorische kracht:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$$

uit de boven afgeleide uitdrukking voor N_x onmiddellijk:

$$\mathbf{N}_\varrho = \frac{2\,\mu_0\, r_1{}^p\, r_2{}^p\, l}{r_1{}^{2p}(1+\delta_1)(1+\delta_2) - r_2{}^{2p}(1-\delta_1)(1-\delta_2)}\,\mathbf{M}$$

$$+ \frac{r_1{}^p}{\varrho^p}\,\frac{\mu_0 \left\{ (\varrho^p - r_2{}^p)^2 + \delta_2 (\varrho^{2p} - r_2{}^{2p}) \right\} l}{r_1{}^{2p}(1+\delta_1)(1+\delta_2) - r_2{}^{2p}(1-\delta_1)(1-\delta_2)}\,\mathbf{M}_1$$

$$+ \frac{r_2{}^p}{\varrho^p}\,\frac{\mu_0 \left\{ (r_1{}^p - \varrho^p)^2 + \delta_1 (r_1{}^{2p} - \varrho^{2p}) \right\} l}{r_1{}^{2p}(1+\delta_1)(1+\delta_2) - r_2{}^{2p}(1-\delta_1)(1-\delta_2)}\,\mathbf{M}_2$$

Bij invoering der grootheden:

$$R = \frac{r_1{}^{2p}(1+\delta_1)(1+\delta_2) - r_2{}^{2p}(1-\delta_1)(1-\delta_2)}{2\,\mu_0\, r_1{}^p\, r_2{}^p\, l}$$

$$R_1 = \frac{r_1{}^{2p}(1+\delta_1)(1+\delta_2) - r_2{}^{2p}(1-\delta_1)(1-\delta_2)}{\mu_0 \left\{ (r_1{}^p - r_2{}^p)^2 + \delta_2 (r_1{}^{2p} - r_2{}^{2p}) \right\} l}$$

$$R_2 = \frac{r_1{}^{2p}(1+\delta_1)(1+\delta_2) - r_2{}^{2p}(1-\delta_1)(1-\delta_2)}{\mu_0 \left\{ (r_1{}^p - r_2{}^p)^2 + \delta_1 (r_1{}^{2p} - r_2{}^{2p}) \right\} l}$$

gaat de uitdrukking voor den krachtstroom per pool over in:

$$\mathbf{N}_\varrho = \frac{\mathbf{M}}{R} + \frac{r_1{}^p}{\varrho^p}\,\frac{(\varrho^p - r_2{}^p)^2 + \delta_2(\varrho^{2p} - r_2{}^{2p})}{(r_1{}^p - r_2{}^p)^2 + \delta_2(r_1{}^{2p} - r_2{}^{2p})}\,\frac{\mathbf{M}_1}{R_1}$$

$$+ \frac{r_2{}^p}{\varrho^p}\,\frac{(r_1{}^p - \varrho^p)^2 + \delta_1(r_1{}^{2p} - \varrho^{2p})}{(r_1{}^p - r_2{}^p)^2 + \delta_1(r_1{}^{2p} - r_2{}^{2p})}\,\frac{\mathbf{M}_2}{R_2}$$

Hiermede is de gebruikelijke splitsing van den krachtstroom uitgevoerd in een *restkrachtstroom*:

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{M}}{R}$$

en twee *lekkrachtstroomen*:

$$\mathbf{N}_{l_1} = \frac{\mathbf{M}_1}{R_1} \text{ en } \mathbf{N}_{l_2} = \frac{\mathbf{M}_2}{R_2}$$

Bij aangroeiing van ϱ van r_2 tot r_1 verandert nl. in bovenstaande uitdrukking voor $\mathbf{N}_\varrho$ de coëfficient van $\frac{\mathbf{M}_1}{R_1}$ van 0 tot 1, die van $\frac{\mathbf{M}_2}{R_2}$ van 1 tot 0.

We vinden bijgevolg voor den statorkrachtstroom:

$$\mathbf{N}_s = \frac{\mathbf{M}}{R} + \frac{\mathbf{M}_1}{R_1}$$

voor den rotorkrachtstroom:

$$\mathbf{N}_r = \frac{\mathbf{M}}{R} + \frac{\mathbf{M}_2}{R_2}$$

zoodat inderdaad $\mathbf{N}$ den restkrachtstroom, $\mathbf{N}_{l_1}$ en $\mathbf{N}_{l_2}$ de beide lekkrachtstroomen voorstellen.

De boven ingevoerde grootheden R, R_1 en R_2 zijn blijkbaar de reluctanties der drie velden, waarin men zich in bovenbedoelde voorstellingswijze het werkelijke veld gesplitst denkt.

Beschouwen we in de eerste plaats de reluctantie van het restveld:

$$R = \frac{r_1^{2p}(1+\delta_1)(1+\delta_2) - r_2^{2p}(1-\delta_1)(1-\delta_2)}{2\,\mu_0\, r_1^p\, r_2^p\, l}$$

$$= \frac{r_1^{2p} - r_2^{2p}}{2\,\mu_0\, r_1^p\, r_2^p\, l} + \frac{r_1^{2p} + r_2^{2p}}{2\,\mu_0\, r_1^p\, r_2^p\, l}\,\delta_1 + \frac{r_1^{2p} + r_2^{2p}}{2\,\mu_0\, r_1^p\, r_2^p\, l}\,\delta_2 + \frac{r_1^{2p} - r_2^{2p}}{2\,\mu_0\, r_1^p\, r_2^p\, l}\,\delta_1\delta_2$$

Nu is in de gangbare opvatting der reluctantie van een magnetisch circuit de *totale* reluctantie gelijk aan de *som* der reluctanties van de deelen, waaruit het circuit is saamgesteld.

Nemen we in aanmerking dat de grootheden:

$$\delta_1 = \frac{\mu_0}{\mu_1}\,\frac{\mathrm{r}_1^{2p} + r_1^{2p}}{\mathrm{r}_1^{2p} - r_1^{2p}} \quad \text{en} \quad \delta_2 = \frac{\mu_0}{\mu_2}\,\frac{r_2^{2p} + \mathrm{r}_2^{2p}}{r_2^{2p} - \mathrm{r}_2^{2p}}$$

bepaald zijn door de permeabiliteit en de afmetingen van de samenstellende deelen der machine, zoo volgt hieruit dat bovenstaande opvatting met het optreden van een term met het product $\delta_1\delta_2$ in de uitdrukking voor R in tegenspraak is.

Slechts door de opmerking te maken dat practisch $\frac{\mu_0}{\mu_1}$ en $\frac{\mu_0}{\mu_2}$ en bijgevolg δ_1 en δ_2 zéér kleine waarden bezitten, zoodat het product $\delta_1 \delta_2$ ten opzichte van de eenheid, en dus ook de vierde term in bovenstaande uitdrukking voor R ten opzichte van den eersten term verwaarloosd worden kan, wordt althans in dit opzicht overeenstemming met de gangbare theorie van het magnetisch circuit verkregen, en gaat bij invoering van:

$$R_e = \frac{r_1^{2p} - r_2^{2p}}{2\,\mu_0\, r_1^p\, r_2^p\, l}$$

$$R_s = \frac{r_1^{2p} + r_2^{2p}}{2\,\mu_0\, r_1^p\, r_2^p\, l} \quad \delta_1 = \frac{(r_1^{2p} + r_2^{2p})(\mathrm{r}_1^{2p} + r_1^{2p})}{2\,\mu_1\, r_1^p\, r_2^p\, (\mathrm{r}_1^{2p} - r_1^{2p})\, l}$$

$$R_r = \frac{r_1^{2p} + r_2^{2p}}{2\,\mu_0\, r_1^p\, r_2^p\, l} \quad \delta_2 = \frac{(r_1^{2p} + r_2^{2p})(r_2^{2p} + \mathrm{r}_2^{2p})}{2\,\mu_2\, r_1^p\, r_2^p\, (r_2^{2p} - \mathrm{r}_2^{2p})\, l}$$

de uitdrukking voor R over in:

$$R = R_e + R_s + R_r$$

waarin de termen R_e, R_s en R_r het aandeel voorstellen van het entrefer, den stator en den rotor in de reluctantie van het circuit.

We kunnen thans nog de uitdrukkingen voor deze grootheden vereenvoudigen door de overweging, dat practisch de breedte van het entrefer:

$$s = r_1 - r_2$$

steeds klein is ten opzichte van den gemiddelden straal:

$$r_0 = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

Verwaarloozen we de tweede en hoogere machten der verhouding $\frac{s}{r_0}$ ten opzichte van de eenheid, zoo is bij benadering:

$$\frac{r_1^{2p} - r_2^{2p}}{2\, r_1^p\, r_2^p} = \frac{p\, s}{r_0} \quad \text{en} \quad \frac{r_1^{2p} + r_2^{2p}}{2\, r_1^p\, r_2^p} = 1.$$

Bij invoering der gemiddelde doorsnede van den krachtstroom binnen het entrefer:

$$D = \frac{\pi\, r_0\, l}{p}$$

verkrijgen we als benaderde waarden van de samenstellende deelen der reluctantie:

$$R_e = \frac{p\,s}{\mu_0\, l\, r_0} = \frac{\pi}{2}\,\frac{2\,s}{\mu_0\, D}$$

$$R_s = \frac{\mathrm{r}_1^{2p} + r_1^{2p}}{\mu_1\,(\mathrm{r}_1^{2p} - r_1^{2p})\, l}$$

$$R_r = \frac{r_2^{2p} + \mathrm{r}_2^{2p}}{\mu_2\,(r_2^{2p} - \mathrm{r}_2^{2p})\, l}.$$

Alleen de eerste dezer drie uitdrukkingen, betrekking hebbende op het entrefer, stemt *in vorm* overeen met de formule ter bepaling van den weerstand van een electrischen stroomgeleider, en sluit zich dus in zooverre aan bij de gebruikelijke opvatting van het magnetisch circuit. Deze overeenstemming ontbreekt echter *geheel* bij de beide laatste uitdrukkingen, welke het aandeel van stator en rotor in de reluctantie bepalen.

De gevolgtrekking, waartoe wij komen, is dus deze:

de theorie van het magnetisch circuit, welke strikt genomen slechts juist is voor *draadvormige* magneten, *is zelfs niet met grove benadering toepasselijk op het magnetisch veld eener electrische machine.*

Nog valt op te merken, dat van de drie termen, waaruit de reluctantie R is saamgesteld, de eerste, R_e, *evenredig* is met p, terwijl de beide andere termen, hoewel *niet* evenredig met p, toch tegelijk met p aangroeien. Nemen we nu in aanmerking dat practisch R_e overwegend groot is in vergelijking met R_s en R_r, zoo volgt hieruit, dat we voor eene globale vergelijking der reluctanties eener zelfde machine ten aanzien van magnetische velden met een verschillend aantal polen mogen aannemen, dat *R ten naastenbij* evenredig met p is.

We gaan thans over tot eene nadere beschouwing van de reluctanties der lekvelden.

Schrijven we de boven afgeleide uitdrukking voor R_1 als volgt:

$$R_1 = \frac{2\, r_1^p\, r_2^p}{(r_1^p - r_2^p)^2}\;\frac{R}{1 + \delta_2\,\dfrac{r_1^p + r_2^p}{r_1^p - r_2^p}}$$

en voeren we de grootheden s en r_0 in, zoo vinden we bij verwaarloozing der tweede en hoogere machten van $\frac{s}{r_0}$ ten opzichte van de eenheid de benaderde waarde:

$$R_1 = \frac{2\, r_0^2}{p^2\, s^2} \frac{R}{1 + 2 \frac{R_r}{R_e}}$$

en evenzoo:

$$R_2 = \frac{2\, r_0^2}{p^2\, s^2} \frac{R}{1 + 2 \frac{R_s}{R_e}}$$

of, in aanmerking nemende dat bij een goed gedimensionneerde machine het aandeel van stator en rotor in de totale reluctantie slechts gering is, zoodat we R_r^2, $R_s\, R_r$ en R_s^2 tegenover R_e^2 kunnen verwaarloozen:

$$R_1 = \frac{2\, r_0^2}{p^2\, s^2} (R - 2\, R_r)$$

$$R_2 = \frac{2\, r_0^2}{p^2\, s^2} (R - 2\, R_s).$$

Voor zoover we slechts rekening te houden hebben met zoodanige waarden van het aantal polen, waarbij $p\, s$ klein blijft ten opzichte van r_0, volgt uit bovenstaande uitdrukkingen, dat de reluctanties der lekvelden zéér groot zijn ten opzichte der reluctantie van het restveld.

Ten aanzien van velden met verschillend aantal polen, optredende bij eenzelfde machine, blijkt dat we bij benadering de reluctanties der lekvelden kunnen beschouwen als omgekeerd evenredig met p.

HOOFDSTUK VII.

Eenige gevolgtrekkingen uit de voor een cylindrisch discontinuiteitsvlak geldende overgangscondities.

In de eerste plaats zullen we het verschil bepalen der determinanten:

$$\frac{1}{\mu}\begin{vmatrix} P_x r^p + Q_x r^{-p} & P_x r^p - Q_x r^{-p} \\ P_y r^p + Q_y r^{-p} & P_y r^p - Q_y r^{-p} \end{vmatrix} = \frac{2}{\mu}\begin{vmatrix} Q_x & P_x \\ Q_y & P_y \end{vmatrix}$$

en

$$\frac{1}{\mu'}\begin{vmatrix} P'_x r^p + Q'_x r^{-p} & P'_x r^p - Q'_x r^{-p} \\ P'_y r^p + Q'_y r^{-p} & P'_y r^p - Q'_y r^{-p} \end{vmatrix} = \frac{2}{\mu'}\begin{vmatrix} Q'_x & P'_x \\ Q'_y & P'_y \end{vmatrix}$$

waarin de grootheden μ, P en Q eenerzijds, μ', P' en Q' anderzijds, betrekking hebben op de beide zonen, welke in- en uitwendig gelegen zijn van het discontinuiteitsvlak $\varrho = r$.

Uit de op bladz. 78 opgestelde overgangscondities blijkt onmiddellijk, dat dit verschil gelijk is aan:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} P_x r^p + Q_x r^{-p} & M_x \\ P_y r^p + Q_y r^{-p} & M_y \end{vmatrix} = \frac{1}{4l}\begin{vmatrix} N_x & M_x \\ N_y & M_y \end{vmatrix}$$

Wij vinden dus de betrekking:

$$\frac{8l}{\mu}\begin{vmatrix} Q_x & P_x \\ Q_y & P_y \end{vmatrix} - \frac{8l}{\mu'}\begin{vmatrix} Q'_x & P'_x \\ Q'_y & P'_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} N_x & M_x \\ N_y & M_y \end{vmatrix}$$

welke we ook bij invoering der krachtstroomen, overeenkomende met de enkelvoudige componenten van het veld, als volgt schrijven kunnen:

$$\frac{2}{\mu\, l}\begin{vmatrix} N_{2x} & N_{1x} \\ N_{2y} & N_{1y} \end{vmatrix} - \frac{2}{\mu' l}\begin{vmatrix} N'_{2x} & N'_{1x} \\ N'_{2y} & N'_{1y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} N_x & M_x \\ N_y & M_y \end{vmatrix}$$

Na vermenigvuldiging van beide leden met den eenheidsvector k gaat bovenstaande betrekking over in:

$$1)\qquad \frac{2}{\mu\, l}\,[\mathbf{N}_2\,\mathbf{N}_1] - \frac{2}{\mu' l}\,[\mathbf{N}'_2\,\mathbf{N}'_1] = [\mathbf{N}\,\mathbf{M}]$$

In de tweede plaats bepalen we het verschil der determinanten:

$$\frac{1}{\mu}\begin{vmatrix} P_x\, r^p + Q_x\, r^{-p} & -P_y\, r^p + Q_y\, r^{-p} \\ P_y\, r^p + Q_y\, r^{-p} & P_x\, r^p - Q_x\, r^{-p} \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu}\,(P^2\, r^{2p} - Q^2\, r^{-2p})$$

en

$$\frac{1}{\mu'}\begin{vmatrix} P'_x r^p + Q'_x r^{-p} & -P'_y r^p + Q'_y r^{-p} \\ P'_y r^p + Q'_y r^{-p} & P'_x r^p - Q'_x r^{-p} \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu'}\,(P'^2\, r^{2p} - Q'^2\, r^{-2p})$$

waarvoor we vinden:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} P_x\, r^p + Q_x\, r^{-p} & -M_y \\ P_y\, r^p + Q_y\, r^{-p} & M_x \end{vmatrix} = \frac{1}{4\,l}\begin{vmatrix} N_x & -M_y \\ N_y & M_x \end{vmatrix}$$

We verkrijgen dus de betrekking:

$$\frac{4\,l}{\mu}\,(P^2\, r^{2p} - Q^2\, r^{-2p}) - \frac{4\,l}{\mu'}\,(P'^2\, r^{2p} - Q'^2\, r^{-2p}) = N_x\, M_x + N_y\, M_y$$

welke bij invoering van de vectoren $\mathbf{N}$ en $\mathbf{M}$ overgaat in:

$$2)\qquad \frac{1}{\mu\, l}\,(\mathbf{N}_1^2 - \mathbf{N}_2^2) - \frac{1}{\mu' l}\,(\mathbf{N}'^2_1 - \mathbf{N}'^2_2) = \mathbf{N}\,\mathbf{M}\,\cdot$$

Uit de betrekking 1) volgt vooreerst, dat de waarde van:

$$\frac{1}{\mu}\,[\mathbf{N}_2\,\mathbf{N}_1]$$

slechts eene verandering ondergaan kan bij het passeeren van een stroomvlak. Aangezien nu voor de buitenste zone $\mathbf{N}_1 = 0$ en voor de binnenste zone $\mathbf{N}_2 = 0$ is, volgt hieruit dat de waarde van hun vectorproduct zoowel aan de buitenzijde van het buitenste stroomvlak als aan de binnenzijde van het binnenste stroomvlak overal $= 0$ is.

Voor de gezamentlijke stroomvlakken is bijgevolg:

$$\Sigma\,[\mathbf{N}\,\mathbf{M}] = 0.$$

Duiden we de sommatie voor alle stroomvlakken, gelegen aan de buitenzijde van een bepaald cylinder-oppervlak aan door Σ_u, voor alle stroomvlakken aan de binnenzijde van dit cylinder-oppervlak door Σ_i, zoo geldt voor dit cylinder-oppervlak:

$$\frac{2}{\mu\, l}\,[\mathbf{N}_2\,\mathbf{N}_1] = \Sigma_u\,[\mathbf{N}\,\mathbf{M}] = \Sigma_i\,[\mathbf{M}\,\mathbf{N}].$$

Voor de waarde van het koppel, door de buitenste stroomvlakken op de binnenste stroomvlakken uitgeoefend:

$$\mathbf{K} = \frac{p^2}{8\,\mu\, l}\,[\mathbf{N}_2\,\mathbf{N}_1]$$

vinden we bijgevolg:

$$\mathbf{K} = \frac{p^2}{16}\,\Sigma_u\,[\mathbf{N}\,\mathbf{M}]$$

$$= \frac{p^2}{16}\,\Sigma_i\,[\mathbf{M}\,\mathbf{N}].$$

Hiermede is de uitdrukking voor het koppel tot de in de theorie der electrische machines gebruikelijke vormen teruggebracht.

Denken we ons nl. de stroomverdeelingen in stator en rotor in stroomvlakken geconcentreerd, zoo gaat bovenstaande uitdrukking voor een cylinder-oppervlak binnen het entrefer over in:

$$\mathbf{K} = \frac{p^2}{16}\,[\mathbf{N}_s\,\mathbf{M}_r]$$

$$= \frac{p^2}{16}\,[\mathbf{M}_s\,\mathbf{N}_r].$$

We moeten thans de opmerking maken, dat de herleiding van de *algemeen geldende* uitdrukking voor het koppel:

$$\mathbf{K} = \frac{p^2}{8\,\mu\, l}\,[\mathbf{N}_2\,\mathbf{N}_1]$$

tot eene uitdrukking van den vorm:

$$\mathbf{K} = \frac{p^2}{16}[\mathbf{M}\ \mathbf{N}]$$

berust op de aanname van *cylindrische* discontinuiteitsvlakken.

Zoodra we van deze aanname afzien is het in het algemeen *niet* meer mogelijk het koppel uit te drukken als vectorproduct van eene magnetomotorische kracht en een krachtstroom.

Deze opmerking geeft ons aanleiding voor een oogenblik het gebied der zuivere veld-theorie te verlaten, ten einde eenige opmerkingen te maken met betrekking tot de toepassing dezer theorie op electrische machines.

In het algemeen zal het koppel eener electrische machine worden opgeleverd:

1^0 door de krachten, welke het magnetisch veld uitoefent op de stroomgeleiders, en

2^0 door de krachten, door het magnetisch veld uitgeoefend op het vrije magnetisme der grensvlakken tusschen de zonen van verschillende permeabiliteit.

Uit het feit dat *bij den in het voorgaande ondersteldden cylindrischen vorm der grensvlakken* de waarde van:

$$\frac{1}{\mu}[\mathbf{N}_2\ \mathbf{N}_1]$$

onveranderd blijft bij het passeeren van een dergelijk grensvlak, *dat niet tevens stroomvlak is,* volgt dat in dit geval het bovenbedoelde tweede gedeelte van het koppel $= 0$ is.

Dat dit echter in het algemeen *niet* zoo is, en dat zelfs het tweede deel van het koppel overwegend groot kan worden in vergelijking met het eerste gedeelte, blijkt duidelijk indien we het geval beschouwen eener electrische machine, waarbij de stroomgeleiders zijn aangebracht in *groeven* van het stator- en rotorijzer.

Voor het eigenlijke entrefer eener dergelijke machine, d. w. z. voor de ringvormige luchtruimte tusschen de cylindrische binnenbegrenzing van den stator en de cylindrische buitenbegrenzing van den rotor, blijven al onze beschouwingen over den vorm van het magnetisch veld onveranderd gelden: we zullen dus dit veld kunnen opvatten als de superpositie van een aantal roteerende sinusoidale velden, waarvan de vorm, en het aandeel in de energiestrooming en het koppel door de in de vorige hoofdstukken gevonden betrekkingen bepaald zijn.

Voor de ringvormige wikkelingsruimten *gelden onze beschouwingen omtrent den vorm van het veld echter niet meer* Aangezien nl. deze ruimten door radiale vlakken verdeeld worden in afdeelingen van verschillende permeabiliteit, is de in hoofdstuk I besproken functie:

$$A + i\,V = f\,(x + i\,y)$$

zoowel als hare afgeleide $f'\,(x + i\,y)$ in deze vlakken *discontinu*, en verliest dus de reeks van Laurent, met behulp waarvan we de mogelijkheid der ontbinding in sinusoidale velden aantoonden, hare geldigheid.

We hebben hierdoor te doen met een geval, voor welks streng mathematische behandeling de beschikbare hulpmiddelen te kort schieten.

Toch kunnen we met behulp van globale beschouwingen wel een en ander omtrent den vorm van het veld binnen deze wikkelingsruimten vaststellen.

In de eerste plaats weten we, dat ieder der krachtlijnen binnen het entrefer zal moeten worden voortgezet binnen de wikkelingsruimte, waarvan zij de begrenzing overschrijdt; hierbij zal echter het overgroote deel der krachtlijnen hun weg nemen door de tanden, en slechts een zeer gering deel door de groeven, waarbinnen de geleiders zijn aangebracht.

Stellen we ons voor, dat van eene machine der hier beschouwde soort stator en rotor vervaardigd waren van een materiaal, waarvan de permeabiliteit gelijk is aan die der lucht.

De stroomverdeelingen in stator en rotor eener dergelijke machine zouden dan binnen het entrefer slechts een relatief zwak veld kunnen veroorzaken, en bijgevolg zou slechts een zwak koppel kunnen optreden.

Indien we nu de permeabiliteit van stator en rotor zouden vergrooten, terwijl overigens alles onveranderd blijft, zoo zou de dichtheid der magnetische krachtlijnen *vergroot* worden binnen de tanden, *verkleind* binnen de groeven, en wel beide in zoodanige mate, dat de *totale* krachtstroom in het entrefer *vergroot* wordt; het gevolg hiervan zou zijn dat, *terwijl de op de stroomgeleiders werkende krachten worden verkleind, toch een vergrooting van het totale koppel verkregen wordt.*

Dit nu laat zich slechts op één wijze verklaren, nl. door aan te nemen, *dat het koppel eener machine met groefwikkelingen in hoofdzaak wordt opgeleverd door de krachten, welke het magnetisch veld uitoefent op het vrije magnetisme der grensvlakken,* terwijl het koppel der krachten, uitgeoefend op de stroomgeleiders, slechts uiterst onbeduidend is.

Zelfs indien we er in slagen zouden den werkelijken vorm van het magnetisch veld binnen de wikkelingsruimten vast te stellen, zoo zouden we toch niet het koppel kunnen bepalen als de resultante der krachten, door *dit* veld op een der beide stroomverdeelingen uitgeoefend.

Willen we de noodzakelijkheid vermijden om in de theorie der electrische machines de verdeelingen van het vrije magnetisme der grensvlakken te moeten invoeren, zoo is het *werkelijke* veld eener machine met groefwikkelingen eene voor deze theorie onbruikbare grootheid, en zijn we genoodzaakt tot invoering van een *fictief magnetisch veld*, waarvoor het koppel, uitgeoefend op de stroomverdeelingen alleen, gelijk is aan het koppel van het werkelijke veld op de stroomverdeelingen en de vrije magnetische massa's te samen.

Voor de bepaling van dit fictieve veld zullen we de beide wikkelingsruimten moeten beschouwen als zonen *van constante permeabiliteit*, zoodat de ruimteverdeeling van μ bij eene machine van de hier beschouwde soort aanleiding geeft tot de aanname van 6 co-axiale cylindrische discontinuiteitsvlakken.

We moeten ons dan echter de vraag stellen, welke waarden we aan de permeabiliteit der nieuw ingevoerde zonen, gevormd door de wikkelingsruimten zullen moeten toekennen!

Voor de beantwoording dezer vraag laat ons eveneens de mathematische analyse geheel in den steek.

Duiden we de permeabiliteit der lucht aan door μ_0, de permeabiliteit van het ijzer door μ, de verhouding van groefbreedte tot groefsteek door ε, zoo weten we alleen dat de voor de wikkelingsruimte in te voeren permeabiliteit μ' van deze drie grootheden afhankelijk zal moeten zijn, en wel zoodanig dat:

$$\text{voor } \varepsilon = 1 \qquad \mu' = \mu_0$$
$$\text{en voor } \varepsilon = 0 \qquad \mu' = \mu$$

terwijl we bovendien moeten aannemen, dat bij continue verandering van ε van 0 tot 1, μ' *continu* van μ op μ_0 zal afnemen.

De *eenvoudigste* functie van ε, μ en μ_0, welke aan deze voorwaarden voldoet is:

$$\mu' = \varepsilon \mu_0 + (1 - \varepsilon) \mu$$

waarbij dus aan de wikkelingsruimte eene constante permeabiliteit wordt toegekend, gelijk aan de *gemiddelde* waarde van de werkelijke permeabiliteit binnen deze ruimte.

Zoolang we niet over een juistere waarde van μ' hebben te beschikken, is de aanname dezer waarde dus het meest voor de hand liggend.

Overigens is de vraag naar de bepaling van deze juiste waarde van μ' van betrekkelijk weinig belang, omdat ten slotte alleen de waarden der reluctanties R den invloed van μ' ondervinden, terwijl toch deze grootheden in hoofdzaak bepaald worden door de constanten van het eigenlijke entrefer, zoodat eene betrekkelijk groote fout in de waarde van μ' toch slechts eene geringe fout in de waarden der reluctanties ten gevolge heeft.

In onze volgende beschouwingen zal het overigens nergens noodig zijn eenige aanname omtrent de waarde van μ' in te voeren.

We keeren thans terug tot onze algemeene beschouwingen over het magnetisch veld.

De betrekking:

$$2) \qquad \frac{1}{\mu\, l}(\mathbf{N}_1{}^2 - \mathbf{N}_2{}^2) - \frac{1}{\mu' l}(\mathbf{N}'_1{}^2 - \mathbf{N}'_2{}^2) = \mathbf{N}\,\mathbf{M}$$

bepaalt de veranderingen, welke de functie:

$$\mathbf{N}_1{}^2 - \mathbf{N}_2{}^2 = 4\, l^2 (P^2 \varrho^{2p} - Q^2 \varrho^{-2p})$$

in de discontinuiteitsvlakken ondergaat.

We merken vooreerst op dat, zoolang geen discontinuiteitsvlak gepasseerd wordt, deze functie *continu* aangroeit met ϱ, waaruit volgt, dat binnen een bepaalde zone deze functie slechts $= 0$ kan worden indien zij aan de binnenbegrenzing dezer zone *negatief,* aan de buitenbegrenzing *positief* is.

In de grensvlakken tusschen media van verschillende permeabiliteit, welke niet tevens stroomvlakken zijn, zal de functie eenvoudig eene met μ evenredige verandering ondergaan, en dus *niet* van teeken veranderen.

Eene sprongsgewijze verandering van teeken zal dus slechts kunnen optreden in de stroomvlakken.

Aangezien nu in de binnenste zone $\mathbf{N}_2 = 0$, en in de buitenste zone $\mathbf{N}_1 = 0$ is, *zal de waarde van* $\mathbf{N}_1^2 - \mathbf{N}_2^2$ *aan de binnenzijde van het binnenste stroomvlak overal positief, aan de buitenzijde van het buitenste stroomvlak overal negatief moeten zijn.*

Uit een en ander volgt, *dat in minstens één der stroomvlakken eene plotselinge verandering van teeken zal moeten optreden, en wel van positief aan de binnenzijde naar negatief aan de buitenzijde van het stroomvlak.*

De scalaire waarde van den krachtstroom per pool door een cylinder-oppervlak, ϱ = *constant*, is bepaald door:

$$N_\varrho^2 = 4\,l^2\,(P^2\,\varrho^{2p} + Q^2\,\varrho^{-2p} + 2\,P\,Q\cos\gamma)$$

waaruit volgt:

$$\varrho\,\frac{\delta N_\varrho^2}{\delta\varrho} = 8\,p\,l^2\,(P^2\,\varrho^{2p} - Q^2\,\varrho^{-2p})$$
$$= 2p\,(\mathbf{N}_1^2 - \mathbf{N}_2^2)$$

De krachtstroom N_ϱ zal dus aangroeien of afnemen met toenemende ϱ alnaarmate $\mathbf{N}_1^2 - \mathbf{N}_2^2$ positief of negatief is.

Van af het centrum tot het binnenste stroomvlak zal bijgevolg N_ϱ continu aangroeien; van af het buitenste stroomvlak tot in het oneindige zal daarentegen N_ϱ continu afnemen.

De verandering van N_ϱ tusschen twee stroomvlakken hangt af van de waarden, die $\mathbf{N}_1^2 - \mathbf{N}_2^2$ in de nabijheid dezer stroomvlakken bezit. Is deze functie aan de binnenbegrenzing der beschouwde zone positief, zoo blijft dit het geval binnen de geheele zone en zal dus N_ϱ continu aangroeien met ϱ; is de functie negatief aan de buitenbegrenzing zoo neemt binnen de geheele zone N_ϱ continu af bij aangroeiing van ϱ.

In het geval dat de functie negatief is aan de binnenbegrenzing en positief aan de buitenbegrenzing der beschouwde zone, zal zij voor een bepaald cylinder-oppervlak $\varrho = \varrho_0$ binnen deze zone gelijk 0 worden. De krachtstroom N_ϱ neemt hierbij dus continu af vanaf de binnenbegrenzing tot aan het cylinder-oppervlak $\varrho = \varrho_0$, bereikt hier zijne minimale waarde N_0, en neemt vervolgens weer continu toe naar de buitenbegrenzing.

Uit:

$$P^2 \varrho_0^{2p} - Q^2 \varrho_0^{-2p} = 0$$

volgt:

$$\varrho_0 = \sqrt[2p]{\frac{Q}{P}}$$

en

$$N_0 = 4\, l \sqrt{PQ} \cos \frac{\gamma}{2}.$$

De minimale waarde van den krachtstroom N_0 is dus blijkbaar identisch met den in hoofdstuk V bepaalden krachtstroom N_0, overgaande van de eene begrenzing der beschouwde zone naar de andere, indien voor beide begrenzingsvlakken krachtlijnen aanwezig zijn, welke punten van eenzelfde begrenzingsvlak met elkaar verbinden.

In het geval eener electrische machine, waarvan we de beide stroomverdeelingen in stroomvlakken geconcentreerd denken, bestaan thans 3 mogelijkheden, nl.:

1°. $\mathbf{N}_1^2 - \mathbf{N}_2^2$ *verandert van teeken in beide stroomvlakken.*

De krachtstroom neemt dan continu toe vanaf het centrum tot aan het rotorstroomvlak, neemt in het entrefer aanvankelijk af tot de minimale waarde N_0 bereikt wordt, om daarna weer aan te groeien tot aan het statorstroomvlak, terwijl hij voorbij het statorstroomvlak weer continu afneemt tot in het oneindige

2°. $\mathbf{N}_1^2 - \mathbf{N}_2^2$ *verandert alleen van teeken in het rotorstroomvlak.*

De krachtstroom neemt continu toe vanaf het centrum tot aan het rotorstroomvlak, om daarna continu af te nemen tot in het oneindige.

3°. $\mathbf{N}_1{}^2 - \mathbf{N}_2{}^2$ *verandert alleen van teeken in het statorstroomvlak.*

De krachtstroom neemt continu toe vanaf het centrum tot aan het statorstroomvlak om daarna weer continu af te nemen tot in het oneindige *).

Bepaalt men in deze drie gevallen uit de constanten P en Q van het entrefer den straal:

$$\varrho_0 = \sqrt[2p]{\frac{Q}{P}}$$

zoo vindt men blijkbaar alleen in het eerste geval hiervoor eene waarde, gelegen tusschen die van den straal r_1 van het statorstroomvlak en den straal r_2 van het rotorstroomvlak.

In het tweede geval is nl. $\mathbf{N}_1{}^2 - \mathbf{N}_2{}^2$ binnen het entrefer negatief en in absolute waarde afnemend, en vinden we dus voor ϱ_0 een waarde, grooter dan r_1.

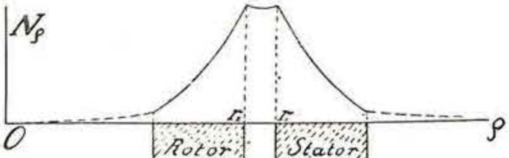
In het derde geval is $\mathbf{N}_1{}^2 - \mathbf{N}_2{}^2$ binnen het entrefer positief en toenemend, en bezit dus ϱ_0 een waarde, kleiner dan r_2.

Slechts in het eerste geval zullen dus behalve de krachtlijnen, welke het entrefer overbruggen, zoowel krachtlijnen optreden welke twee punten van het statorstroomvlak, als krachtlijnen welke twee punten van het rotorstroomvlak met elkaar verbinden.

In het tweede geval ontbreken de krachtlijnen, welke twee punten van het statorstroomvlak, in het derde geval de krachtlijnen, welke twee punten van het rotorstroomvlak verbinden.

---

*) De verandering van den krachtstroom N_ρ, als functie van ρ, welke volgt uit de hier afgeleide betrekkingen, is in nevenstaande figuur grafisch voorgesteld. Blijkbaar neemt de krachtstroom binnen het statorijzer in buitenwaartsche richting, binnen het rotorijzer in binnenwaartsche richting sterk af, in vergelijking met de afname tot 0 buiten de begrenzingen der machine. Bij eene goed gedimensionneerde machine zal reeds aan de buitenbegrenzing van den stator en aan de binnenbegrenzing van den rotor de krachtstroom tot een zoodanig gering bedrag zijn afgenomen, dat zijne voortzetting voorbij deze begrenzingen practisch kan verwaarloosd worden.



Met welk van deze drie gevallen we te doen hebben, hangt af van de verhouding en het standsverschil der magnetomotorische krachten $\mathbf{M}_1$ en $\mathbf{M}_2$; kan men beide geheel willekeurig aannemen, zoo zijn alle drie gevallen mogelijk!

In den regel verwart men de beide lekkrachtstroomen met de krachtstroomen, welke de krachtlijnen omvatten, die hetzij twee punten van het statorstroomvlak, hetzij twee punten van het rotorstroomvlak met elkaar verbinden, terwijl de restkrachtstroom dan identisch zou zijn met den krachtstroom N_0.

Was deze opvatting juist, zoo zouden we dus steeds met het eerste geval te doen hebben.

We zullen nu aantoonen dat men integendeel *bij een inductiemotor* steeds te doen heeft met het derde geval.

Hiertoe behoeven we slechts optemerken dat, zooals bekend mag ondersteld worden, de magnetomotorische kracht der rotorwikkeling van een inductiemotor en de rotorkrachtstroom magnetisch 90° ten opzichte van elkaar verplaatst zijn.

Hieruit volgt echter onmiddelijk:

$$\mathbf{N}_r \, \mathbf{M}_2 = 0$$

zoodat $\mathbf{N}_1^2 - \mathbf{N}_2^2$ *in het rotorstroomvlak niet van teeken verandert!*

In het entrefer van een inductiemotor treden dus slechts op:

1° krachtlijnen, overgaande van het statorstroomvlak naar het rotorstroomvlak; zij vormen te samen den gemeenschappelijken krachtstroom, *gelijk aan den rotorkrachtstroom:*

$$\mathbf{N}_r = \mathbf{N} + \mathbf{N}_{l2}$$

en 2° krachtlijnen, overgaande tusschen twee punten van het statorstroomvlak, te samen vormende den krachtstroom:

$$\mathbf{N}_s - \mathbf{N}_r = \mathbf{N}_{l1} - \mathbf{N}_{l2}$$

dus *gelijk aan het verschil der beide lekkrachtstroomen.*

HOOFDSTUK VIII.

Bijzondere methode voor de oplossing der vergelijkingen, opgeleverd door de overgangscondities in de discontinuiteitsvlakken.

In hoofdstuk VI hebben we het systeem vergelijkingen ter bepaling van de constanten P_x, Q_x, P_y en Q_y opgelost voor het geval van 4 cylindrische discontinuiteitsvlakken.

Uit onze beschouwingen van het vorige hoofdstuk is ons echter gebleken, dat wij in het algemeen bij eene electrische machine met groefwikkelingen voor de bepaling van het magnetisch veld een grooter aantal cylindrische discontinuiteitsvlakken zullen moeten aannemen.

Indien wij nu op dit geval de in hoofdstuk VI gevolgde methode zouden willen toepassen, zoo zouden we op het practische bezwaar stuiten dat zéér samengestelde uitdrukkingen bij de berekening zouden optreden, en dat ten slotte de uitkomsten zouden verkregen worden in onoverzichtelijken vorm. Dit bezwaar neemt natuurlijk toe naarmate het aantal discontinuiteitsvlakken grooter is!

Hierbij is evenwel in aanmerking te nemen, dat het aantal stroomvlakken van betrekkelijk ondergeschikt belang is. Immers, we zouden de verdeeling van het magnetisch veld kunnen vaststellen onder den invloed der magnetomotorische kracht van ieder der stroomvlakken afzonderlijk, en daarna door samenstelling het werkelijke magnetisch veld bepalen.

De meerdere of mindere saamgesteldheid der berekening hangt dus in hoofdzaak af van het aantal discontinuiteitsvlakken, welke de begrenzing vormen tusschen zonen van verschillende permeabiliteit.

In het volgende is getracht een methode aantegeven voor de oplossing der vergelijkingen, welke onafhankelijk van het aantal grensvlakken steeds op eenvoudige wijze leidt tot uitkomsten in practisch bruikbaren vorm.

Voor een grensvlak tusschen twee media met de permeabiliteiten μ en μ', dat *niet* tevens stroomvlak is, leveren de overgangscondities de volgende vier vergelijkingen op:

$$P_x r^p + Q_x r^{-p} = P'_x r^p + Q'_x r^{-p}$$

$$\frac{1}{\mu}(P_x r^p - Q_x r^{-p}) = \frac{1}{\mu'}(P'_x r^p - Q'_x r^{-p})$$

$$P_y r^p + Q_y r^{-p} = P'_y r^p + Q'_y r^{-p}$$

$$\frac{1}{\mu}(P_y r^p - Q_y r^{-p}) = \frac{1}{\mu'}(P'_y r^p - Q'_y r^{-p}).$$

Stellen wij ons nu voor, dat aan de binnenzijde van het binnenste stroomvlak n dergelijke grensvlakken gelegen zijn, zoo leveren deze vlakken:

$2n$ vergelijkingen met $n+1$ onbekenden P_x en n onbekenden Q_x

en

$2n$ vergelijkingen met $n+1$ onbekenden P_y en n onbekenden Q_y.

Duiden we een der onbekenden in het eerste systeem aan door P_{0x} en de overeenkomstige onbekende in het tweede systeem door P_{0y}, zoo zijn de grootheden:

$$a = \frac{P_x}{P_{0x}} = \frac{P_y}{P_{0y}} \quad \text{en} \quad b = \frac{Q_x}{P_{0x}} = \frac{Q_y}{P_{0y}}$$

voor ieder der zonen, voor zoover deze gelegen zijn binnen het binnenste stroomvlak, door de vergelijkingen der n grensvlakken volkomen bepaald.

Merken we nu op, dat de grootheden a en b geene verandering ondergaan bij verplaatsing der stroomvlakken, mits slechts de zone, waarop zij betrekking hebben, gelegen blijft aan de binnenzijde van het binnenste stroomvlak, zoo kunnen we eens voor goed deze constanten a en b voor *alle* zonen van verschillende permeabiliteit bepalen, door ons de gezamentlijke stroomvlakken verplaatst te denken naar de buitenste zone.

Deze bepaling geschiedt het eenvoudigst indien we de grootheden P_{0x} en P_{0y} betrekking doen hebben, hetzij op de binnenste zone, waarvoor dan geldt:

$$a = 1 \qquad b = 0$$

hetzij, indien de permeabiliteit der binnenste zone $= 0$ wordt aangenomen, op de naastvolgende zone, waarvoor in dit geval geldt:

$$P\, r^{p} + Q\, r^{-p} = 0$$

en dus:

$$a = 1 \qquad b = -\, r^{2p}$$

waarin r den straal der binnenbegrenzing van de beschouwde zone voorstelt.

De constanten a' en b' der eerstvolgende zone worden dan bepaald door de vergelijkingen:

$$a'\, r'^{p} + b'\, r'^{-p} = a\, r'^{p} + b\, r'^{-p}$$

$$\frac{1}{\mu'}\,(a'\, r'^{p} - b'\, r'^{-p}) = \frac{1}{\mu}\,(a\, r'^{p} - b\, r'^{-p})$$

waaruit volgt:

$$a' = \frac{\mu + \mu'}{2\,\mu}\, a + \frac{\mu - \mu'}{2\,\mu}\, b\, r'^{-2p}$$

$$b' = \frac{\mu - \mu'}{2\,\mu}\, a\, r'^{2p} + \frac{\mu + \mu'}{2\,\mu}\, b$$

Zijn de constanten a' en b' op deze wijze berekend, zoo kunnen voor de volgende zone de constanten a'' en b'' weer bepaald worden uit:

$$a'' = \frac{\mu' + \mu''}{2\,\mu'}\, a' + \frac{\mu' - \mu''}{2\,\mu'}\, b'\, r''^{-2p}$$

$$b'' = \frac{\mu' - \mu''}{2\,\mu'}\, a'\, r''^{2p} + \frac{\mu' + \mu''}{2\,\mu'}\, b'$$

enz., totdat achtereenvolgens voor alle zonen de constanten a en b zijn vastgesteld.

We merken op dat de uitdrukking:

$$a\, \varrho^{p} + b\, \varrho^{-p}$$

continu aangroeit van de waarde 0 in het centrum tot ∞ in het oneindige.

Op volkomen dezelfde wijze leidt de beschouwing der grensvlakken, gelegen aan de buitenzijde van het buitenste stroomvlak tot de invoering van twee constanten c en d voor ieder der zonen van verschillende permeabiliteit, welke constanten de verhoudingen bepalen:

$$c = \frac{P_x}{Q_{0x}} = \frac{P_y}{Q_{0y}} \quad \text{en} \quad d = \frac{Q_x}{Q_{0x}} = \frac{Q_y}{Q_{0y}}$$

voor zoover deze grootheden betrekking hebben op aan de buitenzijde van het buitenste stroomvlak gelegen zonen.

De bepaling der constanten c en d geschiedt het eenvoudigst door uit te gaan, hetzij van de buitenste zone, waarvoor:

$$c = 0 \qquad d = 1$$

hetzij, indien de permeabiliteit dezer zone $= 0$ gesteld wordt, van de naastvolgende zone, waarvoor in dit geval, indien r den straal der buitenbegrenzing voorstelt:

$$c = -r^{-2p} \qquad d = 1\,.$$

De constanten c' en d' voor de naastvolgende zone worden weer uit de constanten c en d afgeleid met behulp der formules:

$$c' = \frac{\mu + \mu'}{2\,\mu}\,c + \frac{\mu - \mu'}{2\,\mu}\,d\,r'^{-2p}$$

$$d' = \frac{\mu - \mu'}{2\,\mu}\,c\,r'^{2p} + \frac{\mu + \mu'}{2\,\mu}\,d$$

zoodat we, op deze wijze voortgaande, weer op weinig omslachtige wijze achtereenvolgens de constanten voor de verschillende zonen kunnen bepalen.

Op te merken valt, dat de uitdrukking:

$$c\,\varrho^{p} + d\,\varrho^{-p}$$

continu afneemt van ∞ in het centrum tot 0 in het oneindige.

Beschouwen we thans eene zone met de constanten a, b, c en d, ter weerszijden waarvan stroomvlakken gelegen zijn.

Nemen we aan, dat de stroomvlakken, gelegen aan de buitenzijde der beschouwde zone, in de binnenste zone eene waarde van P doen optreden, waarvan we de componenten aanduiden door P_{0x} en P_{0y}; verder, dat de stroomvlakken aan de binnenzijde der beschouwde zone in de buitenste zone eene waarde van Q doen optreden, waarvan we de componenten aanduiden door Q_{0x} en Q_{0y}.

Binnen de beschouwde zone is dan:

$$P_x = a\,P_{0x} + c\,Q_{0x} \qquad Q_x = b\,P_{0x} + d\,Q_{0x}$$
$$P_y = a\,P_{0y} + c\,Q_{0y} \qquad Q_y = b\,P_{0y} + d\,Q_{0y}$$

Bijgevolg is:

$$\begin{vmatrix} P_x & Q_x \\ P_y & Q_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P_{0x} & Q_{0x} \\ P_{0y} & Q_{0y} \end{vmatrix}$$

Uit de betrekking 1) van hoofdstuk VII volgt dat

$$\frac{1}{\mu} \begin{vmatrix} P_x & Q_x \\ P_y & Q_y \end{vmatrix}$$

geene verandering kan ondergaan zoolang geen stroomvlak gepasseerd wordt.

Indien dus tusschen de beide stroomvlakken ter weerszijden van de beschouwde zone, nog eene tweede zone gelegen is met de constanten a', b', c' en d' en de permeabiliteit μ', zoo is noodzakelijk:

$$\frac{1}{\mu} \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \frac{1}{\mu'} \begin{vmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{vmatrix}$$

m. a. w. de determinanten, gevormd door de constanten der beschouwde zonen, verhouden zich als hunne permeabiliteiten.

Aangezien echter voor iedere zone de waarde der constanten onafhankelijk is van de ligging der stroomvlakken, is de uitdrukking:

$$\frac{1}{\mu} \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = D$$

constant voor alle zonen van verschillende permeabiliteit, waarin de ruimte verdeeld is.

Hebben we eenmaal voor alle zonen de constanten a, b, c en d vastgesteld, zoo kan op zeer eenvoudige wijze het magnetisch veld bepaald worden, optredende onder den invloed eener sinusoidale magnetomotorische kracht in een bepaald stroomvlak.

Zij het stroomvlak $\varrho = r$, waarin eene magnetomotorische kracht $\mathbf{M}_r$ optreedt met de componenten M_x en M_y, gelegen in een zone met de permeabiliteit μ, waarvoor we de constanten a, b, c en d bepaald hebben.

Aan de binnenzijde van het stroomvlak is:

$$P_x = a\,P_{0x} \qquad Q_x = b\,P_{0x}$$

aan de buitenzijde van het stroomvlak:

$$P'_x = c\,Q_{0x} \qquad Q'_x = d\,Q_{0x}.$$

Na invoering dezer waarden in de overgangscondities voor het stroomvlak:

$$P_x\,r^p + Q_x\,r^{-p} = P'_x\,r^p + Q'_x\,r^{-p}$$

$$P_x\,r^p - Q_x\,r^{-p} = P'_x\,r^p - Q'_x\,r^{-p} + \frac{\mu}{2}M_x$$

gaan deze over in:

$$P_{0x}\,(a\,r^p + b\,r^{-p}) = Q_{0x}\,(c\,r^p + d\,r^{-p})$$

$$P_{0x}\,(a\,r^p - b\,r^{-p}) = Q_{0x}\,(c\,r^p - d\,r^{-p}) + \frac{\mu}{2}M_x.$$

Merken we nu op dat:

$$\begin{vmatrix} a\,r^p + b\,r^{-p} & -c\,r^p - d\,r^{-p} \\ a\,r^p - b\,r^{-p} & -c\,r^p + d\,r^{-p} \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = 2\,\mu\,D.$$

zoo volgt onmiddellijk uit bovenstaande vergelijkingen:

$$P_{0x} = \frac{c\,r^p + d\,r^{-p}}{4\,D}\,M_x$$

$$Q_{0x} = \frac{a\,r^p + b\,r^{-p}}{4\,D}\,M_x.$$

In eene zone met de constanten a', b', c' en d', *gelegen binnen het stroomvlak*, is thans:

$$P'_x = \frac{a'\,(c\,r^p + d\,r^{-p})}{4\,D}\,M_x$$

$$Q'_x = \frac{b'\,(c\,r^p + d\,r^{-p})}{4\,D}\,M_x$$

De x-componente van den krachtstroom $\mathbf{N}_\varrho$ over een lengte l der beschrijvende lijn van een binnen deze zone gelegen cylinderoppervlak is bijgevolg:

$$N_x = \frac{(a'\,\varrho^p + b'\,\varrho^{-p})\,(c\,r^p + d\,r^{-p})\,l}{2\,D}\,M_x$$

en daar evenzoo

$$N_y = \frac{(a'\,\varrho^p + b'\,\varrho^{-p})\,(c\,r^p + d\,r^{-p})\,l}{2\,D}\,M_y$$

is:

$$\mathbf{N}_\varrho = \frac{(a'\,\varrho^p + b'\,\varrho^{-p})\,(c\,r^p + d\,r^{-p})\,l}{2\,D}\,\mathbf{M}_r\,.$$

Op dezelfde wijze vinden we voor den krachtstroom $\mathbf{N}_\varrho$ binnen eene zone met de constanten a'', b'', c'' en d'', *gelegen aan de buitenzijde van het stroomvlak*:

$$\mathbf{N}_\varrho = \frac{(c''\,\varrho^p + d''\,\varrho^{-p})\,(a\,r^p + b\,r^{-p})\,l}{2\,D}\,\mathbf{M}_r\,.$$

Voor $\varrho = r$ worden beide uitdrukkingen voor $\mathbf{N}_\varrho$ aan elkaar gelijk, en vinden we:

$$\mathbf{N}_r = \frac{(a\,r^p + b\,r^{-p})\,(c\,r^p + d\,r^{-p})\,l}{2\,D}\,\mathbf{M}_r$$

zijnde de uitdrukking voor den krachtstroom per pool door het stroomvlak.

In het geval van meerdere stroomvlakken is het magnetisch veld te beschouwen als de superpositie der velden, ontstaande onder den invloed der magnetomotorische krachten in ieder der stroomvlakken afzonderlijk. We verkrijgen dus voor $\mathbf{N}_\varrho$ eene uitdrukking van den vorm:

$$\mathbf{N}_\varrho = \frac{a\,\varrho^p + b\,\varrho^{-p}}{2\,D}\, l\, \Sigma_u\,(c\,r^p + d\,r^{-p})\,\mathbf{M}_r$$

$$+ \frac{c\,\varrho^p + d\,\varrho^{-p}}{2\,D}\, l\, \Sigma_i\,(a\,r^p + b\,r^{-p})\,\mathbf{M}_r$$

waarin de sommaties Σ_u en Σ_i respectievelijk betrekking hebben op de stroomvlakken *uit-* en *inwendig* gelegen van de beschouwde zone.

Beschouwen we meer in het bijzonder het geval van twee stroomvlakken, overeenkomende met dat eener electrische machine.

Denken we ons het statorstroomvlak met een straal r_1 gelegen in eene zone met de constanten a_1, b_1, c_1, d_1, het rotorstroomvlak met een straal r_2 in eene zone met de constanten a_2, b_2, c_2, d_2 en duiden we de constanten van eenige zone tusschen deze beide, bijv. van het entrefer, aan door a, b, c, d.

Zij de magnetomotorische kracht van het statorstroomvlak $\mathbf{M}_1$, die van het rotorstroomvlak $\mathbf{M}_2$, zoo is de krachtstroom per pool in de tusschengelegen zone:

$$\mathbf{N}_\varrho' = \frac{(a\,\varrho^p + b\,\varrho^{-p})\;(c_1\,r_1^{\,p} + d_1\,r_1^{\,-p})\,l}{2\,D}\,\mathbf{M}_1$$

$$+ \frac{(c\,\varrho^p + d\,\varrho^{-p})\;(a_2\,r_2^{\,p} + b_2\,r_2^{\,-p})\,l}{2\,D}\,\mathbf{M}_2$$

welke uitdrukking we na invoering van:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$$

$$R = \frac{2\,D}{(a_2\,r_2^{\,p} + b_2\,r_2^{\,-p})\;(c_1\,r_1^{\,p} + d_1\,r_1^{\,-p})\,l}$$

$$R_1 = \frac{2\,D}{\{(a_1\,r_1^{\,p} + b_1\,r_1^{\,-p}) - (a_2\,r_2^{\,p} + b_2\,r_2^{\,-p})\}\,(c_1\,r_1^{\,p} + d_1\,r_1^{\,-p})\,l}$$

$$R_2 = \frac{2\,D}{\{(c_2\,r_2^{\,p} + d_2\,r_2^{\,-p}) - (c_1\,r_1^{\,p} + d_1\,r_1^{\,-p})\}\,(a_2\,r_2^{\,p} + b_2\,r_2^{\,-p})\,l}$$

als volgt kunnen schrijven:

$$\mathbf{N}_\varrho = \frac{\mathbf{M}}{R} + \frac{(a\,\varrho^p + b\,\varrho^{-p}) - (a_2 r_2^p + b_2 r_2^{-p})}{(a_1 r_1^p + b_1 r_1^{-p}) - (a_2 r_2^p + b_2 r_2^{-p})}\,\frac{\mathbf{M}_1}{R_1}$$

$$+ \frac{(c\,\varrho^p + d\,\varrho^{-p}) - (c_1 r_1^p + d_1 r_1^{-p})}{(c_2 r_2^p + d_2 r_2^{-p}) - (c_1 r_1^p + d_1 r_1^{-p})}\,\frac{\mathbf{M}_2}{R_2}$$

Aangezien bij verandering van ϱ van r_2 tot r_1 de waarde van $a\,\varrho^p + b\,\varrho^{-p}$ continu aangroeit van $a_2 r_2^p + b_2 r_2^{-p}$ tot $a_1 r_1^p + b_1 r_1^{-p}$, daarentegen de waarde van $c\,\varrho^p + d\,\varrho^{-p}$ continu afneemt van $c_2 r_2^p + d_2 r_2^{-p}$ tot $c_1 r_1^p + d_1 r_1^{-p}$, zal in de uitdrukking voor $\mathbf{N}_\varrho$ de coefficiënt van $\frac{\mathbf{M}_1}{R_1}$ continu aangroeien van 0 tot 1, daarentegen de coefficiënt van $\frac{\mathbf{M}_2}{R_2}$ continu afnemen van 1 tot 0.

Wij vinden bijgevolg voor den statorkrachtstroom:

$$\mathbf{N}_s = \frac{\mathbf{M}}{R} + \frac{\mathbf{M}_1}{R_1}$$

voor den rotorkrachtstroom:

$$\mathbf{N}_r = \frac{\mathbf{M}}{R} + \frac{\mathbf{M}_2}{R_2}$$

zoodat

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{M}}{R}$$

den restkrachtstroom, en

$$\mathbf{N}_{l1} = \frac{\mathbf{M}_1}{R_1} \qquad \mathbf{N}_{l2} = \frac{\mathbf{M}_2}{R_2}$$

de beide lekkrachtstroomen voorstellen

Een nader onderzoek der uitdrukkingen voor de reluctantie R van het restveld, en de reluctanties R_1 en R_2 van de beide lekvelden, als uitgevoerd in hoofdstuk VI, leidt in het algemeen niet tot vereenvoudiging dezer uitdrukkingen, noch tot overeenstemming met de uitkomsten der theorie van het magnetisch circuit.

We bepalen ons dus tot de opmerking, dat de reluctanties der lekvelden slechts dan zéér groot zullen zijn in vergelijking met de reluctantie van het restveld, indien:

$$\frac{(a_1 r_1^p + b_1 r_1^{-p}) - (a_2 r_2^p + b_2 r_2^{-p})}{a_2 r_2^p + b_2 r_2^{-p}}$$

en

$$\frac{(c_2 r_2^p + d_2 r_2^{-p}) - (c_1 r_1^p + d_1 r_1^{-p})}{c_1 r_1^p + d_1 r_1^{-p}}$$

zéér klein zijn ten opzichte van de eenheid, m. a. w. indien $a \varrho^p + b \varrho^{-p}$ en $c \varrho^p + d \varrho^{-p}$ bij overgang van het eene stroomvlak naar het andere slechts eene relatief geringe verandering ondergaan.

Indien wij dus in de volgende beschouwingen eene relatief geringe verandering dezer grootheden vooropstellen binnen het gebied, waarin de beide wikkelingen eener electrische machine zijn gelegen, zoo wil dit eenvoudig zeggen, dat we onderstellen te doen te hebben met eene *goed gedimensionneerde* machine.

HOOFDSTUK IX.

Sinusoidaal magnetisch veld onder den invloed eener electrische ruimtestrooming.

Evenals in de vorige beschouwingen denken we ons weer de ruimte door cylinder-oppervlakken :

$$\varrho = constant$$

verdeeld in zonen van verschillende permeabiliteit. We kunnen dan weer volgens de in het vorige hoofdstuk aangegeven methode voor ieder dezer zonen de constanten a, b, c en d voor een $2p$-polig sinusoidaal veld bepalen.

Terwijl wij ons echter tot dusverre de electrische strooming gecondenseerd dachten *in bepaalde oppervlakken*, zullen we thans het geval beschouwen, waarmee we in werkelijkheid steeds te doen hebben, nl. dat de electrische strooming verdeeld is over de ruimte.

We nemen weer aan, dat de richting der strooming overal evenwijdig is met de as der cylindrische grensvlakken, en dat hare waarde in ieder cylinder-oppervlak, $\varrho = constant$, verandert volgens een sinuswet.

Tusschen twee oneindig dicht bij elkaar gelegen cylinder-oppervlakken met een straalverschil $d\varrho$ treedt eene oneindig kleine $2p$-polige sinusoidale magnetomotorische kracht op, welke we in grootte en stand aanduiden door den vector :

$$d\,\mathbf{M} = \frac{\delta\,\mathbf{M}}{\delta\,\varrho}\,d\,\varrho$$

Ter bepaling van den krachtstroom $\mathbf{N}_\varrho$ maken we gebruik van de in het vorige hoofdstuk afgeleide formule :

$$\mathbf{N}_\varrho = \frac{a\,\varrho^p + b\,\varrho^{-p}}{2\,D}\,l\,\Sigma_u\,(c\,r^p + d\,r^{-p})\,\mathbf{M}_r$$

$$+ \frac{c\,\varrho^p + d\,\varrho^{-p}}{2\,D}\,l\,\Sigma_i\,(a\,r^p + b\,r^{-p})\,\mathbf{M}_r$$

welke voor het thans beschouwde geval overgaat in:

$$\mathbf{N}_\varrho = \frac{l}{2D} \left\{ (a\,\varrho^p + b\,\varrho^{-p}) \int_\varrho^\infty (c\,\varrho^p + d\,\varrho^{-p}) \frac{\delta \mathbf{M}}{\delta \varrho} d\,\varrho \right.$$

$$\left. + (c\,\varrho^p + d\,\varrho^{-p}) \int_0^\varrho (a\,\varrho^p + b\,\varrho^{-p}) \frac{\delta \mathbf{M}}{\delta \varrho} d\,\varrho \right\}.$$

Voor een gegeven sinusoidale ruimtestroomverdeeling is door bovenstaande formule de krachtstroom $\mathbf{N}_\varrho$ algemeen bepaald.

Stellen we ons de wikkelingen eener electrische machine voor als saamgesteld uit een aantal co-axiaal geplaatste cylindrische draadlagen, ieder bestaande uit een gelijk aantal draden. De magnetomotorische krachten der verschillende lagen eener bepaalde wikkeling zijn dan zoowel in grootte als in stand aan elkaar gelijk. Bij benadering zullen we de werkelijke strooming in de draden mogen vervangen door eene strooming, welke continu verdeeld is over de ruimte tusschen de twee cylinderoppervlakken:

$$\varrho = r \quad \text{en} \quad \varrho = r'$$

welke de wikkeling in- en uitwendig begrenzen. De totale magnetomotorische kracht der wikkeling moeten we ons hierbij gelijkmatig verdeeld denken over den afstand der begrenzingen $r' - r$; bijgevolg is binnen de wikkeling:

$$\frac{\delta \mathbf{M}}{\delta \varrho} = \frac{\mathbf{M}}{r' - r}$$

te stellen.

Uit de algemeene uitdrukking voor $\mathbf{N}_\varrho$ volgt thans:

voor den krachtstroom aan de binnenzijde der wikkeling:

$$\mathbf{N}_\varrho = \frac{l}{2D} \frac{\mathbf{M}}{r' - r} (a\,\varrho^p + b\,\varrho^{-p}) \int_r^{r'} (c\,\varrho^p + d\,\varrho^{-p})\, d\,\varrho$$

in het inwendige der wikkeling:

$$\mathbf{N}_\varrho = \frac{l}{2D}\,\frac{\mathbf{M}}{r'-r}\left\{(a\,\varrho^p + b\,\varrho^{-p})\int_\varrho^{r'}(c\,\varrho^p + d\,\varrho^{-p})\,d\,\varrho\right.$$

$$\left.+\,(c\,\varrho^p + d\,\varrho^{-p})\int_r^\varrho(a\,\varrho^p + b\,\varrho^{-p})\,d\,\varrho\right\}$$

aan de buitenzijde der wikkeling:

$$\mathbf{N}_\varrho = \frac{l}{2D}\,\frac{\mathbf{M}}{r'-r}(c\,\varrho^p + d\,\varrho^{-p})\int_r^{r'}(a\,\varrho^p + b\,\varrho^{-p})\,d\,\varrho\,.$$

Zoowel aan de binnenzijde als aan de buitenzijde der wikkeling verandert $\mathbf{N}_\varrho$ blijkbaar op dezelfde wijze als voor het geval de magnetomotorische kracht in een bepaald cylinder-oppervlak geconcentreerd is.

Denken we ons in fig 12 $\mathbf{N}_\varrho$ graphisch voorgesteld als functie van ϱ, zoo geldt voor $\varrho < r$ de stijgende kromme $a\,b$, waarvan de ordinaten evenredig zijn met $a\,\varrho^p + b\,\varrho^{-p}$, voor $\varrho > r'$ de dalende kromme $c\,d$, waarvan de ordinaten evenredig zijn met $c\,\varrho^p + d\,\varrho^{-p}$.

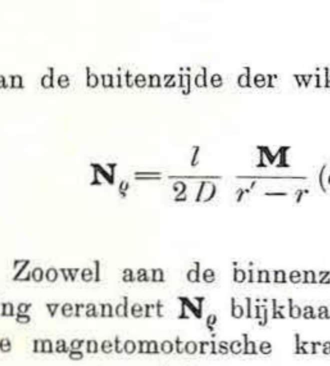


Fig. 12.

Voor waarden van ϱ, gelegen tusschen r en r' zal de verandering van $\mathbf{N}_\varrho$ worden voorgesteld door de kromme $b\,c$, welke, zooals we nader zullen aantoonen, in b raakt aan de kromme $a\,b$, in c aan de kromme $c\,d$.

Denken we ons de kromme $a\,b$ voortgezet voor waarden $> r$, de kromme $c\,d$ voor waarden $< r'$. zoo snijden zij elkaar in een punt e, dat den straal r'' bepaalt van het cylinder-oppervlak, waarin we ons de magnetomotorische kracht moeten aangebracht denken, welke zoowel aan de binnenzijde als aan de buitenzijde der wikkeling hetzelfde magnetisch veld doet optreden als de magnetomotorische kracht der wikkeling zelf.

De waarde van r'' is blijkbaar bepaald door:

$$(a\, r''^{p} + b\, r''^{-p}) \int_{r}^{r'} (c\, \varrho^{p} + d\, \varrho^{-p})\, d\,\varrho = (c\, r''^{p} + d\, r''^{-p}) \int_{r}^{r'} (a\, \varrho^{p} + b\, \varrho^{-p})\, d\,\varrho$$

De magnetomotorische kracht $\mathbf{M}'$ welke, werkende in dit vlak, zoowel aan de binnenzijde als aan de buitenzijde der wikkeling een veld oplevert, gelijk aan het veld der magnetomotorische kracht $\mathbf{M}$ der wikkeling, is dan bepaald door:

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M} \frac{\int_{r}^{r'} (a\, \varrho^{p} + b\, \varrho^{-p})\, d\,\varrho}{(r' - r)\,(a\, r''^{p} + b\, r''^{-p})} = \mathbf{M} \frac{\int_{r}^{r'} (c\, \varrho^{p} + d\, \varrho^{-p})\, d\,\varrho}{(r' - r)\,(c\, r''^{p} + d\, r''^{-p})}$$

Blijkbaar is in 't algemeen $\mathbf{M}'$ *niet* gelijk aan $\mathbf{M}$; m.a.w. we kunnen in 't algemeen niet de magnetomotorische kracht der wikkeling vervangen door eene *gelijke* magnetomotorische kracht, werkende in een oppervlak, welke zoowel aan de binnenzijde als aan de buitenzijde der wikkeling hetzelfde magnetisch veld oplevert.

In het inwendige der wikkeling zelf zal het veld steeds verschillen van het veld, veroorzaakt door een oppervlaksstrooming; dit ligt trouwens voor de hand, daar de discontinuïteit, welke noodzakelijk optreden moet in een stroom*vlak*, verdwijnt, zoodra we te doen hebben met eene strooming, verdeeld *over de ruimte.*

We merken thans vooreerst op, dat in het inwendige der wikkeling de krachtstroom overal kleiner is dan de voortzetting van een der beide krachtstroomen, welke aan de binnen- en buitenzijde der wikkeling optreden, dus:

$$(a\, \varrho^{p} + b\, \varrho^{-p}) \int_{\varrho}^{r'} (c\, \varrho^{p} + d\, \varrho^{-p})\, d\,\varrho + (c\, \varrho^{p} + d\, \varrho^{-p}) \int_{r}^{\varrho} (a\, \varrho^{p} + b\, \varrho^{-p})\, d\,\varrho$$

$$< (a\, \varrho^{p} + b\, \varrho^{-p}) \int_{r}^{r'} (c\, \varrho^{p} + d\, \varrho^{-p})\, d\,\varrho$$

en

$$< (c\, \varrho^{p} + d\, \varrho^{-p}) \int_{r}^{r'} (a\, \varrho^{p} + b\, \varrho^{-p})\, d\,\varrho .$$

Dat dit zoo is, blijkt onmiddellijk indien we opmerken dat, aangezien $a\varrho^p + b\varrho^{-p}$ aangroeit, daarentegen $c\varrho^p + d\varrho^{-p}$ afneemt met toenemende ϱ, de ongelijkheden bestaan:

$$(c\varrho^p + d\varrho^{-p})\int_r^{\varrho}(a\varrho^p + b\varrho^{-p})\,d\varrho < (a\varrho^p + b\varrho^{-p})\int_r^{\varrho}(c\varrho^p + d\varrho^{-p})\,d\varrho$$

en

$$(a\varrho^p + b\varrho^{-p})\int_{\varrho}^{r'}(c\varrho^p + d\varrho^{-p})\,d\varrho < (c\varrho^p + d\varrho^{-p})\int_{\varrho}^{r'}(a\varrho^p + b\varrho^{-p})\,d\varrho$$

waarvan de eerstgenoemde ongelijkheden het direct gevolg zijn.

Differentieeren we de uitdrukkingen voor $\mathbf{N}_{\varrho}$ naar ϱ zoo vinden we voor de binnenzijde der wikkeling:

$$\frac{\delta\mathbf{N}_{\varrho}}{\delta\varrho} = \frac{l}{2D}\,\frac{\mathbf{M}}{r'-r}\,\frac{p}{\varrho}\,(a\varrho^p - b\varrho^{-p})\int_r^{r'}(c\varrho^p + d\varrho^{-p})\,d\varrho$$

voor het inwendige der wikkeling:

$$\frac{\delta\mathbf{N}_{\varrho}}{\delta\varrho} = \frac{l}{2D}\,\frac{\mathbf{M}}{r'-r}\,\frac{p}{\varrho}\left\{(a\varrho^p - b\varrho^{-p})\int_{\varrho}^{r'}(c\varrho^p + d\varrho^{-p})\,d\varrho\right.$$
$$\left. + (c\varrho^p - d\varrho^{-p})\int_r^{\varrho}(a\varrho^p + b\varrho^{-p})\,d\varrho\right\}$$

voor de buitenzijde der wikkeling:

$$\frac{\delta\mathbf{N}_{\varrho}}{\delta\varrho} = \frac{l}{2D}\,\frac{\mathbf{M}}{r'-r}\,\frac{p}{\varrho}\,(c\varrho^p - d\varrho^{-p})\int_r^{r'}(a\varrho^p + b\varrho^{-p})\,d\varrho$$

Voor $\varrho = r$ worden de beide eerste uitdrukkingen, voor $\varrho = r'$ de beide laatste uitdrukkingen voor het differentiaalquotient aan elkaar gelijk, waaruit dus volgt dat inderdaad in de graphische voorstelling van fig. 12 de krommen $a\,b$, $b\,c$ en $c\,d$ vloeiend in elkaar overgaan.

Aangezien verder $a\varrho^p - b\varrho^{-p}$ overal *positief*, $c\varrho^p - d\varrho^{-p}$ overal *negatief* is, is $\frac{\delta \mathbf{N}_\varrho}{\delta \varrho}$ positief voor $\varrho = r$, negatief voor $\varrho = r'$, en dus noodzakelijk $= 0$ voor eenige waarde van ϱ tusschen r en r'; m. a. w. in het inwendige der wikkeling neemt de krachtstroom vanaf de binnenbegrenzing aanvankelijk toe, bereikt een maximum, en neemt daarna weer af naar de buitenbegrenzing. De verandering van den krachtstroom heeft dus inderdaad het verloop, in fig. 12 voorgesteld.

Indien we de magnetomotorische kracht der wikkeling, **M**, vervangen door een *gelijke* magnetomotorische kracht, werkende in een cylinder-oppervlak, zoo is het blijkbaar in het algemeen niet mogelijk de ligging van dit cylinder-oppervlak zoodanig aan te nemen, dat zoowel aan de binnenzijde als aan de buitenzijde der wikkeling het magnetisch veld geene verandering ondergaat.

Om aan de binnenzijde der wikkeling hetzelfde magnetisch veld te verkrijgen moet de straal r'' van het cylinder-oppervlak voldoen aan:

$$c\,r''^p + d\,r''^{-p} = \frac{1}{r' - r}\int_r^{r'} (c\varrho^p + d\varrho^{-p})\,d\varrho$$

daarentegen moet, om aan de buitenzijde der wikkeling hetzelfde magnetisch veld te verkrijgen, r'' voldoen aan:

$$a\,r''^p + b\,r''^{-p} = \frac{1}{r' - r}\int_r^{r'} (a\varrho^p + b\varrho^{-p})\,d\varrho$$

In het eerste geval is dus r'' de waarde van ϱ, waarvoor de gemiddelde waarde van $c\varrho^p + d\varrho^{-p}$ optreedt binnen het gebied tusschen $\varrho = r$ en $\varrho = r'$; in het tweede geval is r'' de waarde van ϱ, waarvoor de gemiddelde waarde optreedt van $a\varrho^p + b\varrho^{-p}$ binnen hetzelfde gebied.

Aangezien $c\varrho^p + d\varrho^{-p}$ continu afneemt, $a\varrho^p + b\varrho^{-p}$ continu toeneemt bij aangroeiing van ϱ, vinden we voor beide gevallen één waarde van r'', gelegen tusschen r en r', welke beide waarden van r'' in het algemeen *niet* aan elkaar gelijk zijn.

Indien wij ons nu van eene electrische machine de statorwikkeling begrensd denken door de cylinder-oppervlakken :

$$\varrho = r_1 \quad \text{en} \quad \varrho = r_1'$$

en we bepalen voor deze wikkeling den straal r_1'' uit :

$$c\, r_1''^{p} + d\, r_1''^{-p} = \frac{1}{r_1' - r_1} \int_{r_1}^{r_1'} (c\, \varrho^p + d\, \varrho^{-p})\, d\, \varrho$$

terwijl we voor de rotorwikkeling, begrensd door de cylinder-oppervlakken :

$$\varrho = r_2 \quad \text{en} \quad \varrho = r_2'$$

den straal r_2'' bepalen uit :

$$a\, r_2''^{p} + b\, r_2''^{-p} = \frac{1}{r_2' - r_2} \int_{r_2}^{r_2'} (a\, \varrho^p + b\, \varrho^{-p})\, d\, \varrho$$

zoo zal, indien wij ons de magnetomotorische kracht $\mathbf{M}_1$ der statorwikkeling geconcentreerd denken in het cylinder-oppervlak :

$$\varrho = r_1''$$

de magnetomotorische kracht $\mathbf{M}_2$ der rotorwikkeling in het cylinder-oppervlak :

$$\varrho = r_2''$$

het magnetisch veld *binnen het entrefer* hierdoor geene verandering ondergaan.

Aangezien zoowel het koppel als de energiestrooming in het entrefer door het magnetisch veld in het entrefer volkomen bepaald zijn, zal er door de bovenomschreven vervanging der wikkelingen door stroomvlakken *uit een mechanisch oogpunt* niets veranderd zijn in de werking der machine. Hetzelfde geldt echter niet voor de *electrische* verschijnselen, welke zich in de wikkelingen afspelen, daar binnen de wikkelingen zelf het magnetisch veld der stroomvlakken niet met het werkelijke magnetisch veld overeenstemt.

Nemen we echter in aanmerking, dat de ponderomotorische werking bepaald wordt door de *wederkeerige* inductie tusschen de beide wikkelingen, zoo mogen we reeds dadelijk de gevolgtrekking maken, dat de electrische verschijnselen slechts in zooverre zullen gewijzigd worden, als zij afhankelijk zijn van de beide lekvelden. Het onder den invloed der stroomvlakken optredende restveld zal daarentegen volkomen moeten overeenstemmen met het *werkelijke* restveld, en we zullen dus voor den restkrachtstroom eene uitdrukking moeten vinden van den vorm:

$$\mathbf{N} = \frac{l}{2\,D} (a\, r_2''^{p} + b\, r_2''^{-p}) \, (c\, r_1''^{p} + d\, r_1''^{-p}) \, (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2)$$

$$= \frac{l}{2\,D} \, \frac{\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2}{(r_1' - r_1)\,(r_2' - r_2)} \int_{r_2}^{r_2'} (a\, \varrho^{p} + b\, \varrho^{-p})\, d\,\varrho \int_{r_1}^{r_1'} (c\, \varrho^{p} + d\, \varrho^{-p})\, d\,\varrho$$

waarvan de juistheid nader blijken zal uit de volgende beschouwingen.

Bij de bepaling van de in eene wikkeling geinduceerde electromotorische krachten, zullen we voor ieder der draadlagen de verandering van den krachtstroom moeten vaststellen, welke optreedt in het cylinder-oppervlak, waarin de hartlijnen gelegen zijn der draden, waaruit de beschouwde laag is saamgesteld. Deze krachtstroom zal voor ieder der draadlagen eene andere waarde bezitten; daar evenwel iedere laag hetzelfde aantal draden bevat, en de overeenkomstige draden in de verschillende lagen steeds in serie geschakeld zijn, zullen we, in plaats van den werkelijken krachtstroom voor ieder der lagen afzonderlijk in rekening te brengen, de *gemiddelde* waarde van den krachtstroom mogen invoeren, en dus de zaak zóó voorstellen, alsof de hartlijnen van alle draden der wikkeling gelegen waren in een cylinder-oppervlak, waarin een krachtstroom optreedt, gelijk aan de gemiddelde waarde van den krachtstroom binnen de wikkelingsruimte.

We zullen thans deze „gemiddelde" krachtstroomen voor de beide wikkelingen eener electrische machine bepalen.

De totale krachtstroom, optredende in een cylinder-oppervlak, $\varrho = constant$, gelegen binnen de statorwikkeling is:

$$\mathbf{N}_\varrho = \frac{l}{2D}\frac{\mathbf{M}_1}{r_1'-r_1}\Big\{(a\varrho^p + b\varrho^{-p})\int_\varrho^{r_1'}(c\varrho^p + d\varrho^{-p})\,d\varrho$$

$$+ (c\varrho^p + d\varrho^{-p})\int_{r_1}^{\varrho}(a\varrho^p + b\varrho^{-p})\,d\varrho\Big\}$$

$$+ \frac{l}{2D}\frac{\mathbf{M}_2}{r_2'-r_2}(c\varrho^p + d\varrho^{-p})\int_{r_2}^{r_2'}(a\varrho^p + b\varrho^{-p})\,d\varrho$$

voor een cylinder-oppervlak, gelegen binnen de rotorwikkeling:

$$\mathbf{N}_\varrho = \frac{l}{2D}\frac{\mathbf{M}_1}{r_1'-r_1}(a\varrho^p + b\varrho^{-p})\int_{r_1}^{r_1'}(c\varrho^p + d\varrho^{-p})\,d\varrho$$

$$+ \frac{l}{2D}\frac{\mathbf{M}_2}{r_2'-r_2}\Big\{(a\varrho^p + b\varrho^{-p})\int_\varrho^{r_2'}(c\varrho^p + d\varrho^{-p})\,d\varrho$$

$$+ (c\varrho^p + d\varrho^{-p})\int_{r_2}^{\varrho}(a\varrho^p + b\varrho^{-p})\,d\varrho\Big\}.$$

Wij vinden bijgevolg voor den „gemiddelden" statorkrachtstroom:

$$\mathbf{N}_s = \frac{l}{2D}\frac{\mathbf{M}_1}{(r_1'-r_1)^2}\Big\{\int_{r_1}^{r_1'}(a\varrho^p + b\varrho^{-p})\,d\varrho\int_\varrho^{r_1'}(c\varrho^p + d\varrho^{-p})\,d\varrho$$

$$+\int_{r_1}^{r_1'}(c\varrho^p + d\varrho^{-p})\,d\varrho\int_{r_1}^{\varrho}(a\varrho^p + b\varrho^{-p})\,d\varrho\Big\}$$

$$+ \frac{l}{2D}\frac{\mathbf{M}_2}{(r_1'-r_1)\,(r_2'-r_2)}\int_{r_2}^{r_2'}(a\varrho^p + b\varrho^{-p})\,d\varrho\int_{r_1}^{r_1'}(c\varrho^p + d\varrho^{-p})\,d\varrho$$

Merken we op dat:

$$\int_{r_1}^{r_1'}(a\,\varrho^p+b\,\varrho^{-p})\,d\,\varrho\int_{\varrho}^{r_1'}(c\,\varrho^p+d\,\varrho^{-p})\,d\,\varrho=\int_{r_1}^{r_1'}(c\,\varrho^p+d\,\varrho^{-p})\,d\,\varrho\int_{r_1}^{\varrho}(a\,\varrho^p+b\,\varrho^{-p})\,d\,\varrho$$

en voeren we in:

$$\mathbf{M}=\mathbf{M}_1+\mathbf{M}_2$$

zoo gaat bovenstaande uitdrukking voor den gemiddelden statorkrachtstroom over in:

$$\mathbf{N}_s=\frac{l}{2\,D}\,\frac{\mathbf{M}}{(r_1'-r_1)\,(r_2'-r_2)}\int_{r_2}^{r_2'}(a\,\varrho^p+b\,\varrho^{-p})\,d\,\varrho\int_{r_1}^{r_1'}(c\,\varrho^p+d\,\varrho^{-p})\,d\,\varrho$$

$$+\frac{l}{2\,D}\,\frac{\mathbf{M}_1}{r_1'-r_1}\int_{r_1}^{r_1'}(c\,\varrho^p+d\,\varrho^{-p})\,d\,\varrho\left\{\frac{2}{r_1'-r_1}\int_{r_1}^{\varrho}(a\,\varrho^p+b\,\varrho^{-p})\,d\,\varrho\right.$$

$$\left.-\frac{1}{r_2'-r_2}\int_{r_2}^{r_2'}(a\,\varrho^p+b\,\varrho^{-p})\,d\,\varrho\right\}.$$

Evenzoo vinden we voor den gemiddelden rotorkrachtstroom:

$$\mathbf{N}_r=\frac{l}{2\,D}\,\frac{\mathbf{M}}{(r_1'-r_1)\,(r_2'-r_2)}\int_{r_2}^{r_2'}(a\,\varrho^p+b\,\varrho^{-p})\,d\,\varrho\int_{r_1}^{r_1'}(c\,\varrho^p+d\,\varrho^{-p})\,d\,\varrho$$

$$+\frac{l}{2\,D}\,\frac{\mathbf{M}_2}{r_2'-r_2}\int_{r_2}^{r_2'}(a\,\varrho^p+b\,\varrho^{-p})\,d\,\varrho\left\{\frac{2}{r_2'-r_2}\int_{\varrho}^{r_2'}(c\,\varrho^p+d\,\varrho^{-p})\,d\,\varrho\right.$$

$$\left.-\frac{1}{r_1'-r_1}\int_{r_1}^{r_1'}(c\,\varrho^p+d\,\varrho^{-p})\,d\,\varrho\right\}.$$

Hieruit volgt dus voor de waarde van den restkrachtstroom:

$$\mathbf{N}=\frac{l}{2\,D}\,\frac{\mathbf{M}}{(r_1'-r_1)\,(r_2'-r_2)}\int_{r_2}^{r_2'}(a\,\varrho^p+b\,\varrho^{-p})\,d\,\varrho\int_{r_1}^{r_1'}(c\,\varrho^p+d\,\varrho^{-p})\,d\,\varrho$$

terwijl wij voor de beide lekkrachtstroomen vinden:

$$\mathbf{N}_{l1} = \frac{l}{2D}\frac{\mathbf{M}_1}{r_1'-r_1}\int_{r_1}^{r_1'}(c\,\varrho^p + d\,\varrho^{-p})\,d\,\varrho\left\{\frac{2}{r_1'-r_1}\int_{r_1}^{\varrho}(a\,\varrho^p + b\,\varrho^{-p})\,d\,\varrho\right.$$

$$\left.-\frac{1}{r_2'-r_2}\int_{r_2}^{r_2'}(a\,\varrho^p + b\,\varrho^{-p})\,d\,\varrho\right\}$$

$$\mathbf{N}_{l2} = \frac{l}{2D}\frac{\mathbf{M}_2}{r_2'-r_2}\int_{r_2}^{r_2'}(a\,\varrho^p + b\,\varrho^{-p})\,d\,\varrho\left\{\frac{2}{r_2'-r_2}\int_{\varrho}^{r_2'}(c\,\varrho^p + d\,\varrho^{-p})\,d\,\varrho\right.$$

$$\left.-\frac{1}{r_1'-r_1}\int_{r_1}^{r_1'}(c\,\varrho^p + d\,\varrho^{-p})\,d\,\varrho\right\}$$

De restkrachtstroom blijkt dus inderdaad identisch met den restkrachtstroom, welke zou optreden indien de magnetomotorische krachten $\mathbf{M}_1$ en $\mathbf{M}_2$ werkten in de stroomvlakken

$$\varrho = r_1'' \quad \text{en} \quad \varrho = r_2''$$

Stellen we ons, wat betreft de lekkrachtstroomen, met *benaderde* waarden tevreden, zoo kunnen we deze verkrijgen door op te merken dat de relatieve verandering van den krachtstroom, veroorzaakt door de stroomverdeeling in één der wikkelingen, binnen deze wikkeling zelf slechts gering is in vergelijking met de relatieve verandering der grootheden $a\,\varrho^p + b\,\varrho^{-p}$ en $c\,\varrho^p + d\,\varrho^{-p}$ binnen deze wikkeling.

Waar nu bij een goed gedimensionneerde machine deze beide laatste grootheden over het gebied der beide wikkelingen slechts eene relatief geringe verandering ondergaan, volgt uit het voorgaande dat binnen ieder der wikkelingen de krachtstroom, welke afkomstig is van die wikkeling zelf, slechts uiterst weinig zal veranderen, en dat we dus als benaderde gemiddelde waarde van dezen krachtstroom zijne waarde in een der beide grensvlakken zullen mogen aannemen.

We mogen dus voor de uitdrukkingen:

$$\frac{2}{r_1'-r_1}\int_{r_1}^{r_1'}(c\,\varrho^p + d\,\varrho^{-p})\,d\,\varrho\int_{r_1}^{\varrho}(a\,\varrho^p + b\,\varrho^{-p})\,d\,\varrho$$

en

$$\frac{2}{r_2'-r_2}\int_{r_2}^{r_2'}(a\,\varrho^p + b\,\varrho^{-p})\,d\,\varrho\int_{\varrho}^{r_2'}(c\,\varrho^p + d\,\varrho^{-p})\,d\,\varrho$$

de volgende *benaderde* waarden invoeren:

$$(a\,r_1^p + b\,r_1^{-p})\int_{r_1}^{r_1'}(c\,\varrho^p + d\,\varrho^{-p})\,d\,\varrho$$

en

$$(c\,r_2'^p + d\,r_2'^{-p})\int_{r_2}^{r_2'}(a\,\varrho^p + b\,\varrho^{-p})\,d\,\varrho$$

waardoor de uitdrukkingen voor de lekkrachtstroomen overgaan in:

$$\mathbf{N}_{l1} = \frac{l}{2D}\,\frac{\mathbf{M}_1}{r_1'-r_1}\int_{r_1}^{r_1'}(c\,\varrho^p + d\,\varrho^{-p})\,d\,\varrho\,\Big\{\,a\,r_1^p + b\,r_1^{-p} - \frac{1}{r_2'-r_2}\int_{r_2}^{r_2'}(a\,\varrho^p + b\,\varrho^{-p})\,d\,\varrho\Big\}$$

$$\mathbf{N}_{l2} = \frac{l}{2D}\,\frac{\mathbf{M}_2}{r_2'-r_2}\int_{r_2}^{r_2'}(a\,\varrho^p + b\,\varrho^{-p})\,d\,\varrho\,\Big\{\,c\,r_2'^p + d\,r_2'^{-p} - \frac{1}{r_1'-r_1}\int_{r_1}^{r_1'}(c\,\varrho^p + d\,\varrho^{-p})\,d\,\varrho\Big\}$$

Bij invoering van r_1'' en r_2'' gaan de uitdrukkingen voor $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}_{l1}$ en $\mathbf{N}_{l2}$ over in:

$$\mathbf{N} = \frac{(a\,r_2''^{p} + b\,r_2''^{-p})\,(c\,r_1''^{p} + d\,r_1''^{-p})\,l}{2\,D}\,\mathbf{M}$$

$$\mathbf{N}_{l1} = \frac{\{(a\,r_1^{p} + b\,r_1^{-p}) - (a\,r_2''^{p} + b\,r_2''^{-p})\}\,(c\,r_1''^{p} + d\,r_1''^{-p})\,l}{2\,D}\,\mathbf{M}_1$$

$$\mathbf{N}_{l2} = \frac{(a\,r_2''^{p} + b\,r_2''^{-p})\,\{(c\,r_2'^{p} + d\,r_2'^{-p}) - (c\,r_1''^{p} + d\,r_1''^{-p})\}\,l}{2\,D}\,\mathbf{M}_2$$

Hieruit volgt voor de reluctantie van het restveld de waarde:

$$R = \frac{2\,D}{(a\,r_2''^{p} + b\,r_2''^{-p})\,(c\,r_1''^{p} + d\,r_1''^{-p})\,l}$$

voor de reluctanties der lekvelden de benaderde waarden:

$$R_1 = \frac{2\,D}{\{(a\,r_1^{p} + b\,r_1^{-p}) - (a\,r_2''^{p} + b\,r_2''^{-p})\}\,(c\,r_1''^{p} + d\,r_1''^{-p})\,l}$$

$$R_2 = \frac{2\,D}{(a\,r_2''^{p} + b\,r_2''^{-p})\,\{(c\,r_2'^{p} + d\,r_2'^{-p}) - (c\,r_1''^{p} + d\,r_1''^{-p})\}\,l}$$

Voor de verhoudingen der reluctanties van de lekvelden tot de reluctantie van het restveld vinden we bijgevolg:

$$\frac{R_1}{R} = \frac{a\,r_2''^{p} + b\,r_2''^{-p}}{(a\,r_1^{p} + b\,r_1^{-p}) - (a\,r_2''^{p} + b\,r_2''^{-p})}$$

$$\frac{R_2}{R} = \frac{c\,r_1''^{p} + d\,r_1''^{-p}}{(c\,r_2'^{p} + d\,r_2'^{-p}) - (c\,r_1''^{p} + d\,r_1''^{-p})}$$

Terwijl we voor de bepaling van het restveld de magnetomotorische krachten $\mathbf{M}_1$ en $\mathbf{M}_2$ mogen aannemen als werkende in de cylinder oppervlakken $\varrho = r_1''$ en $\varrho = r_2''$, moeten we ons dus, om de verhoudingen te bepalen van de reluctanties der lekvelden tot de reluctantie van het restveld, het statorstroomvlak verplaatst denken naar de binnenbegrenzing der statorwikkeling, respectievelijk het rotorstroomvlak naar de buitenbegrenzing der rotorwikkeling.

Wat betreft de stralen r_1'' en r_2'' kunnen we nog het volgende opmerken.

We bepaalden deze grootheden met behulp der betrekkingen :

$$c\, r_1''^{p} + d\, r_1''^{-p} = \frac{1}{r_1' - r_1} \int_{r_1}^{r_1'} (c\, \varrho^p + d\, \varrho^{-p})\, d\varrho$$

en

$$a\, r_2''^{p} + b\, r_2''^{-p} = \frac{1}{r_2' - r_2} \int_{r_2}^{r_2'} (a\, \varrho^p + b\, \varrho^{-p})\, d\varrho$$

Zooals gemakkelijk valt in te zien, zal r_1'' slechts weinig verschillen van den gemiddelden straal der statorwikkeling $\frac{r_1' + r_1}{2}$, r_2'' slechts weinig van den gemiddelden straal der rotorwikkeling $\frac{r_2' + r_2}{2}$.

Daar bovendien $a\, \varrho^p + b\, \varrho^{-p}$ en $c\, \varrho^p + d\, \varrho^{-p}$ binnen het gebied der wikkelingen slechts eene relatief geringe verandering ondergaan, zal het voor de waarden van :

$$a\, r_2''^{p} + b\, r_2''^{-p} \quad \text{en} \quad c\, r_1''^{p} + d\, r_1''^{-p}$$

slechts een uiterst onbeduidend verschil uitmaken of voor r_1'' en r_2'' hunne werkelijke waarden dan wel de gemiddelde stralen der wikkelingen in rekening gebracht worden.

We kunnen dus het restveld *met groote benadering* vaststellen door de magnetomotorische krachten der beide wikkelingen geconcentreerd aan te nemen in cylindrische stroomvlakken, wier stralen gelijk zijn aan de gemiddelde stralen der wikkelingen.

HOOFDSTUK X.

Ontbinding der stroomverdeeling in de wikkelingen eener wisselstroom-machine in roteerende sinusoidale stroomverdeelingen.

Van de wikkelingen eener wisselstroom-machine kunnen we ons de volgende algemeene voorstelling maken:

We denken ons een wikkeling begrensd door twee co-axiale cylinder-oppervlakken, en door een aantal vlakken, in fig. 13 voorgesteld door OA, OB enz., gaande door de as der cylinder-oppervlakken, verdeeld in n gelijke afdeelingen, welke zich dus ieder over een hoek $\varkappa = \frac{2\pi}{n}$ uitstrekken, en die hierdoor gekenmerkt zijn, *dat in alle draden eener zelfde afdeeling steeds op ieder oogenblik dezelfde stroomsterkte optreedt.*

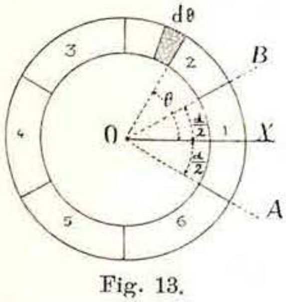


Fig. 13.

We nemen bovendien aan, dat alle afdeelingen een gelijk aantal draden bevatten, en dat in iedere afdeeling de draden op dezelfde wijze, en symmetrisch ten opzichte van het midden der afdeeling verdeeld zijn.

We duiden, bij omgang der wikkeling naar links, de opvolgende afdeelingen aan als de 1^e, 2^e enz. n^e afdeeling, en we meten den hoek θ van af het midden der 1^e afdeeling, waardoor we ons dus het coördinaten-vlak OX gelegd denken.

De stroomsterkten, welke op een bepaald oogenblik optreden in de draden der opvolgende wikkelings-afdeelingen, zullen we aanduiden door:

$$i_1, \; i_2 \quad \text{enz.} \; i_n$$

We zullen thans vooreerst de werkelijke strooming *in de draden* vervangen door eene meer regelmatig verdeelde strooming over de wikkelingsruimte; m. a. w. we zullen eene functie $\varkappa$ invoeren, welke zoodanig is, dat we de werkelijke strooming kunnen vervangen door eene strooming, welke binnen een element $d\theta$ van eene wikkelings-afdeeling, waarin de stroomsterkte i heerscht, kan worden voorgesteld door:

$$\varkappa \, i \, d\theta = S \, d\theta$$

Is $\mathfrak{N}$ het aantal draden der wikkeling zoo voldoet deze functie $\varkappa$ blijkbaar aan de conditie:

$$\int_0^{2\pi} \varkappa \, d\theta = \mathfrak{N}$$

Hebben we te doen met eene gelijkmatig verspreide wikkeling, zoo is $\varkappa$ blijkbaar een constante, die gelijk is aan het aantal draden per hoekeenheid, dus:

$$\varkappa = \frac{\mathfrak{N}}{2\pi}$$

Bij groefwikkelingen daarentegen zal binnen de groeven $\varkappa$ eene constante waarde bezitten:

$$\varkappa = \frac{\mathfrak{N}}{2\pi\varepsilon}$$

waarin ε de verhouding is van groefbreedte tot groefsteek, terwijl binnen de tanden aan $\varkappa$ de waarde 0 zal moeten worden toegekend.

Om de zaak zoo algemeen mogelijk op te vatten, beschouwen we $\varkappa$ eenvoudig als een functie van θ, welke binnen iedere wikkelings-afdeeling dezelfde waardenreeks doorloopt, en symmetrisch is ten opzichte van de middens der afdeelingen. Zoodra we te doen hebben met een bepaalden vorm der wikkeling, is de functie $\varkappa$ eveneens volkomen bepaald.

De grootheid
$$S = \varkappa i$$
is blijkbaar eveneens een functie van θ, eerstens door hare afhankelijkheid van $\varkappa$, tweedens door hare afhankelijkheid van de stroomsterkte i, welke telkens bij overgang op eene andere wikkelings-afdeeling eene sprongsgewijze verandering ondergaat.

We stellen ons nu voor de functie S te splitsen in een aantal vloeiend verloopende functies van θ, en wel door S te ontwikkelen in een Fourier'sche reeks:

$$S = \frac{Y_0}{2} + X_1 \sin\theta + Y_1 \cos\theta + X_2 \sin 2\theta + Y_2 \cos 2\theta + \text{ enz.}$$

$$= \frac{Y_0}{2} + \sum_{u=1}^{u=\infty} (X_u \sin u\theta + Y_u \cos u\theta)$$

waarin de coëfficienten X en Y bepaald zijn door:

$$X_u = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S \sin u\,\theta \; d\,\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varkappa\, i \sin u\,\theta \; d\,\theta$$

en

$$Y_u = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S \cos u\,\theta \; d\,\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \varkappa\, i \cos u\,\theta \; d\,\theta$$

Ieder der beide bovenstaande integralen splitst zich in n andere, betrekking hebbende op de n afdeelingen der wikkeling.

Merken we op dat $\varkappa$ bij verandering van θ over de opvolgende hoeken α, ingenomen door de verschillende afdeelingen der wikkeling, telkens dezelfde waardenreeks doorloopt, zoo kunnen we het aandeel der s^e wikkelings-afdeeling in de integraal:

$$\int_0^{2\pi} \varkappa\, i \sin u\,\theta \; d\,\theta$$

als volgt herleiden:

$$i_s \int_{(s-1)\,\alpha - \frac{\alpha}{2}}^{(s-1)\,\alpha + \frac{\alpha}{2}} \varkappa \sin u\,\theta \; d\,\theta = i_s \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \varkappa \sin u \left\{ \theta + (s-1)\,\alpha \right\} d\,\theta$$

We houden rekening met de symmetrie der functie $\varkappa$ ten opzichte van de middens der wikkelings-afdeelingen door de betrekking in te voeren:

$$\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \varkappa \sin u\,\theta \; d\,\theta = 0$$

waardoor:

$$i_s \int_{(s-1)\,\alpha \;\; \frac{\alpha}{2}}^{(s-1)\,\alpha + \frac{\alpha}{2}} \varkappa \sin u\,\theta \; d\,\theta = i_s \sin (s-1)\, u\,\alpha \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \varkappa \cos u\,\theta \; d\,\theta .$$

We vinden op deze wijze:

$$X^u = \frac{1}{\pi} \sum_{s=1}^{s=n} i_s \sin (s-1)\, u\,\alpha \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \varkappa \cos u\,\theta \; d\,\theta$$

en evenzoo:

$$Y_u = \frac{1}{\pi} \sum_{s=1}^{s=n} i_s \cos (s-1) u \alpha \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \varkappa \cos u \theta \, d \theta$$

Duiden we den algemeenen (u^{en}) term in de ontwikkeling der functie S in een Fourier'sche reeks aan door:

$$S_u = X_u \sin u \theta + Y_u \cos u \theta$$

zoo vinden we bijgevolg:

$$S_u = \frac{1}{\pi} \sum_{s=1}^{s=n} i_s \cos u \left\{ \theta - (s-1) \alpha \right\} \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \varkappa \cos u \theta \, d \theta$$

Hiermede is de splitsing der stroomverdeeling in sinusoidale componenten uitgevoerd.

De invloed van den vorm der wikkeling wordt blijkbaar uitgedrukt door de evenredigheid der u^{e} sinusoidale componente met de integraal:

$$\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \varkappa \cos u \theta \, d \theta$$

welke voor een gegeven wikkelingsvorm onmiddellijk bepaald kan worden.

Om den invloed van de verdeeling der stroomen over de verschillende afdeelingen der wikkeling na te gaan hebben we de sommatie uit te voeren:

$$\sum_{s=1}^{s=n} i_s \cos u \left\{ \theta - (s-1) \alpha \right\}$$

waarmee we ons thans zullen bezighouden.

We nemen aan, dat in de verschillende afdeelingen wisselstroomen optreden van gelijke sterkte en golfvorm, en dat in iedere volgende afdeeling de stroom in phase een hoek $p \alpha$ achterblijft bij den stroom in de voorgaande afdeeling.

Aangezien $n p \alpha = 2 \pi p$ een veelvoud moet zijn van 2π, stelt p een geheel getal voor.

De conditie, geldende voor het geval, dat aan eene $2p$-polige wikkeling f-phasige wisselstroom wordt toegevoerd:

$$p = \frac{n}{2f}$$

laten we *voorloopig* buiten beschouwing.

Duiden we de effectieve waarden der harmonische componenten van den wisselstroom aan door:

$$I_1 \quad I_2 \quad \text{enz.} \quad I_q$$

zoo kunnen we voor den stroom i_1 in de eerste wikkelingsafdeeling eene uitdrukking opstellen van den vorm:

$$i_1 = I_1 \sqrt{2} \cos(\omega t - 0_1) + I_2 \sqrt{2} \cos 2(\omega t - 0_2) + \text{ enz.}$$

waarbij we dus voorloopig afzien van het feit, dat bij de practisch gebruikelijke wisselstroomen de componenten *van even orde* ontbreken.

De uitdrukkingen voor de oogenblikkelijke waarden ten tijde t der stroomen in de opvolgende afdeelingen zijn dan:

$$i_1 = \sum_{q=1}^{q=\infty} I_q \sqrt{2} \cos q \{ \omega t - 0_q \}$$

$$i_2 = \sum_{q=1}^{q=\infty} I_q \sqrt{2} \cos q \{ \omega t - 0_q - p\alpha \}$$

enz.

$$i_s = \sum_{q=1}^{q=\infty} I_q \sqrt{2} \cos q \{ \omega t - 0_q - (s-1) p \alpha \}$$

We hebben dus te bepalen:

$$\sum_{s=1}^{s=n} i_s \cos u \{ \theta - (s-1) \alpha \}$$

$$= \sum_{q=1}^{q=\infty} I_q \sqrt{2} \sum_{s=1}^{s=n} \cos q \{ \omega t - 0_q - (s-1) p \alpha \} \cos u \{ \theta - (s-1) \alpha \}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{2} \sum_{q=1}^{q=\infty} I_q \sum_{s=1}^{s=n} \cos \{ q(\omega t - 0_q) - u\theta - (s-1)(pq - u)\alpha \}$$

$$+ \frac{1}{2} \sqrt{2} \sum_{q=1}^{q=\infty} I_q \sum_{s=1}^{s=n} \cos \{ q(\omega t - 0_q) + u\theta - (s-1)(pq + u)\alpha \}$$

Na invoering van bovenstaande uitdrukking, splitst zich S_u in 2 termen, waarvan de eerste gelijk is aan:

$$\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \alpha \cos u\theta \, d\theta \sum_{q=1}^{q=\infty} I_q \sum_{s=1}^{s=n} \cos\left\{ q(\omega t - \theta_q) - u\theta - (s-1)(pq-u)\alpha \right\}$$

terwijl de tweede verkregen wordt door in deze uitdrukking u te vervangen door $-u$.

Voor $u=0$ worden beide termen aan elkaar gelijk, en dus ieder voor zich gelijk aan den eersten term $\frac{1}{2}Y_0$ der Fourier-sche reeks, waarin we S ontwikkeld hebben.

Beschouwen we dus u niet meer als rangcijfer der termen van een Fourier'sche reeks, doch eenvoudig als een cijfer, dat alle geheele waarden doorloopt van $-\infty$ tot $+\infty$, zoo vinden we:

$$S = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\sum_{u=-\infty}^{u=+\infty}\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \alpha \cos u\theta \, d\theta \sum_{q=1}^{q=\infty} I_q \sum_{s=1}^{s=n} \cos\left\{ q(\omega t - \theta_q) - u\theta - (s-1)(pq-u)\alpha \right\}$$

Omtrent de in deze uitdrukking optredende som naar s valt op te merken, dat deze zich uitstrekt over de cosinussen van n hoeken, waarvan twee opvolgende telkens $(pq-u)\alpha$ verschillen. Nemen we nu in aanmerking dat:

$$n(pq-u)\alpha = (pq-u)\,2\pi$$

is, en dus, daar p, q en u geheele getallen zijn, deze waarde òf $=0$, òf een veelvoud van 2π is, zoo blijkt dat in het algemeen deze sommatie naar s de waarde 0 oplevert.

Slechts voor het geval dat:

$$(pq-u)\alpha = \frac{pq-u}{n}\,2\pi$$

zelf hetzij $=0$, hetzij een veelvoud van 2π is, worden alle cosinussen onder het Σ-teeken aan elkaar gelijk, en wordt hunne som bijgevolg:

$$n\cos\left\{ q(\omega t - \theta_q) - u\theta \right\}.$$

De conditie, waaraan hierbij voldaan moet zijn, is blijkbaar dat $\frac{p\,q - u}{n}$, en dus ook $\frac{u - p\,q}{n}$, òf $= 0$, òf een geheel positief of negatief getal is. Duiden we dit getal aan door x, zoo gaat deze conditie over in:

$$u = p\,q + x\,n\,.$$

De termen, waaruit de ontwikkeling van S is samengesteld, zijn dus ten slotte òf $= 0$, òf, mits u aan de bovenstaande betrekking voldoet, van den vorm:

$$S_{uq} = \frac{n\,I_q\sqrt{2}}{2\,\pi}\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \varkappa \cos u\,\theta\,d\,\theta\,.\cos\left\{q\,(\omega\,t - \theta_q) - u\,\theta\right\}$$

welke bij invoering der wikkelingsconstanten:

$$\mathrm{K}_u = \frac{2\,n}{\pi\,\mathfrak{N}}\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \varkappa \cos u\,\theta\,d\,\theta \quad {}^{*})$$

overgaat in:

$$S_{uq} = \frac{1}{4}\,\mathrm{K}_u\,\mathfrak{N}\,I_q\sqrt{2}\cos\left\{q\,(\omega\,t - \theta_q) - u\,\theta\right\}$$

Blijkbaar stelt deze uitdrukking, alnaarmate u positief of negatief is, eene $\pm\,2\,u$-polige sinusoidale stroomverdeeling voor, roteerende met de hoeksnelheid $\frac{q\,\omega}{u}$.

Stellen we ons thans voor de magnetomotorische kracht, opgeleverd door deze stroomverdeeling in grootte en stand te bepalen.

De componente M_1 dezer magnetomotorische kracht naar eene

---

*) De definitie der wikkelingsconstanten K_u is zoodanig *gekozen*, dat zij voor $u = p$, dus, zooals nader blijken zal, voor het hoofdveld eener electrische machine, identisch zijn met de door B l o n d e l ingevoerde „Coëfficients d'utilisation des ampère-tours", door hem eveneens aangeduid met de letter K. („Beaucoup d'auteurs négligent à tort ces coëfficients qui sont cependant indispensables". A. B l o n d e l. *L'Éclairage Électrique* 28 Nov. 1903).

richting θ_1 is bepaald door:

$$M_1 = 4\,\pi \int_{\theta_1}^{\theta_1 + \frac{\pi}{u}} S_{uq}\, d\,\theta$$

$$= \frac{\pi\, \mathrm{K}_u\, \mathfrak{N}\, I_q \sqrt{2}}{u} \int_{u\,\theta_1}^{u\,\theta_1 + \pi} \cos \left\{ q\,(\omega\, t - \theta_q) - u\,\theta \right\} d\,u\,\theta$$

$$= \frac{2\,\pi\, \mathrm{K}_u\, \mathfrak{N}\, I_q \sqrt{2}}{u} \sin \left\{ q\,(\omega\, t - \theta_q) - u\,\theta_1 \right\}$$

Alnaarmate we te doen hebben met eene positieve of negatieve waarde van u, bereikt de componente M_1 hare maximale waarde:

$$\pm \frac{2\,\pi\, \mathrm{K}_u\, \mathfrak{N}\, I_q \sqrt{2}}{u}$$

indien de richting θ_1 zoodanig gekozen wordt dat voldaan is aan:

$$\sin \left\{ q\,(\omega\, t - \theta_q) - u\,\theta_1 \right\} = \pm 1$$

of

$$q\,(\omega\, t - \theta_q) - u\,\theta_1 = \pm \frac{\pi}{2}$$

Indien we dus de magnetomotorische kracht, opgeleverd door de stroomverdeeling S_{uq}, voorstellen door eenen vector $\mathbf{M}_{uq}$ zoo zullen we aan dezen vector eene richting moeten toekennen, overeenkomende met een der beide richtingen, welke door bovenstaande betrekking bepaald zijn. Kiezen we hiervoor de richting, overeenkomende met het + teeken, zoo zullen we eveneens aan de uitdrukking voor de scalaire waarde M_{uq} der magnetomotorische kracht het + teeken moeten toekennen, zoodat dus, onafhankelijk van het teeken van u, de betrekking geldt:

$$M_{uq} = \frac{2\,\pi\, \mathrm{K}_u\, \mathfrak{N}\, I_q \sqrt{2}}{u}$$

Denken we ons thans een eenheidsvector $\mathbf{m}_{uq}$, welke eene eenparige rotatiebeweging uitvoert, overeenkomende met die, welke wordt voorgesteld door de vergelijking:

$$u\,\theta = q\,(\omega\, t - \theta_q) - \frac{\pi}{2}$$

zoo kunnen we de magnetomotorische kracht der stroomverdeelingscomponente S_{uq} voorstellen door den roteerenden vector:

$$\mathbf{M}_{uq} = \mathfrak{m}_{uq} \frac{2 \pi K_u \mathfrak{N} I_q \sqrt{2}}{u}$$

Aangezien met iedere waarde van q een oneindig aantal zoowel positieve als negatieve waarden van u overeenkomen, levert iedere harmonische componente I_q van den wisselstroom *een oneindig aantal zoowel links als rechts roteerende magnetomotorische krachten op.*

Uit de uitdrukking voor de rotatiesnelheid:

$$w = \frac{q \omega}{u}$$

volgt, dat deze voor de magnetomotorische krachten, opgeleverd *door eene bepaalde harmonische componente der stroomsterkte*, omgekeerd evenredig is met het aantal poolparen, dat gelijk is aan de absolute waarde van u. Het product van rotatiesnelheid en aantal poolparen wijst bijgevolg onmiddellijk de harmonische componente aan, waarbij eene bepaalde reeks magnetomotorische krachten behoort.

Voor roteerende wikkelingen, waarvan de verdeeling in afdeelingen *in de wikkeling zelf* tot stand gebracht is, zooals het geval is bij sleepring- en bij kortsluitankers, is hierbij natuurlijk in aanmerking te nemen, dat w de relatieve hoeksnelheid der magnetomotorische krachten ten opzichte der wikkeling voorstelt.

Gaan we thans na welke magnetomotorische krachten bij de practisch gebruikelijke wikkelingen zullen optreden.

Indien we te doen hebben met eene $2p$-polige f-phasige wikkeling, zoo is het aantal wikkelings-afdeelingen bepaald door:

$$n = 2 p f$$

In het algemeen zal u eene reeks waarden kunnen aannemen, bepaald door:

$$u = p q + x n$$

welke betrekking na invoering der bovenstaande waarde van n overgaat in:

$$u = p (q + 2 x f)$$

Nemen we thans nog in aanmerking, dat bij de practisch gebruikelijke wisselstroomen slechts harmonischen van oneven orde optreden, zoo blijkt dat $q + 2xf$ steeds een oneven getal voorstelt, en dat dus slechts magnetomotorische krachten zullen optreden, waarvan het aantal poolparen $\pm u$ gelijk is aan een *oneven* aantal malen het aantal poolparen p der wikkeling. *)

Hieruit volgt in de eerste plaats dat bij de practisch gebruikelijke wikkelingen de waarde $u = 0$ niet kan optreden.

Met deze waarde $u = 0$ zou overeenkomen een van θ onafhankelijke, en dus *eenparig over de wikkelingsruimte verdeelde* electrische strooming, welke zou aanleiding geven tot het optreden van een „logarithmisch" magnetisch veld, bestaande uit *cirkelvormige* krachtlijnen, wier middelpunten gelegen zijn op de as der wikkeling. In de hoofdstukken III en IV hebben wij aangetoond dat een dergelijk logarithmisch veld geene bijdrage kan leveren tot de energie-verplaatsing in het entrefer en tot het krachtskoppel eener electrische machine; thans blijkt bovendien, dat bij de practisch gebruikelijke machines dit logarithmische veld niet kan optreden.

De met eene bepaalde waarde van q overeenkomende waarden van u vormen eene rekenkundige reeks, waarvan een der termen gelijk is aan pq en het verschil gelijk is aan $2pf$. Hieruit volgt, dat een aantal waarden van q, welke eene rekenkundige reeks vormen met het verschil $2f$, dezelfde waardenreeks van u opleveren. Indien we dus onder a verstaan een *oneven positief getal,* dat we kleiner onderstellen dan f, zoo leveren de harmonische componenten, bepaald door:

$$q = \quad a \qquad a + 2f \qquad a + 4f \quad \text{enz.}$$

*) Hierbij is vooropgesteld, dat de stroom in de wikkeling *periodiek* verandert. We zullen in een volgend hoofdstuk aantoonen, dat aan deze voorwaarde in het algemeen *niet* voldaan is bij de stroomen, optredende in de wikkelingen van motoren met kortsluit- of sleepringanker. Is bij een dergelijken motor de stator f_1-phasig, de rotor f_2-phasig gewikkeld, zoo vinden we voor de q^e harmonische der spanning de volgende uitdrukking voor u:

$$u = p\,(q + 2xf_1 + 2yf_2)$$

waarin x en y geheele getallen voorstellen, en waaruit dus weer, aangezien q steeds oneven is, volgt dat u gelijk is aan een oneven aantal malen p.

alle dezelfde waardenreeks voor u op, nl.:

$$u = \quad pa \quad p(a+2f) \quad p(a+4f) \quad \text{enz.}$$
$$p(a-2f) \quad p(a-4f) \quad \text{enz.}$$

van welke reeks we de termen als volgt rangschikken:

$$u = pa \quad p(a-2f) \quad p(a+2f) \quad p(a-4f) \quad p(a+4f) \quad \text{enz.}$$

waarvan de eerste term positief is, terwijl de volgende afwisselend negatief en positief zijn.

Indien twee waarden van u, welke behooren tot twee verschillende reeksen, gelijk en tegengesteld zijn, zoo is *iedere* term der eene reeks gelijk en tegengesteld aan een term der andere reeks.

Merken we nu op, dat een der waarden van u, overeenkomende met $q = 2f - a$, gelijk is aan $p(2f - a)$, dus gelijk en tegengesteld met den term $p(a - 2f)$ der boven opgestelde waardenreeks van u, zoo volgt hieruit, dat de harmonische componenten, bepaald door:

$$q = \quad 2f - a \qquad 4f - a \qquad 6f - a \qquad \text{enz.}$$

deze zelfde waardenreeks van u opleveren, doch *met omgekeerde teekens.*

Voor het geval dat f oneven is, hebben we het bijzondere geval te beschouwen: $a = f$, waarvoor de beide boven behandelde reeksen voor q overgaan in:

$$q = \quad f \qquad 3f \qquad 5f \qquad \text{enz.}$$

waarbij dan de volgende waardenreeks voor u geldt:

$$u = \quad \pm pf \qquad \pm 3pf \qquad \pm 5pf \qquad \text{enz.}$$

We hebben dus te doen met *twee aan twee gelijk en tegengestelde waarden van u*; m. a. w. ieder der hier beschouwde harmonische componenten der stroomsterkte levert eene reeks rechtsdraaiende en eene reeks linksdraaiende magnetomotorische krachten op, welke beide reeksen, *afgezien van het verschil in draaiingsrichting volkomen identisch zijn.*

In het geval van een *eenphasen*-systeem omvat de bovenstaande reeks *alle mogelijke* waarden van q, en leveren dus *alle* harmonische componenten der stroomsterkte eene reeks magnetomotorische krachten op, welke behoudens hun verschil in draaiingsrichting twee aan twee gelijk zijn. Slechts in deze eigenschap ligt het karakteristieke verschil tusschen één- en meerphasige systemen.

Passen we thans de boven verkregen uitkomsten toe op de practisch gebruikelijke stroomsystemen.

Bij een *eenphasen-systeem* zullen blijkbaar, onafhankelijk van q, steeds de volgende waarden van u optreden:

$$u = \pm p \qquad \pm 3p \qquad \pm 5p \qquad \text{enz.}$$

De reeksen magnetomotorische krachten, opgeleverd door de verschillende harmonische componenten, verschillen dus *niet* wat betreft hun aantal poolparen. Aangezien nu de waarde eener bepaalde componente der magnetomotorische kracht slechts afhangt van u en van I_q zullen de overeenkomstige magnetomotorische krachten in deze reeksen zich verhouden als de waarden der harmonische componenten, waarvan zij afkomstig zijn.

De rotatiesnelheden der verschillende reeksen magnetomotorische krachten zijn blijkbaar:

voor de eerste harmonische componente der stroomsterkte:

$$w = \pm \frac{\omega}{p} \qquad \pm \frac{\omega}{3p} \qquad \pm \frac{\omega}{5p} \quad \text{enz.}$$

voor de derde harmonische componente:

$$w = \pm 3\frac{\omega}{p} \qquad \pm 3\frac{\omega}{3p} \qquad \pm 3\frac{\omega}{5p} \quad \text{enz.}$$

enz.

voor de q^e harmonische componente:

$$w = \pm q\frac{\omega}{p} \qquad \pm q\frac{\omega}{3p} \qquad \pm q\frac{\omega}{5p} \quad \text{enz.}$$

Bij een *tweephasen-systeem* zullen de verschillende harmonische componenten der stroomsterkte de volgende waardenreeksen van u opleveren:

voor de 1^e, 5^e, 9^e enz. componente is:

$$u = p \qquad -3p \qquad 5p \qquad -7p \quad \text{enz.}$$

voor de 3^e, 7^e enz. componente is daarentegen:

$$u = -p \qquad 3p \qquad -5p \qquad 7p \quad \text{enz.}$$

Evenals bij een éénphasen-systeem levert dus ieder der harmonische componenten eene reeks magnetomotorische krachten op met gelijke aantallen poolparen; de overeenkomstige magnetomotorische krachten in deze reeksen zullen zich dus weer verhouden als de waarden der harmonische componenten, waarvan zij afkomstig zijn.

Magnetomotorische krachten, welke *slechts in draaiingsrichting* verschillen, doch overigens gelijk zijn, kunnen blijkbaar niet optreden!

De rotatiesnelheden voor de verschillende reeksen magnetomotorische krachten zijn blijkbaar:

voor de eerste harmonische componente:

$$w = \frac{\omega}{p} \qquad -\frac{\omega}{3p} \qquad \frac{\omega}{5p} \qquad \text{enz.}$$

voor de derde harmonische componente:

$$w = -3\frac{\omega}{p} \qquad 3\frac{\omega}{3p} \qquad -3\frac{\omega}{5p} \qquad \text{enz.}$$

enz.

voor de q^e harmonische componente:

$$w = \pm q\frac{\omega}{p} \qquad \mp q\frac{\omega}{3p} \qquad \pm q\frac{\omega}{5p} \qquad \text{enz.}$$

waarin het bovenste of het onderste teeken geldt, alnaarmate q behoort tot de reeks 1, 5, 9 enz. dan wel tot de reeks 3, 7, 11 enz.

Bij een *driephasen-systeem* vinden we voor u de volgende waardenreeksen:

voor de 1^e^, 7^e^, 13^e^ enz. harmonische componente:

$$u = \quad p \qquad -5p \qquad 7p \qquad -11p \qquad \text{enz.}$$

voor de 5^e^ 11^e^ 17^e^ enz. harmonische componente:

$$u = \quad -p \qquad 5p \qquad -7p \qquad 11p \qquad \text{enz.}$$

voor de 3^e^, 9^e^, 15^e^ enz. harmonische componente:

$$u = \pm 3p \qquad \pm 9p \qquad \pm 15p \qquad \text{enz.}$$

De hierbij behoorende rotatiesnelheden zijn:

voor de eerste harmonische componente:

$$w = \frac{\omega}{p} \qquad -\frac{\omega}{5p} \qquad \frac{\omega}{7p} \qquad -\frac{\omega}{11p} \qquad \text{enz.}$$

voor de vijfde harmonische componente:

$$w = \quad -5\frac{\omega}{p} \qquad 5\frac{\omega}{5p} \qquad -5\frac{\omega}{7p} \qquad 5\frac{\omega}{11p} \quad \text{enz.}$$

voor de zevende harmonische componente:

$$w = \quad 7\frac{\omega}{p} \qquad -7\frac{\omega}{5p} \qquad 7\frac{\omega}{7p} \qquad -7\frac{\omega}{11p} \quad \text{enz.}$$

voor de q^e harmonische componente, indien en alnaarmate q behoort tot een der beide reeksen 1, 7, 13 enz. en 5, 11, 17 enz.;

$$w = \quad \pm q\frac{\omega}{p} \qquad \mp q\frac{\omega}{5p} \qquad \pm q\frac{\omega}{7p} \qquad \mp q\frac{\omega}{11p} \quad \text{enz}$$

Voor deze componenten der magnetomotorische kracht gelden dus dezelfde opmerkingen als bij een tweephasen-systeem.

Daarentegen is voor waarden van q der reeks: 3, 9, 15 enz:

$$w = \pm q\frac{\omega}{3p} \qquad \pm q\frac{\omega}{9p} \qquad \pm q\frac{\omega}{15p} \qquad \text{enz.}$$

De magnetomotorische krachten, opgeleverd door de 3^e, 9^e, 15^e enz. harmonische componenten van een driephasen-systeem, bezitten dus de eigenschap, welke *algemeen* geldt voor een eenphasen-systeem, nl dat zij twee aan twee, behoudens hun verschil in draaiingsrichting, aan elkaar gelijk zijn.

Als grensgeval hebben we te beschouwen een ∞-phasig-systeem, waarvoor met uitzondering der waarden:

$$u = p\,q$$

de waarden van u oneindig groot worden.

Aangezien nu voor $u = \infty$

$$\mathbf{M} = 0$$

$$\text{en} \qquad w = 0$$

kunnen we deze oneindig groote waarden buiten beschouwing laten.

Bij een ∞-phasig-systeem levert bijgevolg iedere harmonische componente der stroomsterkte één roteerende sinusoidale magnetomotorische kracht op.

Uit:

$$w = \frac{q\,\omega}{u}$$

volgt voor dit geval:

$$w = \frac{\omega}{p}$$

dus: alle sinusoidale componenten der stroomverdeeling roteeren met dezelfde hoeksnelheid: *de totale stroomverdeeling is dus zelf roteerend.*

Ten einde ons thans een volledig beeld te kunnen vormen van de roteerende magnetomotorische krachten, welke bij electrische machines optreden, hebben we nog de wikkelingsconstanten K_u te bepalen.

In een volgend hoofdstuk zullen we deze bepaling uitvoeren voor het geval eener groefwikkeling, waarvan de gelijkmatig verdeelde wikkeling als grensgeval kan beschouwd worden.

Alvorens hiertoe over te gaan zullen we echter aantoonen dat deze zelfde constanten K_u nog in een ander opzicht een belangrijke rol spelen in de theorie der electrische machines.

HOOFDSTUK XI.

Electromotorische krachten, geïnduceerd door een roteerend sinusoidaal magnetisch veld.

Zij binnen een wikkelingsruimte de gemiddelde waarde van een roteerenden $2u$-poligen sinusoidalen krachtstroom gegeven door:

$$\mathbf{N} = \mathbf{n}\, N$$

waarin $\mathbf{n}$ een eenheidsvector voorstelt, welke de rotatiebeweging uitvoert, overeenkomende met die, welke beschreven wordt door de vergelijking:

$$\theta = \theta_0 + w\,t\,.$$

In een draad, waarvan de ligging bepaald is door den hoek θ, is dan de geïnduceerde electromotorische kracht ten tijde t:

$$e = \frac{u\,w}{2}\, N \cos u\,(\theta - \theta_0 - w\,t)$$

Hieruit volgt onmiddellijk voor de totale electromotorische kracht, geïnduceerd in de s^e wikkelingsafdeeling:

$$\mathcal{E}_s = \frac{u\,w}{2}\, N \int_{(s-1)\alpha - \frac{\alpha}{2}}^{(s-1)\alpha + \frac{\alpha}{2}} \cos u\,(\theta - \theta_0 - w\,t)\, \varkappa\, d\,\theta\,.$$

$$= \frac{u\,w}{2}\, N \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \cos u \,\{\, \theta - \theta_0 - w t + (s-1)\,\alpha \,\}\, \varkappa\, d\,\theta\,.$$

of, in aanmerking nemende dat:

$$\int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \varkappa \sin u\,\theta\, d\,\theta = 0$$

$$\mathcal{E}_s = \frac{u\,w}{2}\, N \cos u \,\{\, w\,t + \theta_0 - (s-1)\,\alpha \,\} \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \varkappa \cos u\,\theta\, d\,\theta$$

welke uitdrukking bij invoering der wikkelingsconstante K_u overgaat in:

$$\mathcal{E}_s = \frac{\pi\, u\, w\, \mathrm{K}_u\, \mathfrak{N}\, N}{4\, n} \cos u \,\{\, w\, t + \theta_0 - (s-1)\, \alpha \,\}$$

Deze uitdrukking levert ons dus de waarde der electromotorische krachten, door een roteerend veld geïnduceerd in eene *stilstaande* wikkeling.

Bij roteerende wikkelingen hebben wij twee gevallen te onderscheiden, nl. dat de wikkelings-*afdeelingen* aan de rotatie deelnemen, en dat de wikkelingsafdeelingen een vasten stand in de ruimte blijven innemen.

In het eerste geval doen we het eenvoudigst door de relatieve beweging met de hoeksnelheid w' te beschouwen van het veld ten opzichte der wikkeling. We vinden dan onmiddellijk:

$$\mathcal{E}_s = \frac{\pi\, u\, w'\, \mathrm{K}_u\, \mathfrak{N}\, N}{4\, n} \cos u \,\{\, w'\, t + \theta_0 - (s-1)\, \alpha \,\}$$

De beweging van den rotor verandert dus de waarde der geinduceerde electromotorische kracht en van hare frequentie *beide* in de verhouding $w' : w$.

In het tweede geval merken we op, dat voor een draad, waarvan de ligging ten tijde t bepaald is door den hoek θ, de geïnduceerde electromotorische kracht op dat oogenblik bedraagt:

$$e = \frac{u\, w'}{2}\, N \cos u\, (\theta - \theta_0 - w\, t)$$

zoodat de integratie over de s^e wikkelingsafdeeling oplevert:

$$\mathcal{E}_s = \frac{\pi\, u\, w'\, \mathrm{K}_u\, \mathfrak{N}\, N}{4\, n} \cos u \,\{\, w\, t + \theta_0 - (s-1)\, \alpha \,\}$$

De beweging van den rotor verandert bijgevolg de waarde der electromotorische kracht in de verhouding $w' : w$, doch laat hare frequentie ongewijzigd.

We kunnen thans omgekeerd de vraag stellen, het magnetisch veld te bepalen, dat in een gegeven wikkeling een bepaald systeem electromotorische krachten induceert.

Indien het phaseverschil tusschen de electromotorische krachten in de opvolgende wikkelingsafdeelingen $p\,\alpha$ bedraagt, zoo kunnen we algemeen de electromotorische kracht in de s^e afdeeling voorstellen door:

$$\mathcal{E}_s = \sum_{q=1}^{q=\infty} E_q \sqrt{2} \cos q \{ \omega t - \psi_q - (s-1) p \alpha \}$$

Aangezien ieder roteerend sinusoidaal veld eene harmonische electromotorische kracht induceert, kunnen we de bepaling der velden uitvoeren voor ieder der harmonische componenten:

$$\mathcal{E}_{sq} = E_q \sqrt{2} \cos q \{ \omega t - \psi_q - (s-1) p \alpha \}$$

afzonderlijk.

Nemen we nu voor een oogenblik aan, dat inderdaad deze componente der electromotorische kracht geïnduceerd wordt door één roteerend sinusoidaal veld, zoo zou dit veld volkomen bepaald moeten zijn door de betrekking:

$$\frac{\pi\, u\, w\, K_u\, \mathfrak{N}\, N}{4\, n} \cos u \{ w t + \theta_0 - (s-1) \alpha \}$$
$$= E_q \sqrt{2} \cos q \{ \omega t - \psi_q - (s-1) p \alpha \}$$

waaruit volgen zou:

$$N = \frac{4\, n\, E_q \sqrt{2}}{\pi\, u\, w\, K_u\, \mathfrak{N}}$$

$$u\, w = \pm q\, \omega$$

$$u\, \theta_0 = \mp q\, \psi_q$$

$$u = \pm \left(p\, q + x \frac{2\pi}{\alpha} \right) = \pm (p\, q + x\, n)$$

waarin x een *willekeurig* positief of negatief geheel getal is; m. a. w. we vinden *dat het magnetisch veld door de te induceeren electromotorische kracht niet bepaald is!*

Ieder $2u$-polig veld, waarvoor u aan bovenstaande conditie voldoet, zal, roteerend met de hoeksnelheid:

$$w = \pm \frac{q\, \omega}{u}$$

in de wikkeling electromotorische krachten induceeren, welke in frequentie en verschil in phase tusschen de opvolgende wikkelings-afdeelingen met het systeem E_q overeenkomen.

In het algemeen zullen we dus moeten aannemen dat *al* deze velden hunne bijdrage zullen leveren in de inductie van dit systeem electromotorische krachten.

We zullen thans met u niet langer algemeen aanduiden het aantal poolparen van een bepaald veld, doch overeenkomstig de beteekenis, die we in het vorige hoofdstuk aan u hebben toegekend, zullen we onder u eenvoudig verstaan een geheel positief of negatief getal, voldoende aan de conditie:

$$u = p\,q + x\,n\,.$$

De electromotorische krachten:

$$\mathcal{E}_{sq} = E_q \sqrt{2} \cos q \left\{ \omega\, t - \psi_q - (s-1)\, p\, \varkappa \right\}$$

welke door het $\pm\, 2\, u$-polige veld

$$\mathbf{N} = \mathbf{n}\, N$$

geïnduceerd worden, zijn dan bepaald door:

$$E_q \sqrt{2} = \pm \frac{\pi\, u\, w\, \mathrm{K}_u\, \mathfrak{N}\, N}{4\, n}$$

$$q\, \omega = u\, w$$

$$q\, \psi_q = -\, u\, \theta_0$$

waarin het $+$ of $-$ teeken in de uitdrukking voor $E_q \sqrt{2}$ geldt alnaarmate u positief of negatief is.

We merken thans op, dat de reeks roteerende velden, welke in eene wikkeling eene bepaalde harmonische componente der electromotorische kracht induceeren, zoowel in aantal poolparen als in omwentelingssnelheid overeenstemmen met de reeks roteerende magnetomotorische krachten, opgeleverd door de overeenkomstige harmonische componente der stroomsterkte in dezelfde wikkeling.

Dit geldt blijkbaar zoowel voor roteerende als voor stilstaande wikkelingen. Terwijl echter de reeks magnetomotorische krachten, zoowel in grootte als op ieder oogenblik in stand, *volkomen bepaald* zijn door grootte en phase van de harmonische componente der stroomsterkte, is dit *niet* het geval met de reeks roteerende velden in verband met de te induceeren componente der electromotorische kracht.

Duiden we den $\pm\, 2\, u$-poligen krachtstroom, welke medewerkt aan de inductie van de q^e harmonische componente der electromotorische kracht aan door:

$$\mathbf{N}_{uq} = \mathbf{n}_{uq}\, N_{uq}$$

waarin $\mathbf{n}_{uq}$ een eenheidsvector voorstelt, welke de rotatiebeweging uitvoert, overeenkomende met die, welke ten opzichte der wikkelings-afdeelingen wordt voorgesteld door de vergelijking:

$$u\,\theta = q\,(\omega\, t - \psi_{uq})$$

zoo geldt de betrekking:

$$E_q \sqrt{2} \cos q \left\{ \omega\, t - \psi_q - (s-1)\, p\, \alpha \right\}$$
$$= \frac{\pi\, \mathfrak{N}}{4\, n} \sum_{u=-\infty}^{u=+\infty} \pm\, u\, w'\, \mathrm{K}_u\, N_{uq} \cos q \left\{ \omega\, t - \psi_{uq} - (s-1)\, p\, \alpha \right\}$$

waarbij de sommatie in het tweede lid uit te strekken is over alle waarden van u, behoorende bij de beschouwde waarde van q.

De hoeksnelheid w' is de *relatieve* hoeksnelheid van den krachtstroom ten opzichte van de wikkeling. Voor stilstaande wikkelingen, en voor wikkelingen, waarbij de afdeelingen de rotatie mede uitvoeren, is dus:

$$w' = \frac{q\,\omega}{u}$$

Daarentegen is voor roteerende wikkelingen, waarbij de afdeelingen een vasten stand blijven innemen:

$$w' = \frac{q\,\omega}{u} - w_0$$

waarin w_0 de hoeksnelheid van den rotor voorstelt.

De bovenstaande betrekking splitst zich in de beide volgende:

$$E_q \sin q\, \psi_q = \frac{\pi\, \mathfrak{N}}{4 \sqrt{2}\, n} \sum_{u=-\infty}^{u=+\infty} \pm\, u\, w'\, \mathrm{K}_u\, N_{uq} \sin q\, \psi_{uq}$$

en

$$E_q \cos q\, \psi_q = \frac{\pi\, \mathfrak{N}}{4 \sqrt{2}\, n} \sum_{u=-\infty}^{u=+\infty} \pm\, u\, w'\, \mathrm{K}_u\, N_{uq} \cos q\, \psi_{uq}$$

welke echter de roteerende krachtstroomen als functies der te induceeren electromotorische kracht *niet* bepalen.

HOOFDSTUK XII.

Energie-overbrenging tusschen de wikkelingen eener wisselstroom-machine.

Zij voor de s^e afdeeling eener wikkeling de door de roteerende velden geïnduceerde electromotorische kracht:

$$\mathcal{E}_s = \sum_{q=1}^{q=\infty} E_q \sqrt{2} \cos q \left\{ \omega t - \psi_q - (s-1)\, p\, \alpha \right\}$$

de in deze afdeeling optredende stroomsterkte:

$$i_s = \sum_{q=1}^{q=\infty} I_q \sqrt{2} \cos q \left\{ \omega t - \theta_q - (s-1)\, p\, \alpha \right\}$$

De gemiddelde waarde van het door de wikkeling afgegeven electrische vermogen bedraagt dan:

$$U = n \sum_{q=1}^{q=\infty} E_q\, I_q \cos q\, (\theta_q - \psi_q)\,.$$

Voor het aandeel der q^e harmonische componenten in dit vermogen vinden we dus:

$$U_q = n\, E_q\, I_q \cos q\, (\theta_q - \psi_q)\,.$$

Voeren we thans de in hoofdstuk XI gevonden betrekkingen in:

$$E_q \sin q\, \psi_q = \frac{\pi\, \mathfrak{N}}{4 \sqrt{2}\, n} \sum_{u=-\infty}^{u=+\infty} \pm\, u\, w'\, \mathrm{K}_u\, N_{uq} \sin q\, \psi_{uq}$$

$$E_q \cos q\, \psi_q = \frac{\pi\, \mathfrak{N}}{4 \sqrt{2}\, n} \sum_{u=-\infty}^{u=+\infty} \pm\, u\, w'\, \mathrm{K}_u\, N_{uq} \cos q\, \psi_{uq}$$

zoo gaat de uitdrukking voor U_q over in:

$$U_q = \frac{\pi\, \mathfrak{N}\, I_q}{4 \sqrt{2}} \sum_{u=-\infty}^{u=+\infty} \pm\, u\, w'\, \mathrm{K}_u\, N_{uq} \cos q\, (\theta_q - \psi_{uq})$$

We voeren thans weer ter voorstelling van de magnetomotorische krachten, opgeleverd door I_q, en van de krachtstroomen, welke E_q induceeren, de vectoren in:

$$\mathbf{M}_{uq} = \mathbf{m}_{uq} \frac{2\, \pi\, \mathrm{K}_u\, \mathfrak{N}\, I_q \sqrt{2}}{u}$$

$$\mathbf{N}_{uq} = \mathbf{n}_{uq}\, N_{uq}$$

waarbij we opmerken dat voor beide grootheden dezelfde waardenreeks voor u geldt.

De beweging dezer beide vectoren komt overeen met die, welke wordt voorgesteld door de vergelijkingen:

$$u\,\theta = q\,(\omega\,t - \theta_q) - \frac{\pi}{2}$$

en

$$u\,\theta = q\,(\omega\,t - \psi_{uq})$$

waaruit blijkt, dat het magnetisch standsverschil van $\mathbf{N}_{uq}$ ten opzichte van $\mathbf{M}_{uq}$, alnaarmate u positief of negatief is, bedraagt:

$$\pm \left\{ \frac{\pi}{2} + q\,(\theta_q - \psi_{uq}) \right\}$$

Hieruit volgt:

$$[\mathbf{M}_{uq}\,\mathbf{N}_{uq}] = \pm\, k\, \frac{2\,\pi\,K_u\,\mathfrak{N}\,I_q\,\sqrt{2}}{u}\,N_{uq}\cos q\,(\theta_q - \psi_{uq})$$

zoodat we de uitdrukking voor U_q als volgt kunnen schrijven:

$$U_q = \frac{k}{16} \sum_{u=-\infty}^{u=+\infty} u^2\,w'\,[\mathbf{M}_{uq}\,\mathbf{N}_{uq}]$$

of bij invoering van den vector:

$$\mathbf{w}' = k\,w'$$

$$U_q = \sum_{u=-\infty}^{u=+\infty} \frac{u^2\,\mathbf{w}'}{16}\,[\mathbf{M}_{uq}\,\mathbf{N}_{uq}]$$

We zullen thans het vermogen bepalen, dat door de wikkeling in de omringende ruimte wordt uitgestraald. In hoofdstuk III vonden we voor de energiestrooming in binnenwaartsche richting door een cylinder-oppervlak, gelegen binnen eene zone, waarin een met de hoeksnelheid $\mathbf{w}$ roteerend $2p$-polig sinusoidaal veld optreedt, waarvoor we de krachtstroomen der enkelvoudige componenten aanduiden met $\mathbf{N}_1$ en $\mathbf{N}_2$:

$$W = \frac{p^2\,\mathbf{w}}{8\,\mu\,l}\,[\mathbf{N}_2\,\mathbf{N}_1]$$

De in hoofdstuk VII afgeleide betrekking:

1) $$\frac{2}{\mu\,l}\,[\mathbf{N}_2\,\mathbf{N}_1] - \frac{2}{\mu'\,l}\,[\mathbf{N}_2'\,\mathbf{N}_1'] = [\mathbf{N}\,\mathbf{M}]$$

bepaalt de toename van $\frac{1}{\mu}[\mathbf{N}_2 \mathbf{N}_1]$ bij overgang van de buitenzijde naar de binnenzijde van een stroomvlak. Deze zelfde uitdrukking geldt dus zonder meer voor eene wikkeling, mits we slechts onder $\mathbf{N}$ verstaan den „gemiddelden" krachtstroom binnen de wikkelingsruimte.

Er volgt onmiddellijk uit voor de toename der energiestrooming, d. w. z. *voor het door de wikkeling uitgestraalde electromagnetisch vermogen:*

$$\mathrm{W} = W - W'$$

$$= \frac{p^2 \, \mathrm{w}}{16} [\mathbf{N} \, \mathbf{M}]$$

Treden meerdere velden op met verschillend aantal poolparen $\pm u$, en verschillende omwentelingssnelheid, zoo verkrijgen we de gemiddelde waarde der totale energiestrooming als de som der energiestroomingen, welke zouden optreden onder den invloed van ieder der roteerende sinusoidale velden afzonderlijk.

Voor het aandeel der q^e harmonische componenten van stroomsterkte en electromotorische kracht in de energie-uitstraling der wikkeling vinden we bijgevolg:

$$\mathrm{W}_q = \sum_{u=-\infty}^{u=+\infty} \frac{u^2 \, \mathrm{w}}{16} [\mathbf{N}_{uq} \, \mathbf{M}_{uq}]$$

Op volkomen dezelfde wijze leiden we uit de in hoofdstuk IV gevonden uitdrukking voor het koppel, opgeleverd door een sinusoidaal veld, met behulp der bovengenoemde betrekking de volgende uitdrukking af voor het aandeel der q^e harmonische componenten in het op de wikkeling uitgeoefende koppel:

$$\mathbf{K}_q = \sum_{u=-\infty}^{u=+\infty} \frac{u^2}{16} [\mathbf{M}_{uq} \, \mathbf{N}_{uq}]$$

Duiden we de rotatiesnelheid der wikkeling aan door w_0, zoo volgt hieruit voor het aandeel der q^e harmonische componenten in den afgegeven mechanischen arbeid:

$$\mathbf{K}_q \, \mathrm{w}_0 = \sum_{u=-\infty}^{u=+\infty} \frac{u^2 \, \mathrm{w}_0}{16} [\mathbf{M}_{uq} \, \mathbf{N}_{uq}]$$

Daar nu

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}' + \mathbf{w}_0$$

vinden we ten slotte:

$$U_q + \mathrm{W}_q + \mathbf{K}_q \mathbf{w}_0 = 0$$

Hebben we te doen met eene sinusoidale electromotorische kracht en eene sinusoidale stroomsterkte, zoo zegt bovenstaande formule alleen, dat de som van het electrische, magnetische en mechanische vermogen, geleverd door de wikkeling, $= 0$ is. De formule is dan de uitdrukking der wet van het behoud van arbeidsvermogen, toegepast op de wikkeling eener electrische machine, en spreekt dus van zelf!

Wat echter, als niet van zelf sprekend, uit de formule volgt is, dat bij niet sinusoidale electromotorische kracht en stroomsterkte de wet van het behoud van arbeidsvermogen mag worden toegepast op ieder paar overeenkomstige harmonische componenten der electromotorische kracht en der stroomsterkte, mits we beschouwen het aandeel door deze harmonische componenten geleverd in de *gemiddelde* waarden der energiehoeveelheden. Hebben we te doen met een systeem electromotorische krachten en stroomen, welke, hoewel zelf niet periodiek veranderlijk, uit periodiek veranderlijke componenten zijn saamgesteld, zoo blijven de voorgaande beschouwingen onveranderd geldig, mits we als de gemiddelde waarden van het electrische, magnetische en mechanische vermogen de limiet beschouwen, waartoe deze gemiddelde waarden over een tijd t naderen bij onbepaalde toename van t.

Ten aanzien van de statorwikkeling eener electrische machine beteekent de gevonden betrekking, dat van ieder paar overeenkomstige harmonische componenten het vermogen:

$$\mathrm{W}_q = -U_q = -n E_q I_q \cos \varphi_q$$

waarin

$$\varphi_q = q(\theta_q - \psi_q)$$

van de wikkeling wordt opgenomen en naar den rotor wordt overgebracht *door eene bepaalde reeks roteerende velden*, waarvoor de waarden van u en w direct uit die van q en ω kunnen worden afgeleid.

Ten aanzien van de rotorwikkeling vinden we, dat door eene bepaalde reeks roteerende velden het vermogen:

$$-W_q' = U_q' + \mathbf{K}_q \, w_0 = n' E_q' I_q' \cos \varphi_q' + \mathbf{K}_q \, w_0$$

aan de wikkeling wordt afgegeven als het aandeel, dat door de q^e harmonische componenten wordt bijgedragen eenerzijds in de door den rotor geleverde electrische energie, anderzijds in het mechanische vermogen, dat door de machine verricht wordt.

Indien we nu bovendien nog mochten aannemen dat *dezelfde* reeks roteerende velden, welke de energie opnemen van eene bepaalde harmonische componente der statorwikkeling, deze energie eveneens afgeven aan eene bepaalde harmonische componente der rotorwikkeling, zoo zou deze reeks roteerende velden met de overeenkomstige harmonische componenten van electromotorische kracht en stroomsterkte een *zelfstandig bestaanbaar systeem* vormen van energie-overbrenging.

Dit systeem zou inderdaad zelfstandig optreden, indien we eene enkelvoudige harmonische spanning van de vereischte frequentie zouden aanleggen, hetzij in het geval van een inductiemotor aan één der beide wikkelingen, hetzij in het geval van een conductiemotor aan beide wikkelingen.

Hieruit zou verder volgen, dat onder den invloed van eene enkelvoudige harmonische spanning in de wikkelingen van eene electrische machine slechts de overeenkomstige harmonische stroomsterkte zou kunnen optreden.

Indien voor de afzonderlijke harmonische componenten der spanning de karakteristieke eigenschappen van den motor bepaald zouden zijn, d. w. z. de verandering van stroom- resp. energieopname, en van het motorkoppel resp. van het verrichte mechanische vermogen als functies der rotorsnelheid w_0, zoo zouden deze grootheden voor de werkelijke totaal-spanning hieruit door eenvoudige sommatie kunnen worden afgeleid

In het bovenbedoelde opzicht nu bestaat er een wezenlijk onderscheid tusschen de energie-overbrenging bij *collector-motoren* en bij *motoren* met *kortsluit-* of *sleepringanker*, zooals we in het volgende nader aantoonen.

Denken we ons een veld, waarvan het aantal poolparen en de omwentelingssnelheid als volgt bepaald zijn door de constanten a en b:

$$u = a \qquad u\,w = b$$

In eene wikkeling, bestaande uit n_1 afdeelingen, welke met de snelheid w_1 in dit veld roteeren, zal een systeem electromotorische krachten geinduceerd worden, dat in het algemeen aanleiding geeft tot het ontstaan van een systeem stroomen, onder wier invloed in de eerste plaats zal optreden een veld, in aantal polen en in omwentelingssnelheid overeenkomende met het primair aanwezige veld, doch *bovendien* alle overige velden der reeks, waarvan het aantal poolparen en de omwentelingssnelheid voldoen aan de condities:

$$u = a + x\,n_1$$

$$u\,(w - w_1) = a\left(\frac{b}{a} - w_1\right)$$

welke laatste we als volgt schrijven:

$$u\,w = b + x\,n_1\,w_1$$

en waarin x een willekeurig geheel getal voorstelt.

De wikkeling *reageert* bijgevolg op een bepaald veld met eene reeks velden, waarvan het beschouwde veld deel uitmaakt, en waarvoor de waarden van u eene rekenkundige reeks vormen met het verschil n_1, de waarden van $u\,w$ eene rekenkundige reeks met het verschil $n_1\,w_1$.

Denken we ons co-axiaal met de eerste wikkeling eene tweede wikkeling, bestaande uit n_2 afdeelingen, welke met de snelheid w_2 roteeren, zoo zal deze wikkeling op eenig veld der reeks:

$$u = a + x\,n_1$$

$$u\,w = b + x\,n_1\,w_1$$

bijgevolg reageeren met eene reeks velden, waarvan het aantal poolparen en de omwentelingssnelheid voldoen aan de condities:

$$u = a + x\,n_1 + y\,n_2$$

$$u\,w = b + x\,n_1\,w_1 + y\,n_2\,w_2$$

waarin y eveneens een willekeurig geheel getal voorstelt.

In het geval van meerdere co-axiaal geplaatste wikkelingen, bestaande uit n_1, n_2, n_3 enz. afdeelingen, welke roteeren met de snelheden w_1, w_2, w_3 enz. vinden we, op dezelfde wijze voortredeneerende, dat de opeenvolgende reacties dezer wikkelingen op het primair aanwezige veld eene reeks velden doen ontstaan, waarvoor de grootheden u en w bepaald zijn door:

$$u = a + x n_1 + y n_2 + z n_3 \text{ enz.}$$

$$u w = b + x n_1 w_1 + y n_2 w_2 + z n_3 w_3 \text{ enz.}$$

waarin x, y, z enz willekeurige geheele getallen voorstellen.

We zien nu echter onmiddelijk in, dat ieder der aanwezig onderstelde wikkelingen op eenig veld, waarvoor u en w aan deze beide laatste condities voldoen, slechts reageeren kan met velden, waarvoor deze betrekkingen eveneens geldig zijn; m.a.w. de boven opgestelde condities bepalen algemeen het aantal poolparen en de omwentelingssnelheid van *alle* velden, welke kunnen optreden door de reactie der gezamentlijke wikkelingen op eenig veld, waarvan het aantal poolparen en de omwentelingssnelheid aan deze condities voldoen.

Passen we thans de hier gevonden uitkomst toe op de wikkelingen van eenen $2p$-poligen motor, waarvan de stator f_1-phasig, de rotor f_2-phasig gewikkeld is, en waarvoor dus geldt:

$$n_1 = 2 p f_1 \qquad\qquad n_2 = 2 p f_2$$

$$w_1 = 0 .$$

We nemen aan, dat aan de statorwikkeling de q^e harmonische van een f_1-phasen-systeem spanningen met de pulsatie ω wordt aangelegd, en dat dus een met dit systeem spanningen in pulsatie en phaseverschil overeenkomend systeem electromotorische krachten in deze wikkeling zal moeten geïnduceerd worden. Hiertoe zal noodzakelijk *één* der velden moeten optreden, waarvoor u en w voldoen aan de condities:

$$u = p q + x n_1 \qquad\qquad u w = q \omega$$

en uit onze bovenstaande beschouwingen volgt nu onmiddelijk, dat door de reactie der beide wikkelingen op dit ééne veld in het algemeen *alle* velden zullen optreden, waarvoor u en w voldoen aan:

$$u = p\,q + x\,n_1 + y\,n_2 = p\,(q + 2\,x\,f_1 + 2\,y\,f_2)$$

$$u\,w = q\,\omega + y\,n_2\,w_2 = q\,\omega + 2\,y\,p\,f_2\,w_2\,.$$

Deze beide condities bepalen dus algemeen het aantal poolparen en de omwentelingssnelheid der reeks velden, ontstaande onder den invloed van de q^e harmonische componente der statorspanning

In het geval van een collector-motor is in de eerste plaats de rotatiesnelheid der wikkelings-afdeelingen van den rotor $w_2 = 0$. In de tweede plaats echter moet worden opgemerkt dat bij de *practisch toegepaste* collector-motoren rotor en stator steeds voor hetzelfde aantal phasen f gewikkeld zijn *). Voor deze klasse van motoren gaan dus de beide boven opgestelde betrekkingen over in:

$$u = p\,\{\,q + 2\,(x + y)\,f\,\}$$

waarvoor we ook mogen schrijven:

$$u = p\,(q + 2\,x\,f)$$

en

$$u\,w = q\,\omega\,.$$

Onder den invloed eener bepaalde harmonische componente der statorspanning treedt dus slechts eene reeks roteerende velden op, welke zoowel in de rotorwikkeling als in de statorwikkeling *uitsluitend* het hiermee in pulsatie en in phaseverschil overeenkomende systeem electromotorische krachten en stroomen induceeren. Daar nu bovendien hetzelfde geldt van eene bepaalde harmonische componente der rotorspanning, volgt hieruit *dat uitwisseling van energie slechts mogelijk zal zijn tusschen de overeenkomstige harmonische componenten van stator- en rotorstroom*, en dat dus deze beide harmonische componenten met

---

*) *Theoretisch* is natuurlijk een collector-motor, waarvan de stator en de rotor met stroom van een verschillend aantal phasen gevoed worden, zeer goed *denkbaar*. De opstelling eener theorie van een dergelijken motor zou zonder bezwaar kunnen geschieden, door uittegaan van de algemeen geldende condities voor u en w, op de wijze, die wij in hoofdstuk XV zullen aangeven voor motoren met kortsluit- en sleepringanker. Zoolang echter een dergelijke motor niet uitgevonden is, zijn deze theoretische beschouwingen uit den aard der zaak waardeloos.

de onder hun invloed optredende reeks roteerende velden inderdaad een op zichzelf bestaanbaar systeem van energie-overbrenging vormen.

Bij motoren met kortsluit- of sleepringanker is de snelheid der rotorwikkelings-afdeelingen w_2 gelijk aan de rotorsnelheid w_0, en hebben we in het algemeen rekening te houden met de mogelijkheid dat f_1 en f_2 verschillende waarden bezitten. Voor deze klasse van motoren geldt dus algemeen:

$$u = p\,(q + 2\,x\,f_1 + 2\,y\,f_2)$$
$$u\,w = q\,\omega + 2\,y\,p\,f_2\,w_0\,.$$

De onder den invloed van de q^e harmonische componente der statorspanning optredende velden zullen bijgevolg in het algemeen zoowel in de statorwikkeling als in de rotorwikkeling eene reeks harmonische electromotorische krachten en stroomen induceeren, waarvan we de pulsaties voor de statorwikkeling zullen aanduiden door ω_1, voor de rotorwikkeling door ω_2, en waarbij:

$$\omega_{1y} = \pm\,u\,w = \pm\,(q\,\omega + 2\,y\,p\,f_2\,w_0)$$
$$\omega_{2x} = \pm\,u\,(w - w_0) = \pm\,(q\,\omega - p\,q\,w_0 - 2\,x\,p\,f_1\,w_0)$$

De gewoonlijk in de theorie dezer motoren ingevoerde onderstelling, dat in de rotorwikkeling een periodiek veranderlijke stroom geinduceerd wordt met de pulsatie:

$$\omega_2 = \omega - p\,w_0$$

is dus blijkbaar ten eenenmale onjuist!

Daarentegen volgt uit bovenstaande uitdrukkingen dat de pulsatie, zoowel van den statorstroom als van den rotorstroom, en dus ook van alle verschijnselen, welke zich in den motor afspelen onder den invloed der q^e harmonische componente van de statorspanning, gelijk is aan den grootsten gemeenen deeler van $q\,\omega$ en $p\,w_0$. De pulsatie der verschijnselen, optredende onder den invloed eener willekeurige periodieke statorspanning met de pulsatie ω, zal dus gelijk zijn aan den grootsten gemeenen deeler van ω en $p\,w_0$.

Aangezien nu in het algemeen ω en $p\,w_0$ onderling onmeetbaar zijn, is de waarde dezer pulsatie in het algemeen *oneindig* *klein*, de periode der verschijnselen bijgevolg *oneindig groot*; m. a. w. bij een motor met kortsluit- of sleepringanker zullen we in het algemeen de verschijnselen *niet* als *periodiek* veranderlijk mogen opvatten!

Beschouwen we vooreerst het geval, dat we te doen hebben met eene sinusoidale statorspanning met de pulsatie $q\,\omega$.

De statorstroom zal dan zijn saamgesteld uit een aantal harmonische componenten met de pulsatie:

$$\omega_{1y} = \pm (q\,\omega + 2\,y\,p\,f_2\,w_0)$$

waarvan evenwel slechts de componente met de pulsatie $q\,\omega$ energie aan de stroombron zal kunnen onttrekken, welke energie na aftrek van het verlies, veroorzaakt door den weerstand der statorwikkeling, met behulp der velden, waarvoor $y = 0$ is, naar den rotor wordt overgebracht. Een deel dezer energie zal evenwel met behulp der overige velden weer van den rotor naar den stator gereflecteerd worden ten einde het energieverlies op te leveren, in de statorwikkeling veroorzaakt door de stroomen, wier pulsaties van $q\,\omega$ verschillen.

Stellen we ons thans de vraag, of we in het geval eener *niet sinusoidale* statorspanning de verschijnselen, welke zich in den motor afspelen, mogen beschouwen als de superpositie der verschijnselen, welke zouden optreden onder den invloed van ieder der harmonische componenten afzonderlijk.

Hiertoe beschouwen we de harmonischen van de orden q en q', en merken op, dat een wijziging der verschijnselen, optredende onder den invloed van een dezer harmonischen, door de andere, slechts mogelijk is indien een veld met een bepaald aantal polen $\pm 2\,u$ en eene bepaalde omwentelingssnelheid w onder den invloed dezer beide harmonische componenten der statorspanning tot stand komt.

Hiertoe moet echter voldaan zijn aan de beide condities:

$$p\,(q' + 2\,x'\,f_1 + 2\,y'\,f_2) = \pm\,p\,(q + 2\,x\,f_1 + 2\,y\,f_2)$$

en

$$q'\,\omega + 2\,y'\,p\,f_2\,w_0 = \pm\,(q\,\omega + 2\,y\,p\,f_2\,w_0)$$

waaruit we afleiden:

$$q' \pm q = 2 f_1 \frac{p\, w_0}{\omega - p\, w_0} (x' \pm x)$$

en

$$q' \pm q = -2 f_2 \frac{p\, w_0}{\omega} (y' \pm y)$$

Nu zal aan deze betrekkingen slechts door geheele eindige waarden van $x' \pm x$, $y' \pm y$ en $q' \pm q$ voldaan kunnen worden, *indien* $p\, w_0$ *en* ω *onderling meetbaar zijn.*

Is dit laatste echter het geval, zoo zullen we steeds een oneindig aantal stellen geheele waarden van $x' \pm x$, $y' \pm y$ en $q' \pm q$ kunnen aanwijzen, welke de gestelde condities vervullen, welke echter alle veelvouden zijn van bepaalde grondwaarden α, β en γ.

We vinden dus in dit geval eene reeks oplossingen van den vorm :

$x' \pm x =$	0	$\pm \alpha$	$\pm 2\alpha$	$\pm 3\alpha$	enz.
$y' \pm y =$	0	$\pm \beta$	$\pm 2\beta$	$\pm 3\beta$	enz.
$q' \pm q =$	0	$\pm \gamma$	$\pm 2\gamma$	$\pm 3\gamma$	enz.

Hieruit volgt dat alle harmonischen, waarvan de rangcijfers deel uitmaken van één der beide rekenkundige reeksen .

$q' =$	q	$q+\gamma$	$q+2\gamma$	$q+3\gamma$	enz.
$q' =$	$-q+\gamma$	$-q+2\gamma$	$-q+3\gamma$		enz.

aanleiding zullen geven tot het optreden van eene reeks velden, welke *gemeenschappelijk* energie van deze harmonischen zullen opnemen, of aan deze afgeven.

Voor $w_0 = 0$ is blijkbaar $\gamma = 0$ en is dus de hier bedoelde samenwerking van meerdere harmonischen *niet* mogelijk.

Zijn $p\, w_0$ en ω onderling onmeetbaar, zoo worden de grondwaarden α, β en γ oneindig groot, en zal dus eveneens de samenwerking van een bepaalde harmonische van de orde q met eenige andere harmonische van de orde q' niet mogelijk zijn.

In het algemeen zullen we met dit laatste geval te doen hebben. Nemen we nu bovendien in aanmerking, dat we slechts rekening te houden hebben met een *beperkt* aantal harmonische componenten der statorspanning, zoo blijkt dat slechts bij een beperkt aantal waarden van w_0 samenwerking tusschen twee of meer dezer harmonische componenten zal mogelijk zijn.

Een bepaalde waarde van w_0, waarbij deze samenwerking mogelijk is, zal dus steeds worden voorafgegaan en gevolgd door *eene oneindige reeks* waarden, waarbij deze mogelijkheid niet bestaat.

Bij deze bepaalde waarde van w_0 zal een der stroomverdeelingen, optredende onder den invloed der q^e harmonische spanningscomponente, in pulsatie en in phaseverschil voor de opvolgende wikkelingsafdeelingen overeenstemmen met de q'^e harmonische spanningscomponente en omgekeerd, en onder de samenwerking van beide zal dus energie door de statorwikkeling worden opgenomen of afgegeven. Er zal dus bij de beschouwde waarde van w_0 in het entrefer eene energiestrooming optreden, welke bij eene uiterst kleine verandering van w_0 niet meer aanwezig is, en we zouden dus geneigd zijn te besluiten tot eene discontinuïteit in de werking der machine bij de beschouwde waarde van w_0.

Dat deze discontinuïteit slechts schijnbaar is, blijkt indien we den toestand beschouwen bij een waarde van w_0, welke van de boven beschouwde waarde *slechts uiterst weinig verschilt.*

De in de statorwikkeling geinduceerde stroom, waarvan de pulsatie $\omega_{1y} = \pm (q\,\omega + y\,n_2\,w_0)$ *ten naastenbij* overeenkomt met $q'\,\omega$ zal dan *op een bepaald oogenblik* bij benadering in phase zijn met de q'^e harmonische componente der statorspanning; op dat oogenblik veroorzaakt dus de samenwerking van beide een vergrooting der energie-opname van de statorwikkeling Op een volgend oogenblik zal echter een verschil in phase ontstaan zijn, dat geleidelijk toeneemt, tot na zekeren tijd de stroom met de pulsatie ω_{1y} in phase tegengesteld geworden is aan de q'^e harmonische componente der statorspanning; op dat oogenblik zal bijgevolg een verkleining der energie-opname optreden, gelijk aan de vergrooting der energie-opname in den eerst beschouwden toestand.

De samenwerking van de beschouwde stroom- en spanningscomponenten veroorzaakt bijgevolg *zwevingen* in de energieopname, *waarvan de gemiddelde waarde* $= 0$ *is.*

Nemen we nu aan, dat w_0 geleidelijk verandert, en wel zoodanig dat de pulsatie ω_{1y} steeds meer tot $q'\omega$ nadert, en ten slotte hieraan gelijk wordt. Op dat oogenblik zal het phaseverschil tusschen de beschouwde stroom- en spanningscomponenten een constante waarde aannemen, m. a. w. de zwevingen in de energie-opname zullen overgaan in eene periodieke opname of afgifte van energie, *wier gemiddelde waarde in het algemeen niet* $= 0$ *is.*

Blijkbaar hangt nu deze gemiddelde waarde af van de waarde, welke het phaseverschil tusschen de beschouwde stroom- en spanningscomponenten *toevallig* bezit *op het oogenblik, waarop de absolute gelijkheid der pulsaties intreedt.*

Genomen over alle mogelijke waarden van dit phaseverschil is de gemiddelde waarde dezer energie-opname echter weer $= 0$.

Wij zullen later aantoonen, dat de phase der stroomen met de pulsatie ω_{1y}, welke in de statorwikkeling geinduceerd worden, *afhankelijk is van den relatieven stand van stator- en rotorwikkeling op een bepaald oogenblik,* en wel zoodanig, dat indien we dezen relatieven stand aanduiden door een hoek θ_0, voor ieder dezer stroomen een bepaalde verandering van θ_0 met een hiermee evenredige verandering der phase gepaard gaat.

Wij zouden nu met het bovenbedoelde verschijnsel rekening te houden hebben, indien het optreden eener *absoluut* constante rotorsnelheid mogelijk was, m. a. w. indien de beweging van den rotor kon worden voorgesteld door eene vergelijking van den vorm:

$$\theta = w_0 t + \theta_0$$

waarin dus de constante θ_0 den rotorstand bij het begin der beweging bepaalt. Was in dit geval voldaan aan de conditie:

$$\omega_{1y} = q'\omega$$

zoo zou inderdaad onder de samenwerking der harmonischen q en q' eene energie-strooming kunnen optreden, waarvan de waarde afhankelijk zou zijn van θ_0.

Waar echter in werkelijkheid het optreden eener bepaalde rotorsnelheid slechts beteekenen *kan*, dat deze snelheid, zij het ook tusschen nauwe grenzen, eene reeks waarden doorloopt, wier *gemiddelde* $= w_0$ is, zullen we den invloed van eene bepaalde spanningscomponente op de verschijnselen, veroorzaakt door eene andere spanningscomponente geheel buiten beschouwing mogen laten!

Evenals bij collector-motoren zullen we dus ook bij motoren met kortsluit- of sleepringanker de verschijnselen, optredende onder den invloed eener niet sinusoidale spanning, kunnen bepalen door superpositie der verschijnselen, optredende onder den invloed der afzonderlijke harmonische componenten.

Terwijl evenwel bij den collectormotor eene sinusoidale spanning slechts sinusoidale stroomen van dezelfde frequentie kan doen optreden, zal bij een kortsluit- of sleepringmotor eene sinusoidale spanning in het algemeen *niet sinusoidale* stroomen, zoowel in de statorwikkeling als in de rotorwikkeling doen ontstaan, welke stroomen zelfs niet als *periodiek* veranderlijk zullen mogen beschouwd worden.

HOOFDSTUK XIII.

Bepaling der constanten K_u voor eene groefwikkeling.

Zij het aantal groeven per wikkelings-afdeeling $= m$.

De hartafstand van twee opvolgende groeven bedraagt dan:

$$\frac{\alpha}{m} = \frac{2\pi}{m\,n}$$

de breedte der groeven:

$$\varepsilon\,\frac{\alpha}{m} = \varepsilon\,\frac{2\pi}{m\,n}$$

waarin ε een positieve constante is < 1.

De functie $\varkappa$, optredende in de uitdrukking voor K_u, is zoowel binnen de groeven als binnen de tanden constant. Binnen de groeven heeft zij de waarde:

$$\varkappa = \frac{\mathfrak{N}}{2\,\pi\,\varepsilon}$$

terwijl binnen de tanden:

$$\varkappa = 0$$

is. Uit:

$$K_u = \frac{2\,n}{\pi\,\mathfrak{N}} \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \varkappa \cos u\,\theta\,d\,\theta$$

volgt, mits wij de grenslijnen der afdeelingen aannemen door de middens der tanden:

$$K_u = \frac{n}{\pi^2\,\varepsilon} \sum_{s=1}^{s=m} \int_{-\frac{\alpha}{2}+\frac{2s-1}{2}\frac{\alpha}{m}-\frac{\varepsilon}{2}\frac{\alpha}{m}}^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{2s-1}{2}\frac{\alpha}{m}+\frac{\varepsilon}{2}\frac{\alpha}{m}} \cos u\,\theta\,d\,\theta$$

$$= \frac{2\,n}{\pi^2\,u\,\varepsilon} \sin u\,\frac{\varepsilon\,\alpha}{2\,m} \sum_{s=1}^{s=m} \cos u\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{2\,s-1}{2}\,\frac{\alpha}{m}\right)$$

Voor de bepaling der in deze uitdrukking optredende som naar s gaan we als volgt te werk:

$$2 \sin \frac{u\alpha}{2m} \sum_{s=1}^{s=m} \cos u \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{2s-1}{2} \frac{\alpha}{m} \right) =$$

$$\sum_{s=1}^{s=m} \sin u \left\{ \frac{\alpha}{2} - (s-1) \frac{\alpha}{m} \right\} - \sum_{s=1}^{s=m} \sin u \left\{ \frac{\alpha}{2} - s \frac{\alpha}{m} \right\} =$$

$$\sum_{s=0}^{s=m-1} \sin u \left\{ \frac{\alpha}{2} - s \frac{\alpha}{m} \right\} - \sum_{s=1}^{s=m} \sin u \left\{ \frac{\alpha}{2} - s \frac{\alpha}{m} \right\} = 2 \sin u \frac{\alpha}{2}$$

De uitdrukking voor K_u gaat thans over in:

$$K_u = \frac{2n}{\pi^2 u \varepsilon} \sin u \frac{\alpha}{2} \sin u \frac{\varepsilon \alpha}{2m} \operatorname{cosec} u \frac{\alpha}{2m}$$

of bij invoering der functie Ψ, bepaald door:

$$\Psi(x) = \frac{\sin x}{x}$$

$$K_u = \frac{2}{\pi} \Psi\left(u \frac{\pi}{n}\right) \frac{\Psi\left(u \frac{\varepsilon \pi}{mn}\right)}{\Psi\left(u \frac{\pi}{mn}\right)}$$

In het geval eener gelijkmatig verdeelde wikkeling is $\varepsilon = 1$, en gaat bijgevolg de uitdrukking voor K_u over in:

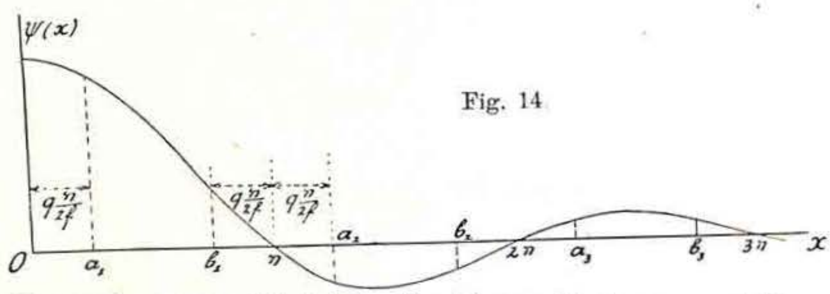
$$K_u = \frac{2}{\pi} \Psi\left(u \frac{\pi}{n}\right)$$

We merken op, dat bij onbepaalde toename van m, zoowel $\Psi\left(u \frac{\varepsilon \pi}{mn}\right)$ als $\Psi\left(u \frac{\pi}{mn}\right)$ tot de limiet 1 naderen. De algemeene uitdrukking voor K_u zal dus meer naderen tot die, welke geldt voor eene gelijkmatig verdeelde wikkeling, naarmate het aantal groeven per wikkelings-afdeeling grooter is.

Indien het aantal wikkelings-afdeelingen n zelf onbepaald toeneemt, zal bovendien, aangezien u eindig blijft, $\Psi\left(u \frac{\pi}{n}\right)$ tot de limiet 1 naderen, en de uitdrukking voor K_u zal dus voor $n = \infty$ overgaan in:

$$K_u = \frac{2}{\pi}$$

m. a. w. bij eene oneindig-phasige wikkeling hebben alle wikkelingsconstanten dezelfde waarde, nl $\frac{2}{\pi}$.



Het verloop van $\Psi(x)$ is in fig. 14 graphisch voorgesteld.

Aangezien

$$\Psi(x) = \Psi(-x)$$

hebben we het verloop der functie slechts voor positieve waarden van x te onderzoeken.

Voor $x = 0$ is $\Psi(x) = 1$. Bij verandering van x van 0 tot π neemt $\Psi(x)$ geleidelijk op 0 af, en wordt vervolgens negatief om voor $x = 2\pi$ weer door 0 te gaan enz. Telkens wanneer x een veelvoud is van π, wordt $\Psi(x) = 0$, en verandert van teeken. Tusschen twee opvolgende waarden 0 van $\Psi(x)$ bereikt deze functie telkens één maximum resp. één minimum.

De conditie, waaraan x in deze maxima en minima voldoet is blijkbaar:

$$x = \operatorname{tg} x$$

zoodat voor deze maxima en minima de betrekking geldt:

$$\Psi(x) = \pm (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

De absolute waarde der opvolgende maxima en minima neemt dus voortdurend af.

Merken we nu op, dat voor een systeem enkelvoudige harmonische stroomen of electromotorische krachten, optredende in eene $2p$-polige f-phasige wikkeling, waarvoor het phase-verschil tusschen de opvolgende wikkelings-afdeelingen $q\frac{\pi}{f}$ bedraagt, de waarden van u voldoen aan de conditie:

$$u = pq + xn$$

waarin $n = 2pf$, zoo volgt hieruit:

$$\sin u \frac{\pi}{n} = \pm \sin p q \frac{\pi}{n} = \pm \sin q \frac{\pi}{2f}$$

en dus:

$$\Psi\left(u \frac{\pi}{n}\right) = \pm \frac{\sin q \frac{\pi}{2f}}{u \frac{\pi}{n}}$$

De absolute waarden van $\Psi\left(u \frac{\pi}{n}\right)$ zijn bijgevolg voor de waardenreeks van u, overeenkomende met een bepaald systeem enkelvoudige harmonische stroomen of electromotorische krachten *omgekeerd evenredig met die van u*. Hetzelfde geldt dus *bij een gelijkmatig verdeelde wikkeling* eveneens voor de wikkelingsconstanten K_u.

Bepalen we in de graphische voorstelling van $\Psi(x)$ op de x-as de punten a_1, a_2, a_3 enz. door van uit de punten $x = 0$, π, 2π enz. stukken $= q \frac{\pi}{2f}$ in positieven zin uit te zetten, zoo leveren ons de ordinaten dezer punten de waarden van $\Psi\left(u \frac{\pi}{n}\right)$ op voor de positieve waarden van u, overeenkomende met de beschouwde waarde van q.

Daar verder $\Psi(x)$ symmetrisch is ten opzichte van $x = 0$, vinden we de waarden van $\Psi\left(u \frac{\pi}{n}\right)$ voor de negatieve waarden van u, als de ordinaten van de punten b_1, b_2, b_3, enz., welke we verkrijgen door de stukken $q \frac{\pi}{2f}$ in negatieven zin van uit de punten $x = \pi$, 2π, 3π enz. uit te zetten.

De punten a en b liggen bijgevolg twee aan twee symmetrisch ten opzichte van de punten, waarin $\Psi(x) = 0$ wordt.

In het bijzondere geval dat q een veelvoud van $2f$ is zullen de punten a en b twee aan twee in de laatstgenoemde punten samenvallen, en zijn bijgevolg alle waarden van $\Psi\left(u \frac{\pi}{n}\right)$, en dus van $K_u = 0$ met uitzondering van die, welke overeenkomt met $u = 0$, waarvoor:

$$K_0 = \frac{2}{\pi}\,\Psi(0) = \frac{2}{\pi}$$

Blijkbaar heeft deze waarde betrekking op een logarithmisch veld, en we vinden dus dat een dergelijk veld nimmer te samen met een of meer sinusoidale velden onder den invloed van een systeem enkelvoudige harmonische stroomen zal kunnen optreden.

Overigens kunnen we, zooals reeds in hoofdstuk X werd aangetoond, dit bijzondere geval practisch steeds buiten beschouwing laten.

In werkelijkheid zullen dus steeds tusschen iedere twee opvolgende veelvouden van π één der punten a en één der punten b optreden, welke eene positieve en eene negatieve waarde van u bepalen. Aangezien nu $\Psi(x)$ van af $x = 0$ tot $x = \pi$ positief is, en telkens van teeken verandert bij het passeeren van een waarde van x, welke een veelvoud is van π, zoo zal bij rangschikking der waarden van u, overeenkomende met eene bepaalde waarde van q, naar hunne absolute grootte $\Psi\left(u\frac{\pi}{n}\right)$ positief zijn voor de beide eerste waarden van u, en telkens voor ieder volgend paar waarden van u van teeken verwisselen.

In het bijzondere geval dat q een oneven veelvoud van f is vallen de punten a en b twee aan twee samen in de punten $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ enz.; m. a. w. de velden, overeenkomende met de door de punten a en b bepaalde waarden van u, worden in dit geval, afgezien van hun verschil in draaiingsrichting, aan elkaar gelijk.

Aan de hier bedoelde voorwaarde wordt blijkbaar voldaan door alle harmonische componenten van een eenphasen-systeem; bij een meerphasen-systeem slechts door die harmonische componenten, welke op zichzelf als grondcomponenten van een eenphasen-systeem kunnen beschouwd worden, d. w. z., mits f oneven is, door de harmonischen van de orde f, $3f$, $5f$ enz.

Voor eene $2p$-polige f-phasige wikkeling zullen we alle *mogelijke* waarden van u, zijnde alle *oneven* veelvouden van $\pm\, p$, kunnen rangschikken in f rekenkundige reeksen, waarvan het verschil $2pf$ bedraagt.

Deze reeksen van u komen dan overeen met de 1e tot en met de $2f—1$e harmonische componenten van een in de wikkeling optredend f-phasen-systeem stroomen.

Twee van deze harmonische componenten, nl. die van de orde a en $2f - a$, waarin we onder a verstaan een *oneven positief* getal, dat hoogstens gelijk is aan f, zullen, zooals we reeds in hoofdstuk X aantoonden, op het teeken na dezelfde waardenreeks voor u opleveren, waarbij de kleinste absolute waarde van u gelijk is aan $a p$. Deze harmonische componenten vormen dus een systeem stroomen, waarvoor het phaseverschil in twee opvolgende wikkelings-afdeelingen gelijk is aan $\pm a p \frac{2\pi}{n} = \pm a \frac{\pi}{f}$, en, *mits a op f deelbaar is*, zijn zij dus op zichzelf te beschouwen als de grondcomponenten van een $\frac{f}{a}$ phasen-systeem, optredende in eene $2ap$-polige wikkeling, waarbij in aanmerking te nemen is, dat voor de beide beschouwde harmonischen de phasen elkaar in de wikkeling in omgekeerden zin opvolgen. Aangezien bovendien met de kleinste absolute waarde van u de grootste waarde van $\Psi\left(u \frac{\pi}{n}\right)$, en dus van K_u, overeenkomt zullen we het overeenkomstige magnetisch veld aanduiden als het hoofdveld, opgeleverd door de beschouwde harmonische componente, terwijl we het hoofdveld der grondcomponente nader zullen aanduiden als het hoofdveld der machine.

Het hoofdveld der machine is dus $2p$-polig, terwijl alle harmonischen, waarvan het rangcijfer behoort tot een der beide reeksen :

a	$2f + a$	$4f + a$	enz.
	$2f - a$	$4f - a$	enz.

een $2ap$-polig hoofdveld opleveren.

Voor dit hoofdveld is:

$$\Psi\left(u \frac{\pi}{n}\right) = \Psi\left(a\, p \frac{\pi}{n}\right) = \Psi\left(\frac{a}{f} \frac{\pi}{2}\right)$$

waarin $\frac{a}{f}$ alle waarden kan aannemen tusschen 0 en 1. De overeenkomstige grenswaarden van $\Psi\left(u\frac{\pi}{n}\right)$ zijn bijgevolg:

$$\lim_{x=0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \text{en} \qquad \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

De eerstgenoemde grenswaarde kan blijkbaar slechts benaderd worden in het geval van een zéér groot (theoretisch oneindig groot) aantal phasen. Hierbij mag dus voor alle hoofdvelden worden aangenomen:

$$K_u = K_0 = \frac{2}{\pi}$$

terwijl deze grootheden voor alle nevenvelden $= 0$ zijn.

De tweede grenswaarde zal optreden voor alle harmonischen, wier rangcijfer een oneven veelvoud van f is, en die dus, op zichzelf beschouwd, de grondcomponente van een eenphasen-systeem vormen

Ten aanzien van de practisch gebruikelijke stroomsystemen kunnen we omtrent de mogelijke waarden van a het volgende opmerken.

Bij een driephasen-systeem kan a slechts de waarden 1 en 3 bezitten; bijgevolg kunnen in een driephasen-wikkeling slechts zoodanige harmonische stroomsystemen optreden, welke op zichzelf kunnen beschouwd worden als grondcomponente hetzij van een driephasen- òf van een eenphasen-systeem. In het eerste geval verkeeren de harmonischen, wier rangcijfer behoort tot een der reeksen:

$$q = \quad 1 \qquad 7 \qquad 13 \quad \text{enz.}$$

$$q = \qquad\quad 5 \qquad 11 \quad \text{enz.}$$

waarbij de opvolging der phasen dezelfde is voor harmonischen, welke behooren tot dezelfde reeks, doch omgekeerd voor harmonischen welke tot verschillende reeksen behooren.

Daarentegen verkeeren in het tweede geval de harmonischen

$$q = \quad 3 \qquad 9 \qquad 15 \quad \text{enz.}$$

welke ten opzichte van de als $6p$-polig beschouwde wikkeling de grondcomponente van een éénphasen-systeem vormen.

Bij een tweephasen-systeem kan a slechts de waarde 1 aannemen; alle harmonische stroomsystemen, welke kunnen optreden in een tweephasen-wikkeling, vormen dus, op zichzelf beschouwd, de grondcomponente van een tweephasen-systeem. Hierbij is eveneens de opvolging der phasen verschillend voor de harmonischen der beide reeksen:

$q =$	1	5	9	enz.
$q =$		3	7	enz.

Bij een eenphasen-systeem kan a eveneens slechts de waarde 1 bezitten; zooals trouwens van zelf spreekt, kunnen dus in eene eenphasen-wikkeling slechts eenphasen stroomsystemen optreden.

Uit het voorgaande volgt, dat wij voor de drie practisch gebruikelijke stroomsystemen *alle* waarden van K_u kennen, zoodra we deze constanten bepaald hebben voor de grondcomponenten dezer systemen.

Voor de hoofdvelden der grondcomponenten is:

$$\Psi\left(u\,\frac{\pi}{n}\right) = \Psi\left(p\,\frac{\pi}{n}\right) = \Psi\left(\frac{\pi}{2f}\right)$$

voor een driephasen-systeem is bijgevolg:

$$\Psi\left(p\,\frac{\pi}{n}\right) = \frac{6}{\pi}\sin\frac{\pi}{6} = 0{,}955$$

voor een tweephasen-systeem:

$$\Psi\left(p\,\frac{\pi}{n}\right) = \frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi}{4} = 0{,}900$$

voor een eenphasen-systeem:

$$\Psi\left(p\,\frac{\pi}{n}\right) = \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2} = 0{,}637$$

In het geval van een gelijkmatig verdeelde wikkeling vinden we bijgevolg voor de waarden der constante K_p, bij een driephasen-systeem:

$$K_p = 0{,}955 \times \frac{2}{\pi} = 0{,}608$$

bij een tweephasen-systeem:

$$K_p = 0{,}900 \times \frac{2}{\pi} = 0{,}573$$

bij een eenphasen-systeem:

$$K_p = 0{,}637 \times \frac{2}{\pi} = 0{,}405$$

Door op te merken, dat voor eene bepaalde waardenreeks van u de absolute waarde van $\Psi\left(u\frac{\pi}{n}\right)$ omgekeerd evenredig is met die van u, en rekening houdende met den in het voorgaande vastgestelden regel betreffende het teeken van $\Psi\left(u\frac{\pi}{n}\right)$, kunnen we thans uit de boven bepaalde waarden van K_p alle overige waarden van K_u voor de drie beschouwde systemen afleiden. Een aantal der op deze wijze bepaalde waarden van K_u zijn in onderstaande tabel vereenigd.

Waarden van K_u voor gelijkmatig verdeelde wikkelingen.

$u = \pm$	p	$3p$	$5p$	$7p$	$9p$	$11p$	$13p$	$15p$	$17p$
Driephasen.	0,608	0,405	0,122	− 0,087	− 0,135	− 0,055	0,047	0,081	0,036
Tweephasen	0,573	0,191	− 0,115	− 0,082	0,064	0,052	− 0,044	− 0,038	0,034
Eenphase. .	0,405	− 0,135	0,081	− 0,058	0,045	− 0,037	0,031	− 0,027	0,024

Op grond van de hier bepaalde waarden van K_u mogen we reeds dadelijk besluiten, dat zelfs bij een gelijkmatig verdeelde wikkeling de constanten der nevenvelden niet in die mate klein zijn ten opzichte der constante van het hoofdveld, dat hierdoor op zichzelf een verwaarloozing der nevenvelden zou gerechtvaardigd zijn.

Van de drie beschouwde systemen levert blijkbaar het driephasen-systeem de gunstigste verhoudingen op, doch zelfs hierbij is voor de grondcomponente de waarde van K_u voor het eerste nevenveld nog 20 % der waarde van K_u voor het hoofdveld.

We zullen thans overgaan tot eene nadere beschouwing van de algemeene uitdrukking voor K_u in het geval van eene groefwikkeling:

$$K_u = \frac{2}{\pi} \Psi\left(u \frac{\pi}{n}\right) \frac{\Psi\left(u \frac{\varepsilon \pi}{m n}\right)}{\Psi\left(u \frac{\pi}{m n}\right)}$$

welke uitdrukking ons in staat stelt bij gegeven aantal groeven per pool en per phase m, en bij gegeven verhouding van groefbreedte tot groefsteek ε, de wikkelingsconstanten voor een bepaald systeem vast te stellen.

Met het oog op het groote aantal mogelijkheden in de aanname van m en ε zullen we eene dergelijke bepaling hier niet uitvoeren, te meer daar het resultaat der berekening toch niet tot het maken van *algemeen* geldige gevolgtrekkingen zou kunnen leiden.

In plaats daarvan zullen we nagaan onder welke omstandigheden de *ongunstigste* verhoudingen tusschen de waarden van K_u voor hoofdveld en nevenvelden zullen kunnen optreden, m. a. w. de constanten der nevenvelden zoo groot mogelijk worden in vergelijking met de constante van het hoofdveld.

Vooreerst merken we op, dat de waarden van K_u voor het hoofdveld en voor het eerste (in omgekeerden zin roteerende) nevenveld bij eene groefwikkeling *grooter* zijn dan bij eene gelijkmatig verdeelde wikkeling. Voor beide velden is nl. $\pm u \frac{\pi}{n}$ gelegen tusschen 0 en π, dus binnen het gebied waarover $\Psi(x)$ bij toenemende x afneemt.

Aangezien nu in absolute waarde:

$$u \frac{\varepsilon \pi}{m n} < u \frac{\pi}{m n} < u \frac{\pi}{n}$$

is

$$\Psi\left(u \frac{\varepsilon \pi}{m n}\right) > \Psi\left(u \frac{\pi}{m n}\right) > \Psi\left(u \frac{\pi}{n}\right)$$

en bijgevolg:

$$\Psi\left(u \frac{\pi}{n}\right) < \Psi\left(u \frac{\pi}{n}\right) \frac{\Psi\left(u \frac{\varepsilon \pi}{m n}\right)}{\Psi\left(u \frac{\pi}{m n}\right)} < \Psi\left(u \frac{\varepsilon \pi}{m n}\right)$$

De verdeeling der wikkeling over groeven heeft dus ten gevolge dat de constante voor het hoofdveld nader gebracht wordt tot de theoretisch bereikbare limiet $\frac{2}{\pi}$.

Voor de constanten der overige nevenvelden kan, zooals gemakkelijk valt in te zien, de verdeeling der wikkeling over groeven zoowel een vergrooting als een verkleining, alsmede een verandering van teeken ten gevolge hebben. Het is nu van belang na te gaan tot welke maximale waarden deze constanten in het ongunstigste geval kunnen *vergroot* worden!

Beschouwen we de verhouding:

$$\frac{\Psi\left(u \frac{\pi}{n}\right)}{\Psi\left(u \frac{\pi}{m\,n}\right)}$$

Aangezien m een geheel getal is, kan de noemer dezer breuk niet $= 0$ worden, tenzij ook de teller $= 0$ wordt, in welk geval de verhouding zelf *eindig* blijft. De grootst mogelijke waarden der beschouwde verhouding zijn dus de mathematische maxima en minima der functie:

$$\frac{\Psi\,(x)}{\Psi\left(\frac{x}{m}\right)} = \frac{\sin\, x}{m \sin\, \frac{x}{m}}$$

Deze maxima en minima treden op voor:

$$m \sin \frac{x}{m} \cos x - \sin x \cos \frac{x}{m} = 0$$

waaruit volgt:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{m} = \frac{1}{m} \operatorname{tg} x$$

en dus:

$$\sin \frac{x}{m} = \pm \frac{\frac{1}{m} \operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \frac{1}{m^2} \operatorname{tg}^2 x}}$$

Wij vinden bijgevolg voor de absolute waarden der maxima en minima:

$$\frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} \sqrt{1 + \frac{1}{m^2} \operatorname{tg}^2 x} = \sqrt{\cos^2 x + \frac{1}{m^2} \sin^2 x}$$

Deze laatste uitdrukking is *hoogstens* $= 1$, nl. voor $m = 1$, zoodat we tot de conclusie komen, dat de grootste absolute waarde, welke de verhouding

$$\frac{\Psi\left(u \dfrac{\pi}{n}\right)}{\Psi\left(u \dfrac{\pi}{m\,n}\right)}$$

kan aannemen, hoogstens gelijk is aan de eenheid.

Hieruit volgt echter onmiddellijk, dat onder de meest ongunstige omstandigheden de wikkelingsconstanten nimmer de waarde:

$$K_u = \frac{2}{\pi} \Psi\left(u \frac{\varepsilon\,\pi}{m\,n}\right)$$

zullen overschrijden

Blijkbaar treden deze meest ongunstige omstandigheden op bij een ééngroefswikkeling, dus voor $m = 1$, waarvoor inderdaad de uitdrukking voor K_u overgaat in:

$$K_u = \frac{2}{\pi} \Psi\left(u \frac{\varepsilon\,\pi}{n}\right)$$

welke voor dit geval met de bovenstaande uitdrukking overeenstemt.

Uit deze laatste uitdrukking voor K_u volgt, dat naarmate ε kleiner is, van een steeds grooter wordend aantal der opvolgende nevenvelden de constanten K_u zullen *vergroot* worden, en deze waarden van K_u steeds meer tot de theoretische grenswaarde $\frac{2}{\pi}$ zullen naderen.

Inderdaad worden dan ook voor het theoretische grensgeval $\varepsilon = 0$, dus indien wij ons de groef voorstellen als een oneindig nauwe spleet, *alle waarden van K_u gelijk aan de limietwaarde $\frac{2}{\pi}$*.

Het resultaat onzer beschouwingen is dus, dat we voor twee grensgevallen eene eenvoudige betrekking gevonden hebben tusschen de waarden der wikkelingsconstanten, geldende voor een reeks roteerende velden, ontstaande onder den invloed eener bepaalde harmonische componente der wisselstroomen.

Het eerste grensgeval is dat eener gelijkmatig verdeelde wikkeling, waarbij de reeks waarden van $\pm K_u$ omgekeerd evenredig zijn met de overeenkomstige waarden van $\pm u$.

Het tweede grensgeval is dat eener éénspleetswikkeling, waarvoor K_u eenvoudig eene van u onafhankelijke waarde bezit $= \frac{2}{\pi}$.

Bij de in de practijk voorkomende wikkelingen zullen we te doen hebben met verhoudingen, welke het midden houden tusschen die, welke in beide grensgevallen optreden ; de verhoudingen van de constanten der nevenvelden tot die van het hoofdveld zullen in het algemeen ongunstiger zijn dan bij een gelijkmatig verdeelde wikkeling, doch gunstiger dan bij de boven beschouwde éénspleetswikkeling.

HOOFDSTUK XIV.

De vergelijkingen der asynchrone motoren.

Het hoofdvraagstuk in de theorie der asynchrone motoren is de bepaling voor een gegeven klemspanning van het motorkoppel en van de stroom- resp. energie-opname, beide als functies der omwentelingssnelheid.

Aangezien evenwel het motorkoppel met behulp der in hoofdstuk IV afgeleide betrekkingen onmiddellijk uit de verdeeling van het magnetisch veld kan worden bepaald, terwijl dit laatste kan worden vastgesteld, zoodra de stroomverdeelingen in de beide wikkelingen bekend zijn, komt het vraagstuk neer op de bepaling dezer stroomverdeelingen als functies der omwentelingssnelheid.

Voeren we *voor alle mogelijke waarden der stroomfrequentie* de in de rotor- en in de statorwikkeling optredende stroomcomponenten als onbekenden van het vraagstuk in, zoo kunnen we achtereenvolgens in deze onbekenden uitdrukken:

de roteerende magnetomotorische krachten en velden, ontstaande onder den invloed der beide stroomverdeelingen,

de door deze velden in de wikkelingen geïnduceerde electromotorische krachten, en ten slotte

de stroomverdeelingen, welke onder den invloed dezer electromotorische krachten en van de klemspanning in de wikkelingen optreden, waarbij iedere wikkelings-afdeeling moet worden beschouwd als een *inductievrije* geleider.

Aangezien nu de op deze wijze bepaalde stroomverdeelingen identisch moeten zijn met de werkelijke stroomverdeelingen, welke we als onbekenden van het vraagstuk invoerden, levert de gelijkstelling van beide steeds het vereischte aantal vergelijkingen ter oplossing van het vraagstuk!

Blijkens onze beschouwingen in hoofdstuk XII mogen we den toestand, optredende bij een bepaalde snelheid onder den invloed eener niet sinusoidale klemspanning steeds beschouwen als de superpositie der toestanden, welke bij dezelfde snelheid zouden optreden onder den invloed van ieder der harmonische componenten afzonderlijk. Hieruit volgt, dat het bovenbedoelde vraagstuk volledig is opgelost, zoodra deze oplossing is vastgesteld voor eene willekeurige harmonische componente der klemspanning.

Bij den collector-motor komen alle optredende stroomcomponenten in frequentie overeen met de componenten der klemspanning. We hebben hierbij dus steeds te doen met een *beperkt* aantal onbekende stroomverdeelingen, dat, zooals nader blijken zal, afhankelijk is van het aantal groepen collector-borstels.

Bij sleepring- en kortsluitmotoren daarentegen treden zoowel in de rotor- als in de statorwikkeling *een oneindig aantal* stroomcomponenten op van verschillende frequentie, wier bepaling dus de oplossing vereischt van een oneindig aantal vergelijkingen met een oneindig aantal onbekenden.

De vergelijkingen, geldende voor beide groepen van motoren, zullen we aan eene afzonderlijke beschouwing onderwerpen.

a. *Collector-motoren.*

In het eenvoudigste geval, dat we ons van den collector-motor denken kunnen, wordt de rotorwikkeling door de collectorborstels verdeeld in een aantal gelijke afdeelingen, overeenkomende met het aantal afdeelingen n der statorwikkeling.

Voor een $2p$-poligen f-phasigen motor is dus voor beide wikkelingen:

$$n = 2pf$$

Het electrisch verband tusschen beide wikkelingen kan bij een dergelijken motor slechts op enkelvoudige wijze tot stand gebracht worden, nl. in serie-schakeling òf in parallel-schakeling, hetzij direct, hetzij indirect door tusschenkomst van een transformator. Hierbij is het geval van kortsluiting der borstels als grensgeval te beschouwen van indirecte parallel-schakeling, nl. met de transformatie-verhouding 0.

Worden meerdere groepen borstels op den collector aangebracht, zoo verdeelt iedere groep de rotorwikkeling overeenkomstig de verdeeling der statorwikkeling. Het electrisch verband tusschen beide wikkelingen zal in dit geval een meervoudig kunnen zijn: het zal bijv. mogelijk zijn de rotorwikkeling met behulp eener bepaalde borstelgroep met de statorwikkeling parallel, en tegelijkertijd met behulp eener andere borstelgroep in série te schakelen.

Hoe nu evenwel ook deze verbindingen tusschen beide wikkelingen zijn, steeds zullen voor de inductie der q^e harmonische componenten van een f-phasen-systeem spanningen, dus met de pulsatie $q\omega$, een reeks roteerende velden moeten optreden, waarvan het aantal poolparen $\pm u$ voldoet aan de conditie:

$$u = pq + xn$$

waarin x een willekeurig geheel getal is, terwijl de rotatiesnelheid dezer velden bepaald is door:

$$w = \frac{q\omega}{u}$$

Welke der rotorverdeelingen, tot stand gebracht door de verschillende borstelgroepen, men nu ook beschouwt, steeds zal in de opvolgende afdeelingen door de bovenbedoelde velden een systeem electromotorische krachten geïnduceerd worden, welke in frequentie en phaseverschil overeenkomen met de q^e harmonischen van het systeem spanningen, dat aan de klemmen van den motor is aangelegd.

De in de rotorwikkeling optredende stroomverdeeling zal dus steeds kunnen beschouwd worden als de superpositie van een aantal f-phasige stroomverdeelingen met de pulsatie $q\omega$, optredende in de door de afzonderlijke borstelgroepen tot stand gebrachte afdeelingen der wikkeling.

We zullen vooreerst het geval beschouwen dat de rotorwikkeling door de borstels slechts op één wijze in n afdeelingen verdeeld wordt.

Zij de stroomsterkte in een bepaalde afdeeling der statorwikkeling:

$$i_1 = I_1 \sqrt{2} \cos q(\omega t - \theta_1)$$

in een bepaalde afdeeling der rotorwikkeling:

$$i_2 = I_2 \sqrt{2} \cos q(\omega t - \theta_2)$$

en duiden we de hoekverplaatsing der beschouwde rotorafdeeling ten opzichte van de beschouwde statorafdeeling aan door θ_0.

Indien we voor de statorwikkeling het aantal draden aanduiden door $\mathfrak{N}_1$, de wikkelingsconstanten door K_{1u}, voor de rotorwikkeling het aantal draden door $\mathfrak{N}_2$, de wikkelingsconstanten door K_{2u}, zoo zijn de magnetomotorische krachten, opgeleverd door de onderstelde stroomverdeelingen, volgens de in hoofdstuk X gevonden betrekkingen bepaald door:

$$\mathbf{M}_{1u} = \mathbf{m}_{1u} \frac{2\,\pi\,K_{1u}\,\mathfrak{N}_1\,I_1\sqrt{2}}{u}$$

en

$$\mathbf{M}_{2u} = \mathbf{m}_{2u} \frac{2\,\pi\,K_{2u}\,\mathfrak{N}_2\,I_2\sqrt{2}}{u}$$

waarin de grootheden $\mathbf{m}_{1u}$ en $\mathbf{m}_{2u}$ eenheidsvectoren voorstellen, welke de rotatiebewegingen uitvoeren, overeenkomende met die welke ten opzichte van het midden der beschouwde statorafdeeling beschreven worden door de vergelijkingen:

$$u\,\theta = q\,(\omega\,t - \varphi_1) - \frac{\pi}{2}$$

en

$$u\,\theta = q\,(\omega\,t - \varphi_2) - \frac{\pi}{2} + u\,\theta_0$$

ten opzichte van het midden der beschouwde rotorafdeeling door de vergelijkingen:

$$u\,\theta = q\,(\omega\,t - \varphi_1) - \frac{\pi}{2} - u\,\theta_0$$

en

$$u\,\theta = q\,(\omega\,t - \varphi_2) - \frac{\pi}{2}$$

Duiden we de reluctanties van den restkrachtstroom en van de beide lekkrachtstroomen in het $\pm\,2u$-polige veld aan door:

$$R_u,\ R_{1u} \text{ en } R_{2u}$$

zoo is de overeenkomstige statorkrachtstroom bepaald door:

$$\mathbf{N}_{su} = \frac{\mathbf{M}_{1u} + \mathbf{M}_{2u}}{R_u} + \frac{\mathbf{M}_{1u}}{R_{1u}}$$

de rotorkrachtstroom door:

$$\mathbf{N}_{ru} = \frac{\mathbf{M}_{1u} + \mathbf{M}_{2u}}{R_u} + \frac{\mathbf{M}_{2u}}{R_{2u}}$$

of, na invoering der bovenstaande uitdrukkingen voor $\mathbf{M}_{1u}$ en $\mathbf{M}_{2u}$:

$$\mathbf{N}_{su} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{u}\left\{\mathbf{m}_{1u}\,K_{1u}\,\mathfrak{N}_1\,I_1\left(\frac{1}{R_u}+\frac{1}{R_{1u}}\right)+\mathbf{m}_{2u}\,K_{2u}\,\mathfrak{N}_2\,I_2\,\frac{1}{R_u}\right\}$$

$$\mathbf{N}_{ru} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{u}\left\{\mathbf{m}_{1u}\,K_{1u}\,\mathfrak{N}_1\,I_1\,\frac{1}{R_u}+\mathbf{m}_{2u}\,K_{2u}\,\mathfrak{N}_2\,I_2\left(\frac{1}{R_u}+\frac{1}{R_{2u}}\right)\right\}$$

Voor ieder der beide deelen, waaruit zoowel de rotor- als de statorkrachtstroom is saamgesteld, kunnen we de in de wikkelingen geïnduceerde electromotorische krachten bepalen met behulp der in hoofdstuk XI afgeleide betrekkingen.

Houden we in het oog, dat het product van aantal poolparen en relatieve omwentelingssnelheid van het veld voor de statorwikkeling gelijk is aan

$$\pm\, q\,\omega$$

voor de rotorwikkeling aan:

$$\pm\,(q\,\omega - u\,w_0)$$

waarin het + of — teeken geldt, alnaarmate u positief of negatief is, zoo vinden we onmiddellijk voor de electromotorische kracht, geïnduceerd in de beschouwde afdeeling der statorwikkeling:

$$\mathcal{E}_{1u} = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{2}\,\frac{\mathfrak{N}_1}{n}\,\frac{K_{1u}}{\pm u}\,q\,\omega\,\left\{K_{1u}\,\mathfrak{N}_1\,I_1\left(\frac{1}{R_u}+\frac{1}{R_{1u}}\right)\sin\,q\,(\omega\,t-\theta_1)\right.$$
$$\left.+\,K_{2u}\,\mathfrak{N}_2\,I_2\,\frac{1}{R_u}\,\sin\left\{q\,(\omega\,t-\theta_2)+u\,\theta_0\right\}\right\}$$

voor de electromotorische kracht, geïnduceerd in de beschouwde afdeeling der rotorwikkeling:

$$\mathcal{E}_{2u} = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{2}\,\frac{\mathfrak{N}_2}{n}\,\frac{K_{2u}}{\pm u}(q\,\omega - u\,w_0)\left\{K_{1u}\,\mathfrak{N}_1\,I_1\,\frac{1}{R_u}\sin\left\{q(\omega\,t-\theta_1)-u\,\theta_0\right\}\right.$$
$$\left.+\,K_{2u}\,\mathfrak{N}_2\,I_2\left(\frac{1}{R_u}+\frac{1}{R_{2u}}\right)\sin\,q\,(\omega\,t-\theta_2)\right\}$$

Om de totale waarde der electromotorische krachten met de pulsatie $q\,\omega$ te bepalen, welke in de wikkelingen geïnduceerd worden, hebben we bovenstaande uitdrukkingen te sommeeren voor alle waarden van u, behoorende bij de beschouwde waarde van q, zijnde:

$$u = p\,q + x\,n$$

voor alle waarden van x tusschen $-\infty$ en $+\infty$.

Het resultaat dezer sommatie is, voor de statorwikkeling:

$$\mathfrak{E}_1 = \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{2}\,\frac{\mathfrak{N}_1}{n}\,q\,\omega\,\Bigg\{\mathfrak{N}_1 I_1 \sin q\,(\omega t - \theta_1) \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_{1u}^2}{\pm u}\left(\frac{1}{R_u} + \frac{1}{R_{1u}}\right)$$

$$+\,\mathfrak{N}_2 I_2 \sin q\,(\omega t - \theta_2) \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_{1u}\,K_{2u}}{\pm u}\,\frac{1}{R_u} \cos u\,\theta_0$$

$$+\,\mathfrak{N}_2 I_2 \cos q\,(\omega t - \theta_2) \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_{1u}\,K_{2u}}{\pm u}\,\frac{1}{R_u} \sin u\,\theta_0\Bigg\}$$

voor de rotorwikkeling:

$$\mathfrak{E}_2 = \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{2}\,\frac{\mathfrak{N}_2}{n}\,q\,\omega\,\Bigg\{\mathfrak{N}_1 I_1 \sin q\,(\omega t - \theta_1) \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_{1u}\,K_{2u}}{\pm u}\,\frac{1}{R_u} \cos u\,\theta_0$$

$$-\,\mathfrak{N}_1 I_1 \cos q\,(\omega t - \theta_1) \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_{1u}\,K_{2u}}{\pm u}\,\frac{1}{R_u} \sin u\,\theta_0$$

$$+\,\mathfrak{N}_2 I_2 \sin q\,(\omega t - \theta_2) \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_{2u}^2}{\pm u}\left(\frac{1}{R_u} + \frac{1}{R_{2u}}\right)\Bigg\}$$

$$-\,\frac{\pi^2 \sqrt{2}}{2}\,\frac{\mathfrak{N}_2}{n}\,p\,w_0\,\Bigg\{\mathfrak{N}_1 I_1 \sin q\,(\omega t - \theta_1) \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_{1u}\,K_{2u}}{\pm p}\,\frac{1}{R_u} \cos u\,\theta_0$$

$$-\,\mathfrak{N}_1 I_1 \cos q\,(\omega t - \theta_1) \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_{1u}\,K_{2u}}{\pm p}\,\frac{1}{R_u} \sin u\,\theta_0$$

$$+\,\mathfrak{N}_2 I_2 \sin q\,(\omega t - \theta_2) \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_{2u}^2}{\pm p}\left(\frac{1}{R_u} + \frac{1}{R_{2u}}\right)\Bigg\}$$

Duiden we den weerstand van eene afdeeling der statorwikkeling aan door r_1, van eene afdeeling der rotorwikkeling door r_2, en zij de klemspanning voor de beschouwde statorafdeeling:

$$E_1 \sqrt{2} \cos q\,(\omega t - \psi_1)$$

voor de beschouwde rotorafdeeling:

$$E_2 \sqrt{2} \cos q\,(\omega t - \psi_2)$$

zoo moet voldaan zijn aan de beide volgende betrekkingen:

$$E_1 \sqrt{2} \cos q (\omega t - \psi_1) + \mathcal{E}_1 - r_1 I_1 \sqrt{2} \cos q (\omega t - \theta_1) = 0$$

$$E_2 \sqrt{2} \cos q (\omega t - \psi_2) + \mathcal{E}_2 - r_2 I_2 \sqrt{2} \cos q (\omega t - \theta_2) = 0$$

In het geval van, directe of indirecte, *parallelschakeling* van rotor- en statorwikkeling zijn, althans indien het spanningsverlies in den transformator verwaarloosbaar is, de beide boven ingevoerde waarden der klemspanning *gegevens* van het vraagstuk. Voeren we dus in de beide laatste betrekkingen de boven afgeleide uitdrukkingen voor $\mathcal{E}_1$ en $\mathcal{E}_2$ in, zoo leveren zij na ontwikkeling en splitsing volgens $\sin q \omega t$ en $\cos q \omega t$ onmiddellijk de 4 vergelijkingen op, noodig en voldoende voor de bepaling van I_1, I_2, θ_1 en θ_2.

In het geval van, directe of indirecte, *serieschakeling* der wikkelingen zijn behalve de beide stroomverdeelingen ook de beide klemspanningen onbekend. Uit den aard der schakeling volgen thans echter de voor de oplosbaarheid van het vraagstuk nog ontbrekende betrekkingen.

Zij de „ster"-spanning van het net in een bepaalde phase:

$$E \sqrt{2} \cos q \omega t.$$

de in deze phase aan het net onttrokken stroom:

$$I \sqrt{2} \cos q (\omega t - \theta).$$

In de onderstelling dat de eventueele transformatie-verliezen mogen verwaarloosd worden, zullen

1⁰. de stroomen, optredende in de beschouwde afdeelingen van stator- en rotorwikkeling, wat hunne effectieve waarden betreft, in bepaalde verhoudingen ε_1 en ε_2 staan tot den in de beschouwde phase aan het net onttrokken stroom, en ten opzichte van dezen stroom bepaalde phase-naijlingen α_1 en α_2 bezitten.

2⁰. de (primaire) spanningen, welke te samen de netspanning in de beschouwde phase opleveren, wat hunne effectieve waarden betreft, gelijk zijn aan $2 p \varepsilon_1$ en $2 p \varepsilon_2$ maal de klemspanningen der beschouwde wikkelings-afdeelingen, en ten opzichte van deze klemspanningen de phase-voorijlingen α_1 en α_2 bezitten,

waarbij de constanten ε en α bepaald zijn door de toegepaste schakeling en de wikkelings-verhoudingen der transformatoren.

Hieruit volgen in de eerste plaats de betrekkingen:

$$I_1 \cos q\,(\omega t - \theta_1) = \varepsilon_1 I \cos q\,(\omega t - \theta - \alpha_1)$$

$$I_2 \cos q\,(\omega t - \theta_2) = \varepsilon_2 I \cos q\,(\omega t - \theta - \alpha_2)$$

welke, ingevoerd in de betrekkingen, die wij opstelden op bladz. 177, ons de beide volgende opleveren:

$$E_1 \sqrt{2} \cos q\,(\omega t - \psi_1) + \mathcal{E}_1 - \varepsilon_1 r_1 I \sqrt{2} \cos q\,(\omega t - \theta - \alpha_1) = 0$$

$$E_2 \sqrt{2} \cos q\,(\omega t - \psi_2) + \mathcal{E}_2 - \varepsilon_2 r_2 I \sqrt{2} \cos q\,(\omega t - \theta - \alpha_2) = 0$$

in de tweede plaats de betrekking:

$$2p\,\varepsilon_1 E_1 \cos q\,(\omega t - \psi_1 + \alpha_1) + 2p\,\varepsilon_2 E_2 \cos q\,(\omega t - \psi_2 + \alpha_2) = E \cos q\,\omega t.$$

De drie bovenstaande betrekkingen leveren ons thans na ontwikkeling en splitsing volgens sin $q\,\omega\,t$ en cos $q\,\omega\,t$ de 6 vergelijkingen op, noodig en voldoende voor de bepaling van I, θ, E_1, E_2, ψ_1 en ψ_2.

In sommige gevallen van directe serieschakeling is de stroom in een der afdeelingen van beide wikkelingen in phase met een der aan het net onttrokken phasestroomen, terwijl de indirecte serieschakeling steeds zoodanig kan geschieden dat aan deze voorwaarde voldaan is. Hierbij is dus voor de met eene bepaalde netphase overeenkomende wikkelingsafdeelingen $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. De drie bovenstaande betrekkingen leveren in dit geval onmiddellijk de volgende op:

$$E\sqrt{2} \cos q\,\omega t + 2p\,(\varepsilon_1 \mathcal{E}_1 + \varepsilon_2 \mathcal{E}_2) - 2p\,(\varepsilon_1^2 r_1 + \varepsilon_2^2 r_2)\, I \sqrt{2} \cos q\,(\omega t - \theta) = 0$$

welke na splitsing in twee van t onafhankelijke vergelijkingen de directe bepaling van I en θ toelaat.

In het vorige hoofdstuk hebben we aangetoond, dat bij de drie practisch gebruikelijke stroomsystemen de q^e harmonische componente van een f-phasen-systeem, optredende in eene $2p$-polige wikkeling, steeds kan beschouwd worden als de grondcomponente van een $\frac{f}{a}$-phasen-systeem, optredende in eene $2ap$-polige wikkeling.

Hierbij heeft a voor alle harmonischen de waarde 1 behalve in een driephasen-systeem voor de harmonischen, wier rangcijfer een veelvoud is van 3, en waarvoor $a = 3$ is.

Deze harmonischen, welke op zichzelf een eenphasen-systeem vormen, zijn echter onbestaanbaar als componenten der *gekoppelde* spanning in een driephasen-systeem; zij kunnen dus evenmin optreden als componenten der klemspanning van eenen driephasen-motor welke, zooals practisch gebruikelijk is, *uitsluitend* aan de buitenleiders van een driephasen-net is aangesloten *).

In de practisch voorkomende gevallen kunnen we dus voor alle harmonische componenten der klemspanning aan a de waarde 1 toekennen; m. a. w. we hebben hierbij steeds te doen met een $2p$-polig hoofdveld, roteerende met de hoeksnelheid $w = \pm \frac{q\,\omega}{p}$.

Indien wij nu bij de beschouwing eener bepaalde harmonische spanningscomponente in een meerphasen-systeem aan de rotatiesnelheid van het hoofdveld steeds de waarde toekennen, overeenkomende met het $+$ teeken, zoo komt dit hierop neer, dat we den zin van den eenheidsvector k zoodanig kiezen, dat de zin eener positieve rotatie overeenkomt met den zin, waarin de phasen der beschouwde harmonischen elkaar in de wikkeling opvolgen.

Hierdoor geldt dan voor u steeds de waardenreeks:

$$u = p + x\,n$$

De gangbare theorie der meerphasen-motoren houdt slechts rekening met het $2p$-polige hoofdveld; m. a. w. in deze theorie worden de grootheden K_u voor alle waarden van u, welke van p verschillen, ondersteld $= 0$ te zijn.

In deze onderstelling gaan de op bladz. 176 opgestelde uitdrukkingen voor de in de wikkelingen geïnduceerde electromotorische krachten over in:

$$\mathcal{E}_1 = \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{2} \frac{\mathfrak{N}_1}{n} q\,\omega \left\{ \mathfrak{N}_1 I_1 \sin q(\omega t - \theta_1) \frac{K_1^2}{p} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right) \right.$$
$$\left. + \mathfrak{N}_2 I_2 \sin \{ q(\omega t - \theta_2) + p\,\theta_0 \} \frac{K_1 K_2}{p} \frac{1}{R} \right\}$$

*) In het geval, dat het 0-punt der statorwikkeling van eenen driephasenmotor verbonden is met den 0-leider van het net, kunnen de hier bedoelde componenten der klemspanning wèl optreden. Zij zijn dan te beschouwen als grondcomponenten van een eenphasen-systeem, ten opzichte waarvan de motor als $6p$-polig moet worden opgevat.

$$\mathcal{E}_2 = \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{2} \frac{\mathfrak{N}_2}{n} (q\omega - p w_0) \left\{ \mathfrak{N}_1 I_1 \sin \{q(\omega t - \vartheta_1) - p\theta_0\} \frac{K_1 K_2}{p} \frac{1}{R} \right.$$
$$\left. + \mathfrak{N}_2 I_2 \sin q(\omega t - \vartheta_2) \frac{K_2^2}{p} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_2} \right) \right\}$$

waarin de grootheden K en R betrekking hebben op het $2p$-polige veld.

We moeten ons nu de vraag stellen, in hoeverre de verwaarloozing der nevenvelden in de gangbare theorie kan leiden tot onjuistheden in de uitkomsten, welke practisch niet meer aannemelijk zijn.

Hiertoe merken we op, dat de vereenvoudigde uitdrukking voor $\mathcal{E}_2$ evenredig is met $q\omega - p w_0$, terwijl deze evenredigheid *niet bestaat*, indien met den invloed der nevenvelden rekening gehouden wordt.

Het directe gevolg nu dezer evenredigheid is de bekende stelling in de theorie der meerphasige collector-motoren: *de wikkeling van het synchroon roteerend anker gedraagt zich ten opzichte der borstelspanning als een inductievrije weerstand;* m. a. w. deze stelling berust op de aanname dat de verwaarloozing der nevenvelden practisch geoorloofd is!

We zullen thans nagaan onder welke omstandigheden de rotorwikkeling zich *inderdaad* zal kunnen gedragen als een inductievrije weerstand.

Hiertoe zal moeten voldaan zijn aan de volgende voorwaarden:

$$\frac{p w_0}{q \omega} = \frac{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_{2u}^2}{\pm u} \left(\frac{1}{R_u} + \frac{1}{R_{2u}} \right)}{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_{2u}^2}{\pm p} \left(\frac{1}{R_u} + \frac{1}{R_{2u}} \right)} =$$

$$\frac{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_{1u} K_{2u}}{\pm u} \frac{1}{R_u} \cos u\theta_0}{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_{1u} K_{2u}}{\pm p} \frac{1}{R_u} \cos u\theta_0} = \frac{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_{1u} K_{2u}}{\pm u} \frac{1}{R_u} \sin u\theta_0}{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_{1u} K_{2u}}{\pm p} \frac{1}{R_u} \sin u\theta_0}$$

Aangezien de beide laatste breuken slechts voor bepaalde waarden van θ_0 aan elkaar gelijk kunnen zijn, blijkt reeds dadelijk dat het intreden van bovenbedoelden inductievrijen toestand der rotorwikkeling slechts *mogelijk* zal zijn *bij bepaalde borstelstanden.*

Om deze borstelstanden te bepalen merken we op dat, aangezien u voldoet aan de conditie:

$$u = p + x\,n$$

$$\sin u\,\theta_0 = \sin p\,\theta_0 \cos x\,n\,\theta_0 + \cos p\,\theta_0 \sin x\,n\,\theta_0$$

$$\cos u\,\theta_0 = \cos p\,\theta_0 \cos x\,n\,\theta_0 - \sin p\,\theta_0 \sin x\,n\,\theta_0$$

Voeren we deze uitdrukkingen in de beide beschouwde breuken in, zoo blijkt dat deze aan elkaar gelijk worden indien *voor alle waarden van x* voldaan is aan één der beide condities:

$$\sin x\,n\,\theta_0 = 0$$

of

$$\cos x\,n\,\theta_0 = 0.$$

Aan de laatste conditie *kan niet voldaan worden!*

Rest dus de eerste conditie, waaraan voldaan is voor:

$$\theta_0 = 0 \quad \text{of een veelvoud van } \frac{\pi}{n}\cdot$$

De gevonden reeks waarden van θ_0 geeft aanleiding tot de beschouwing van *twee* gevallen, n.l.:

1°. $\theta_0 = 0$ of een *even* aantal malen $\dfrac{\pi}{n}$.

In dit geval is de borstelstand zoodanig, dat de afdeelingen der rotorwikkeling *gelijkstandig* zijn met de afdeelingen der statorwikkeling.

De beide beschouwde breuken worden in dit geval gelijk aan:

$$\frac{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \dfrac{K_{1u}\,K_{2u}}{\pm u}\,\dfrac{1}{R_u}}{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \dfrac{K_{1u}\,K_{2u}}{\pm p}\,\dfrac{1}{R_u}}$$

2°. $\theta_0 =$ een *oneven* aantal malen $\dfrac{\pi}{n}$.

De borstelstand is in dit geval zoodanig, dat de afdeelingen der rotorwikkeling over de breedte van eene halve afdeeling verplaatst zijn ten opzichte van de afdeelingen der statorwikkeling; m. a. w. de stand der borstels op den collector komt overeen met de *middens* van de afdeelingen der statorwikkeling.

De beide beschouwde breuken worden in dit geval gelijk aan:

$$\frac{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_{1u}\, K_{2u}}{\pm u} \frac{1}{R_u} \cos x\, \pi}{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_{1u}\, K_{2u}}{\pm p} \frac{1}{R_u} \cos x\, \pi}$$

Als tweede conditie hebben we thans in te voeren, dat de boven beschouwde breuken gelijk moeten zijn aan de breuk:

$$\frac{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_{2u}^2}{\pm u} \left(\frac{1}{R_u} + \frac{1}{R_{2u}}\right)}{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_{2u}^2}{\pm p} \left(\frac{1}{R_u} + \frac{1}{R_{2u}}\right)}$$

en we zien nu gemakkelijk in, dat in het algemeen deze gelijkheid *niet* zal bestaan, en dat dus de inductievrije toestand van den rotor feitelijk bij geene enkele snelheid zal intreden.

We kunnen evenwel opmerken, dat *bij benadering* de drie breuken aan elkaar gelijk worden in het geval van den onder 1 bedoelden borstelstand, dus bij gelijkstandige verdeeling van beide wikkelingen, indien voldaan is aan de volgende voorwaarden:

Denken we ons het geval, dat de groeven van stator en rotor in aantal en in hoekbreedte overeenkomen, zoodat dus:

$$K_{1u} = K_{2u} = K_u$$

en nemen we verder aan, dat de electromotorische kracht, in de rotorwikkeling geïnduceerd door de lekvelden, slechts gering is in vergelijking met de electromotorische kracht, geïnduceerd door de restvelden, zoo zullen we de beide eerst beschouwde breuken, en met groote benadering eveneens de derde breuk, gelijk mogen stellen aan:

$$\frac{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_u^2}{\pm u} \frac{1}{R_u}}{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_u^2}{\pm p} \frac{1}{R_u}}$$

en de rotorwikkeling zal zich dus onder deze omstandigheden gedragen als een inductievrije weerstand bij de omwentelingssnelheid w_0, bepaald door:

$$p\,w_0 = \frac{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_u^2}{\pm u}\,\frac{1}{R_u}}{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_u^2}{\pm p}\,\frac{1}{R_u}}\; q\,\omega$$

Nemen we in aanmerking dat, blijkens het in hoofdstuk VI gevonden resultaat, de reluctantie R_u bij benadering evenredig is met het aantal poolparen $\pm u$, zoo gaat bovenstaande betrekking over in:

$$p\,w_0 = \frac{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_u^2}{u^2}}{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_u^2}{p\,u}}\; q\,\omega.$$

We zijn nu in staat in twee gevallen de waarde van den coëfficiënt van $q\,\omega$ te bepalen, n.l. in het geval eener gelijkmatig verdeelde wikkeling, en in het geval eener éénspleetswikkeling.

Voor gelijkmatig verdeelde wikkelingen is K_u^2 omgekeerd evenredig met u^2, en dus:

$$p\,w_0 = \frac{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left(\frac{p}{u}\right)^4}{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left(\frac{p}{u}\right)^3}\; q\,\omega = \frac{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left(\frac{1}{1+2\,x\,f}\right)^4}{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left(\frac{1}{1+2\,x\,f}\right)^3}\; q\,\omega$$

Bijgevolg is voor een driephasen-motor:

$$p\,w_0 = \frac{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left(\frac{1}{1+6x}\right)^4}{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left(\frac{1}{1+6x}\right)^3}\, q\,\omega = \frac{1+\left(\frac{1}{5}\right)^4+\left(\frac{1}{7}\right)^4+\left(\frac{1}{11}\right)^4 \text{ enz.}}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^3+\left(\frac{1}{7}\right)^3-\left(\frac{1}{11}\right)^3 \text{ enz.}}\, q\,\omega = 1{,}008\; q\,\omega.$$

voor een tweephasen-motor:

$$p\,w_0 = \frac{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left(\frac{1}{1+4x}\right)^4}{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left(\frac{1}{1+4x}\right)^3}\, q\,\omega = \frac{1+\left(\frac{1}{3}\right)^4+\left(\frac{1}{5}\right)^4+\left(\frac{1}{7}\right)^4 \text{ enz.}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{5}\right)^3-\left(\frac{1}{7}\right)^3 \text{ enz.}}\, q\,\omega = 1{,}047\; q\,\omega.$$

Voor éénspleetswikkelingen is K_u onafhankelijk van u, zoodat voor dit grensgeval:

$$p\,w_0 = \frac{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left(\frac{p}{u}\right)^2}{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{p}{u}}\, q\,\omega = \frac{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left(\frac{1}{1+2xf}\right)^2}{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{1}{1+2xf}}\, q\,\omega$$

Bijgevolg vinden we in dit geval, voor een driephasen-motor:

$$p\,w_0 = \frac{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left(\frac{1}{1+6x}\right)^2}{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{1}{1+6x}}\, q\,\omega = \frac{1+\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{7}\right)^2+\left(\frac{1}{11}\right)^2 \text{enz.}}{1-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\ \text{enz.}}\, q\,\omega = 1{,}21\, q\,\omega$$

voor een tweephasen-motor:

$$p\,w_0 = \frac{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left(\frac{1}{1+4x}\right)^2}{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{1}{1+4x}}\, q\,\omega = \frac{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2 \text{enz.}}{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\ \text{enz.}}\, q\,\omega = \frac{\frac{\pi^2}{8}}{\frac{\pi}{4}}\, q\,\omega$$

$$= \frac{\pi}{2}\, q\,\omega = 1{,}57\, q\,\omega$$

Het resultaat onzer beschouwingen is dus, dat de inductievrije toestand der rotorwikkeling in het algemeen slechts kan intreden bij den beschouwden borstelstand, en bij eene bepaalde *overschrijding* der synchrone snelheid.

In het geval van gelijkmatig verdeelde wikkelingen is deze overschrijding betrekkelijk gering; evenwel blijkt uit de gevonden resultaten voor eene éénspleetswikkeling, dat deze overschrijding zéér aanzienlijk worden kan indien de aard der wikkelingen sterk van de gelijkmatig verdeelde afwijkt, dus indien het aantal groeven per pool en per phase gering is.

Dat evenwel, zelfs indien we te doen hebben met een groot aantal groeven per pool en per phase, dus met wikkelingen, welke de gelijkmatig verdeelde zeer nabij komen, de gevonden afwijkingen van de synchrone snelheid niet zóó gering zijn, dat zij practisch buiten beschouwing blijven kunnen, blijkt het duidelijkst in het geval dat de borstels onderling zijn kortgesloten, en waarbij dus de motor arbeidt als inductiemotor.

In de opvatting der gangbare theorie, welke slechts rekening houdt met één roteerend veld, is de werking van een dergelijken motor *onafhankelijk van den stand der borstels.*

Bij de synchrone snelheid zal de inductievrije toestand, in dit geval tevens de *stroomlooze* toestand, der rotorwikkeling intreden. Bij afname der snelheid tot *enkele procenten* beneden de synchrone zal evenwel de rotorstroom, en hiermede tevens het motorkoppel, aangroeien *van* 0 *tot het practisch toe te laten maximum!*

Zoodra we evenwel den invloed der nevenvelden in rekening brengen, blijkt vooreerst de werking van den motor afhankelijk te zijn van den stand der borstels! De inductievrije toestand der rotorwikkeling zal slechts kunnen intreden bij bepaalde borstelstanden, en bij snelheden, afwijkende van de synchrone snelheid, en afhankelijk van den borstelstand.

Aangezien in het hier beschouwde bijzondere geval $\mathcal{E}_2$ en I_2 *gelijktijdig* $= 0$ worden, zullen de voor het algemeene geval geldende condities voor het optreden van den inductievrijen toestand bij den inductiemotor beperkt worden tot:

$$\frac{p\,w_0}{q\,\omega} = \frac{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_{1u}\,K_{2u}}{\pm u}\,\frac{1}{R_u}\cos u\,\theta_0}{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_{1u}\,K_{2u}}{\pm p}\,\frac{1}{R_u}\cos u\,\theta_0} = \frac{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_{1u}\,K_{2u}}{\pm u}\,\frac{1}{R_u}\sin u\,\theta_0}{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_{1u}\,K_{2u}}{\pm p}\,\frac{1}{R_u}\sin u\,\theta_0}$$

Deze toestand zal dus bij den inductiemotor kunnen optreden voor de *beide* borstelstanden, waarvoor de beide laatste breuken aan elkaar gelijk worden, en die wij in het voorgaande bepaald hebben. Voor den borstelstand, waarbij beide wikkelingen gelijkstandig verdeeld zijn, bepaalden we in het voorgaande reeds de waarde van w_0, waarbij in het algemeene geval de inductievrije toestand intreedt.

Voor den inductie-motor is dus de tweede borstelstand, welke overeenkomt met de middens der statorafdeelingen, een *bijzondere* borstelstand, waarbij eveneens de inductievrije toestand der rotorwikkeling kan intreden, en wel bij de snelheid w_0, welke bepaald is door:

$$p\,w_0 = \frac{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_{1u}\,K_{2u}}{\pm u}\,\frac{1}{R_u}\cos x\pi}{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_{1u}\,K_{2u}}{\pm p}\,\frac{1}{R_u}\cos x\pi}\,q\,\omega$$

In het geval van gelijkmatig verdeelde wikkelingen herleiden we deze uitdrukking tot:

$$p\,w_0 = \frac{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty}\left(\frac{p}{u}\right)^4\cos x\pi}{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty}\left(\frac{p}{u}\right)^3\cos x\pi}\,q\,\omega = \frac{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty}\left(\frac{1}{1+2\,x\,f}\right)^4\cos x\pi}{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty}\left(\frac{1}{1+2\,x\,f}\right)^3\cos x\pi}\,q\,\omega$$

Wij vinden dus voor een driephasen-motor:

$$p\,w_0 = \frac{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty}\left(\frac{1}{1+6\,x}\right)^4\cos x\pi}{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty}\left(\frac{1}{1+6\,x}\right)^3\cos x\pi}\,q\,\omega = \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^4-\left(\frac{1}{7}\right)^4+\left(\frac{1}{11}\right)^4\text{enz.}}{1+\left(\frac{1}{5}\right)^3-\left(\frac{1}{7}\right)^3-\left(\frac{1}{11}\right)^3\text{enz.}}\,q\,\omega = 0{,}993\;q\,\omega$$

voor een tweephasen-motor:

$$p\,w_0 = \frac{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty}\left(\frac{1}{1+4\,x}\right)^4\cos x\pi}{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty}\left(\frac{1}{1+4\,x}\right)^3\cos x\pi}\,q\,\omega = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^4-\left(\frac{1}{5}\right)^4+\left(\frac{1}{7}\right)^4\text{enz.}}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^3-\left(\frac{1}{5}\right)^3-\left(\frac{1}{7}\right)^3\text{enz.}}\,q\,\omega = 0{,}960\;q\,\omega.$$

In het geval van éénspleetswikkelingen gaat onze conditie over in:

$$p\,w_0 = \frac{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty}\left(\frac{p}{u}\right)^2\cos x\pi}{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty}\frac{p}{u}\cos x\pi}\,q\,\omega = \frac{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty}\left(\frac{1}{1+2\,x\,f}\right)^2\cos x\pi}{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty}\frac{1}{1+2\,x\,f}\cos x\pi}\,q\,\omega.$$

Voor een driephasen-motor vinden we dan:

$$p\,w_0 = \frac{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty}\left(\frac{1}{1+6\,x}\right)^2\cos x\pi}{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty}\frac{1}{1+6\,x}\cos x\pi}\,q\,\omega = \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2-\left(\frac{1}{7}\right)^2+\left(\frac{1}{11}\right)^2\text{enz.}}{1+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\text{ enz.}}\,q\,\omega = 0{,}91\;q\,\omega.$$

voor een tweephasen-motor:

$$p\,w_0 = \frac{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left(\frac{1}{1+4\,x}\right)^2 \cos x\,\pi}{\sum\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{1}{1+4\,x} \cos x\,\pi}\, q\,\omega = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{7}\right)^2 \text{enz.}}{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\ \text{enz.}}\, q\,\omega = 0{,}79\, q\,\omega.$$

In den hier beschouwden bijzonderen borstelstand treedt dus de inductievrije toestand der rotorwikkeling in bij eene snelheid, welke geringer is dan de synchrone.

Hebben we te doen met wikkelingen, welke de gelijkmatig verdeelde zeer nabij komen, zoo zullen in de beide beschouwde borstelstanden de afwijkingen van de synchrone snelheid, waarbij de rotorwikkeling stroomloos wordt, *op zich zelf beschouwd* slechts gering zijn.

Zooals we evenwel in het voorgaande reeds opmerkten, wordt practisch de belasting van den motor slechts opgevoerd tot eene zoodanige waarde, dat (afgezien van opzettelijke snelheidsregeling door inschakeling van weerstanden in de rotorwikkeling) slechts een slip van ten hoogste enkele procenten optreedt Dit beteekent echter dat bij de snelheden, waarbij inderdaad de rotorwikkeling stroomloos wordt, en dus het motorkoppel = 0 is, onder de werking van het hoofdveld alleen reeds een zéér belangrijke rotorstroom en in verband hiermede eene waarde van het motorkoppel zou optreden, welke in geen geval verwaarloosbaar is ten opzichte der waarde van het volbelastingskoppel, en die zelfs in sommige gevallen deze waarde kan overtreffen.

Door den invloed der nevenvelden wordt bij de beschouwde snelheden deze rotorstroom opgeheven, waaruit dan echter onmiddellijk volgen moet, dat deze invloed zelfs niet volgens de in de practijk gangbare opvatting, verwaarloosbaar klein *kan* zijn! De verklaring hiervoor ligt trouwens voor de hand. De onder den invloed eener bepaalde harmonische stroomcomponente optredende krachtstroomen zijn evenredig met $\frac{K_u}{u\,R_u}$, of practisch in het geval eener gelijkmatig verdeelde wikkeling met $\pm\, u^{-3}$. Deze krachtstroomen zullen zich dus voor het hoofdveld en de opvolgende nevenvelden bij eene tweephasen-wikkeling verhouden als $1 : \frac{1}{27} : \frac{1}{125}$ enz., bij eene driephasen-wikkeling als $1 : \frac{1}{125} : \frac{1}{343}$ enz. Indien wij echter op grond van deze verhoudingen tot de verwaarloosbaarheid der nevenvelden zouden besluiten, wat althans bij een driephasen-motor volkomen geoorloofd schijnt, zoo zien wij hierbij over het hoofd dat de inductieverschijnselen in den rotor behalve van de grootte der roteerende krachtstroomen ook afhangen van hunne relatieve omwentelingssnelheid $w - w_0$.

Juist in de nabijheid der synchrone snelheid worden echter de relatieve snelheden der nevenvelden zéér groot in vergelijking met die van het hoofdveld, en zullen dus deze nevenvelden *niettegenstaande* hunne relatief geringe sterkte de werking van den motor wezenlijk kunnen wijzigen.

In het geval van een eenphasen-collectormotor worden de uitdrukkingen voor de electromotorische krachten $\mathcal{E}_1$ en $\mathcal{E}_2$ eenigszins vereenvoudigd. Daar nl. hierbij de waarden van u twee aan twee gelijk en tegengesteld zijn, en dit dus eveneens het geval is met de hiermee overeenkomstige waarden van:

$$\frac{K_{1u}\,K_{2u}}{\pm u}\,\frac{1}{R_u}\sin u\,\theta_0\,,\quad \frac{K_{1u}\,K_{2u}}{\pm p}\,\frac{1}{R_u}\cos u\,\theta_0 \text{ en } \frac{K_{2u}^2}{\pm p}\left(\frac{1}{R_u}+\frac{1}{R_{2u}}\right)$$

zijn hunne in de uitdrukkingen voor $\mathcal{E}_1$ en $\mathcal{E}_2$ optredende sommen naar $x = 0$. De overige in deze uitdrukkingen achter het Σ-teeken optredende functies van u zijn symmetrisch ten opzichte van $u = 0$. Duiden we een dezer functies aan door:

$$f(u) = f(p + 2\,p\,x)$$

zoo kunnen we hunne sommatie als volgt uitvoeren:

$$\sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(p+2p\,x) = \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(p+4p\,x) + \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(-p-4p\,x) = 2\sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} f(p+4\,p\,x)$$

Mits we ons dus de mogelijke waarden van u bepaald denken door:

$$u = p\,(1 + 4\,x)$$

kunnen we de uitdrukkingen voor $\mathcal{E}_1$ en $\mathcal{E}_2$ als volgt schrijven:

$$\mathcal{E}_1 = \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{2} \frac{\mathfrak{N}_1}{p} q\omega \left\{ \mathfrak{N}_1 I_1 \sin q(\omega t - \varphi_1) \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_{1u}^2}{\pm u} \left(\frac{1}{R_u} + \frac{1}{R_{1u}} \right) \right.$$

$$\left. + \mathfrak{N}_2 I_2 \sin q(\omega t - \varphi_2) \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_{1u} K_{2u}}{\pm u} \frac{1}{R_u} \cos u\theta_0 \right\}$$

$$\mathcal{E}_2 = \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{2} \frac{\mathfrak{N}_2}{p} q\omega \left\{ \mathfrak{N}_1 I_1 \sin q(\omega t - \varphi_1) \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_{1u} K_{2u}}{\pm u} \frac{1}{R_u} \cos u\theta_0 \right.$$

$$\left. + \mathfrak{N}_2 I_2 \sin q(\omega t - \varphi_2) \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_{2u}^2}{\pm u} \left(\frac{1}{R_u} + \frac{1}{R_{2u}} \right) \right\}$$

$$+ \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{2} \frac{\mathfrak{N}_2}{p} p w_0 \mathfrak{N}_1 I_1 \cos q(\omega t - \varphi_1) \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_{1u} K_{2u}}{\pm p} \frac{1}{R_u} \sin u\theta_0.$$

Bij de nieuwere eenphasen-collectormotoren, met name bij die, welke in den regel worden aangeduid als *„gecompenseerde repulsie-motoren"*, hebben we meestal te doen met het geval dat de rotor-wikkeling op twee wijzen, nl. door twee borstelgroepen, in n gelijke afdeelingen verdeeld wordt.

We bepalen den stand dezer beide verdeelingen door de hoekverplaatsingen θ_0 en θ_0' van twee door de beide borstelgroepen gevormde afdeelingen der rotorwikkeling ten opzichte van eene bepaalde afdeeling der statorwikkeling, en we beschouwen de rotor-stroomverdeeling als superpositie van twee eenphasen-stroomverdeelingen, welke we voor de beschouwde wikkelings-afdeelingen aanduiden door:

$$I_2 \sqrt{2} \cos q(\omega t - \varphi_2) \qquad \text{en} \qquad I_2' \sqrt{2} \cos q(\omega t - \varphi_2')$$

Op dezelfde wijze als in het geval van één borstelgroep kunnen we ook thans de in de beschouwde afdeelingen van beide wikkelingen geïnduceerde electromotorische krachten bepalen. We vinden dan voor de statorwikkeling:

$$\mathcal{E}_1 = \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{2} \frac{\mathfrak{N}_1}{p} q\omega \left\{ \mathfrak{N}_1 I_1 \sin q(\omega t - \varphi_1) \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_{1u}^2}{\pm u} \left(\frac{1}{R_u} + \frac{1}{R_{1u}} \right) \right.$$

$$+ \mathfrak{N}_2 I_2 \sin q(\omega t - \varphi_2) \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_{1u} K_{2u}}{\pm u} \frac{1}{R_u} \cos u\theta_0$$

$$\left. + \mathfrak{N}_2 I_2' \sin q(\omega t - \varphi_2') \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_{1u} K_{2u}}{\pm u} \frac{1}{R_u} \cos u\theta_0' \right\}$$

voor de rotorwikkeling, volgens de verdeeling door de eerste borstelgroep:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_2 = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{2}\,\frac{\mathfrak{N}_2}{p}\,q\,\omega \Big\{ & \mathfrak{N}_1 I_1 \sin q(\omega t - \vartheta_1) \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{\mathrm{K}_{1u}\,\mathrm{K}_{2u}}{\pm u}\,\frac{1}{R_u} \cos u\,\theta_0 \\ & + \mathfrak{N}_2 I_2 \sin q(\omega t - \vartheta_2) \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{\mathrm{K}_{2u}^2}{\pm u} \left(\frac{1}{R_u} + \frac{1}{R_{2u}}\right) \\ & + \mathfrak{N}_2 I_2' \sin q(\omega t - \vartheta_2') \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{\mathrm{K}_{2u}^2}{\pm u} \left(\frac{1}{R_u} + \frac{1}{R_{2u}}\right) \cos u\,(\theta_0 - \theta_0') \Big\} \\ + \frac{\pi^2\sqrt{2}}{2}\,\frac{\mathfrak{N}_2}{p}\,p\,w_0 \Big\{ & \mathfrak{N}_1 I_1 \cos q(\omega t - \vartheta_1) \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{\mathrm{K}_{1u}\,\mathrm{K}_{2u}}{\pm p}\,\frac{1}{R_u} \sin u\,\theta_0 \\ & + \mathfrak{N}_2 I_2' \cos q(\omega t - \vartheta_2') \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{\mathrm{K}_{2u}^2}{\pm p} \left(\frac{1}{R_u} + \frac{1}{R_{2u}}\right) \sin u\,(\theta_0 - \theta_0') \Big\}\end{aligned}$$

volgens de verdeeling door de tweede borstelgroep:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_2' = \frac{\pi^2\sqrt{2}}{2}\,\frac{\mathfrak{N}_2}{p}\,q\,\omega \Big\{ & \mathfrak{N}_1 I_1 \sin q(\omega t - \vartheta_1) \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{\mathrm{K}_{1u}\,\mathrm{K}_{2u}}{\pm u}\,\frac{1}{R_u} \cos u\,\theta_0' \\ & + \mathfrak{N}_2 I_2 \sin q(\omega t - \vartheta_2) \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{\mathrm{K}_{2u}^2}{\pm u} \left(\frac{1}{R_u} + \frac{1}{R_{2u}}\right) \cos u\,(\theta_0' - \theta_0) \\ & + \mathfrak{N}_2 I_2' \sin q(\omega t - \vartheta_2') \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{\mathrm{K}_{2u}^2}{\pm u} \left(\frac{1}{R_u} + \frac{1}{R_{2u}}\right) \Big\} \\ + \frac{\pi^2\sqrt{2}}{2}\,\frac{\mathfrak{N}_2}{p}\,p\,w_0 \Big\{ & \mathfrak{N}_1 I_1 \cos q(\omega t - \vartheta_1) \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{\mathrm{K}_{1u}\,\mathrm{K}_{2u}}{\pm p}\,\frac{1}{R_u} \sin u\,\theta_0' \\ & + \mathfrak{N}_2 I_2 \cos q(\omega t - \vartheta_2) \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{\mathrm{K}_{2u}^2}{\pm p} \left(\frac{1}{R_u} + \frac{1}{R_{2u}}\right) \sin u\,(\theta_0' - \theta_0) \Big\}\end{aligned}$$

Tusschen de klemspanningen, electromotorische krachten en stroomen gelden thans voor de beschouwde wikkelings-afdeelingen de betrekkingen:

$$E_1\sqrt{2}\cos q(\omega t - \psi_1) + \mathcal{E}_1 - r_1 I_1 \sqrt{2}\cos q(\omega t - \vartheta_1) = 0$$

$$\begin{aligned}E_2\sqrt{2}\cos q(\omega t - \psi_2) + \mathcal{E}_2 - r_2 I_2 \sqrt{2}\cos q(\omega t - \vartheta_2) & \\ - \xi\, r_2 I_2' \sqrt{2}\cos q(\omega t - \vartheta_2') &= 0\end{aligned}$$

$$E_2' \sqrt{2} \cos q (\omega t - \psi_2') + \mathcal{E}_2' - \xi r_2 I_2 \sqrt{2} \cos q (\omega t - \theta_2)$$
$$- r_2 I_2' \sqrt{2} \cos q (\omega t - \theta_2') = 0$$

waarin de constante ξ bepaald is door het magnetisch standsverschil der beide borstelgroepen *). Zijn deze magnetisch 90° ten opzichte van elkaar verplaatst, zoo is $\xi = 0$.

Denken we ons thans de eerste borstelgroep kortgesloten, en de tweede secundair aangesloten op een transformator met de transformatie-verhouding ε, die in serie met de statorwikkeling gevoed wordt onder de spanning $E\sqrt{2} \cos q \omega t$, zoodat:

$$E_2 = 0 \qquad I_2' \cos q (\omega t - \theta_2') = \varepsilon I_1 \cos q (\omega t - \theta_1)$$

$$p E_1 \cos q (\omega t - \psi_1) + p \varepsilon E_2' \cos q (\omega t - \psi_2') = E \cos q \omega t$$

Uit bovenstaande betrekkingen volgen dan de beide volgende:

$$E\sqrt{2} \cos q \omega t + p (\mathcal{E}_1 + \varepsilon \mathcal{E}_2') - p (r_1 + \varepsilon^2 r_2) I_1 \sqrt{2} \cos q (\omega t - \theta_1)$$
$$- p \varepsilon \xi r_2 I_2 \sqrt{2} \cos q (\omega t - \theta_2) = 0$$

en

$$\mathcal{E}_2 - \varepsilon \xi r_2 I_1 \sqrt{2} \cos q (\omega t - \theta_1) - r_2 I_2 \sqrt{2} \cos q (\omega t - \theta_2) = 0$$

welke, na invoering der waarden van $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ en $\mathcal{E}_2'$, en splitsing volgens $\sin q \omega t$ en $\cos q \omega t$, de 4 vergelijkingen opleveren, noodig en voldoende voor de bepaling van I_1, I_2, θ_1 en θ_2. *Deze vergelijkingen bepalen de stroomverdeelingen in het meest algemeene geval van den gecompenseerden repulsiemotor.*

Door invoering van $\varepsilon = 0$ verkrijgen we de vereenvoudigde vergelijkingen, geldende voor den gewonen repulsiemotor, door invoering van $\xi = 0$ de vereenvoudigde vergelijkingen, geldende voor den gecompenseerden repulsiemotor met 90° ten opzichte van elkaar verplaatste borstelgroepen, als gebezigd in het arrangement van Latour en van Winter-Eichberg.

Bij deze laatste motoren is *bovendien* de eerste borstelgroep gelijkstandig geplaatst met de stroomtoevoerpunten der stator-

*) Kiest men de beide rotor-afdeelingen zóó, dat het magnetisch standsverschil $p(\vartheta_0 - \vartheta_0')$ gelegen is tusschen 0 en π, zoo is blijkbaar:

$$\xi = 1 - \frac{2p(\vartheta_0 - \vartheta_0')}{\pi}.$$

wikkeling, zóó dat:

$$\theta_0 = 0 \quad \text{en} \quad \theta_0' = -\frac{\pi}{2p}$$

waaruit volgt:

$$\sin u\,\theta_0 = 0 \qquad \sin u\,(\theta_0' - \theta_0) = \sin u\,\theta_0' = -1$$

$$\cos u\,\theta_0 = 1 \qquad \cos u\,(\theta_0' - \theta_0) = \cos u\,\theta_0' = 0.$$

We zullen thans nog de voor dezen bijzonderen stand der borstelgroepen geldende vereenvoudigde uitdrukkingen voor de electromotorische krachten opstellen.

Bij invoering der „inductie-coëfficiënten":

$$L_{s1} = \frac{\pi^2\,\mathfrak{N}_1^2}{2p} \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_{1u}^2}{\pm u}\left(\frac{1}{R_u} + \frac{1}{R_{1u}}\right)$$

$$M_s = \frac{\pi^2\,\mathfrak{N}_1\,\mathfrak{N}_2}{2p} \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_{1u}\,K_{2u}}{\pm u}\,\frac{1}{R_u}$$

$$L_{s2} = \frac{\pi^2\,\mathfrak{N}_2^2}{2p} \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_{2u}^2}{\pm u}\left(\frac{1}{R_u} + \frac{1}{R_{2u}}\right)$$

$$M_d = \frac{\pi^2\,\mathfrak{N}_1\,\mathfrak{N}_2}{2p} \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_{1u}\,K_{2u}}{\pm p}\,\frac{1}{R_u}$$

$$L_d = \frac{\pi^2\,\mathfrak{N}_2^2}{2p} \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_{2u}^2}{\pm p}\left(\frac{1}{R_u} + \frac{1}{R_{2u}}\right)$$

gaan in dit geval de uitdrukkingen voor de grootheden $\mathcal{E}$ over in:

$$\mathcal{E}_1 = q\,\omega\sqrt{2}\,\{L_{s1}\,I_1 \sin q\,(\omega t - \varphi_1) + M_s\,I_2 \sin q\,(\omega t - \varphi_2)\}$$

$$\mathcal{E}_2 = q\,\omega\sqrt{2}\,\{M_s\,I_1 \sin q\,(\omega t - \varphi_1) + L_{s2}\,I_2 \sin q\,(\omega t - \varphi_2)\}$$
$$+\,p\,w_0\sqrt{2}\,L_d\,I_2' \cos q\,(\omega t - \varphi_2')$$

$$\mathcal{E}_2' = q\,\omega\,\sqrt{2}\;\; L_{s2}\,I_2' \sin q(\omega t - \varphi_2')$$
$$-\,p\,w_0\sqrt{2}\,\{M_d\,I_1 \cos q(\omega t - \varphi_1) + L_d\,I_2 \cos q\,(\omega t - \varphi_2)\}$$

Deze laatste uitdrukkingen stemmen, wat hun vorm betreft, geheel overeen met die der gangbare theorie van de hier beschouwde klasse van motoren, en verschillen met deze slechts wat betreft de waarden der coëfficiënten L en M. Deze theorie leidt dus zoolang tot volkomen juiste resultaten als de waarde dezer coëfficiënten buiten beschouwing blijft. De „statisch" geïnduceerde electromotorische krachten hangen blijkbaar af van de coëfficiënten L_{s1}, M_s en L_{s2}, de „dynamisch" geïnduceerde electromotorische krachten van de coëfficiënten M_d en L_d; hierbij treedt L_{s1} op als coëfficiënt van zelfinductie der statorwikkeling, L_{s2} en L_d als coëfficiënten van zelfinductie der rotorwikkeling, M_s en M_d als coëfficiënten der wederkeerige inductie tusschen beide wikkelingen. In de gangbare theorie treden slechts 3 inductie-coëfficiënten op, daar hierbij geen rekening gehouden wordt met het onderscheid tusschen de coëfficiënten der statische en die der dynamische inductie. Inderdaad blijkt, dat bij verwaarloozing der nevenvelden dit onderscheid verdwijnt, en dus in de uitdrukkingen voor de grootheden $\mathfrak{E}$ slechts 3 verschillende coëfficiënten optreden, n.l.:

$$L_1 = \frac{\pi^2 \mathfrak{N}_1^2 K_1^2}{2p^2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right) \qquad L_2 = \frac{\pi^2 \mathfrak{N}_2^2 K_2^2}{2p^2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_2} \right)$$

$$M = \frac{\pi^2 \mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2 K_1 K_2}{2p^2} \; \frac{1}{R}$$

Voeren we weer ten aanzien van de grootheden K en R de onderstellingen in, vermeld op bladz. 182, zoo kunnen we als volgt twee constanten $\varkappa_s$ en $\varkappa_d$ bepalen, welke de verhoudingen uitdrukken, waarin de coëfficiënten der statische en die der dynamische inductie door den invloed der nevenvelden gewijzigd worden:

$$\varkappa_s = \frac{L_{s1}}{L_1} = \frac{M_s}{M} = \frac{L_{s2}}{L_2} = \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left(\frac{K_u}{K} \right)^2 \left(\frac{p}{u} \right)^2$$

$$\varkappa_d = \qquad \frac{M_d}{M} = \frac{L_d}{L_2} = \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left(\frac{K_u}{K} \right)^2 \frac{p}{u}$$

Voor gelijkmatig verdeelde wikkelingen volgt hieruit:

$$\varkappa_s = \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left(\frac{p}{u} \right)^4 = \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left(\frac{1}{1+4x} \right)^4 = 1 + \left(\frac{1}{3} \right)^4 + \left(\frac{1}{5} \right)^4 \text{enz.} = 1{,}015$$

$$\varkappa_d = \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left(\frac{p}{u} \right)^3 = \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left(\frac{1}{1+4x} \right)^3 = 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^3 + \left(\frac{1}{5} \right)^3 \text{enz.} = 0{,}969$$

voor éénspleets-wikkelingen:

$$\eta_s = \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left(\frac{p}{u}\right)^2 = \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \left(\frac{1}{1+4x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 \text{ enz.} = \frac{\pi^2}{8} = 1{,}234.$$

$$\eta_d = \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{p}{u} = \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{1}{1+4x} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \text{ enz.} = \frac{\pi}{4} = 0{,}785$$

De invloed der nevenvelden mag dus in het algemeen niet als verwaarloosbaar beschouwd worden.

Denken we ons de vergelijkingen van een dergelijken motor opgesteld onder verwaarloozing der nevenvelden, zoo zullen we uit deze vergelijkingen die, waarin met de nevenvelden rekening gehouden wordt, kunnen afleiden, indien we voor ω en w_0 in de plaats stellen:

$$\omega' = \eta_s \, \omega \quad \text{en} \quad w_0' = \eta_d \, w_0$$

De gangbare theorie dezer motoren levert ons dus bij invoering der gewijzigde pulsatie ω' de werkelijke stroomverdeelingen als functies der gewijzigde omwentelingssnelheid w_0'.

Aangezien nu door de stroomverdeelingen zoowel de energie-opname als de energie-verliezen in rotor en stator, en dus ook de mechanische energie-afgifte van den motor volkomen bepaald zijn, zal de waarde van het motor-koppel, door de gangbare theorie opgeleverd als functie der omwentelingssnelheid, in werkelijkheid voorstellen de in omgekeerde reden der snelheid gewijzigde waarde van het koppel:

$$\mathbf{K}' = \frac{1}{\eta_d} \mathbf{K}$$

als functie van de gewijzigde snelheid $w_0' = \eta_d \, w_0$.

HOOFDSTUK XV.

De vergelijkingen der asynchrone motoren. (Vervolg.)

b. *Motoren met kortsluit- of sleepringanker.*

Bij motoren met kortsluit- of sleepringanker zullen we rekening moeten houden met de mogelijkheid, dat stator en rotor voor een verschillend aantal phasen f_1 en f_2 gewikkeld zijn, en dat bijgevolg eveneens het aantal afdeelingen:

$$n_1 = 2\,p\,f_1 \quad \text{en} \quad n_2 = 2\,p\,f_2$$

voor beide wikkelingen eene verschillende waarde bezit.

In hoofdstuk XII toonden wij aan, dat bij een dergelijken motor onder den invloed van de q^e harmonische componente der statorspanning, bij de omwentelingssnelheid w_0, in het algemeen alle roteerende velden kunnen optreden, waarvan het aantal poolparen en de omwentelingssnelheid bepaald zijn door:

$$u = p\,(q + 2\,x\,f_1 + 2\,y\,f_2)$$

$$u\,w = q\,\omega + 2\,y\,p\,f_2\,w_0$$

de relatieve omwentelingssnelheid ten opzichte van de rotorwikkeling door:

$$u\,w' = q\,\omega - p\,q\,w_0 - 2\,x\,p\,f_1\,w_0$$

Hierbij wordt het veld, overeenkomende met eene bepaalde waarde van x en met eene bepaalde waarde van y, tot stand gebracht onder den invloed van eene harmonische componente van den statorstroom met de pulsatie $\omega_{1y} = \pm\,u\,w$, en van eene harmonische componente van den rotorstroom met de pulsatie $\omega_{2x} = \pm\,u\,w'$.

Voor eene bepaalde afdeeling der statorwikkeling en eene bepaalde afdeeling der rotorwikkeling zullen we dus deze stroomcomponenten kunnen voorstellen door uitdrukkingen van den vorm:

$$I_{1y}\,\sqrt{2}\,\cos\,\{(q\,\omega + 2\,y\,p\,f_2\,w_0)\,t - \theta_{1y}\}$$

en

$$I_{2x}\,\sqrt{2}\,\cos\,\{(q\,\omega - p\,q\,w_0 - 2\,x\,p\,f_1\,w_0)\,t - \theta_{2x}\}$$

waarin dus de grootheden I_{1y}, I_{2x}, θ_{1y} en θ_{2x} voor alle mogelijke waarden van x en y de onbekenden zijn van het vraagstuk, waarmee we ons bezighouden.

Het eenparig veranderlijke standsverschil der middens van de beide beschouwde wikkelingsafdeelingen denken we ons bepaald door eene bewegingsvergelijking van den vorm:

$$\theta = w_0 t + \theta_0$$

waarin dus θ_0 de waarde van dit standsverschil voorstelt op een bepaald oogenblik, $t = 0$, waarvoor we kiezen een der tijdstippen, waarop de spanning der beschouwde statorafdeeling haar positief maximum bereikt, zoodat we dus deze spanning kunnen voorstellen door eene uitdrukking van den vorm $E\sqrt{2} \cos q\,\omega\,t$.

Bij invoering der eenheidsvectoren $\mathbf{m}_{1xy}$ en $\mathbf{m}_{2xy}$, welke de rotatiebewegingen uitvoeren, die ten opzichte van het midden der beschouwde statorafdeeling overeenkomen met die, beschreven door de vergelijkingen:

$$u\,\theta = (q\,\omega + 2\,y\,p\,f_2\,w_0)\,t - \theta_{1y} - \frac{\pi}{2}$$

en

$$u\,\theta = (q\,\omega + 2\,y\,p\,f_2\,w_0)\,t - \theta_{2x} - \frac{\pi}{2} + u\,\theta_0$$

dus ten opzichte van het midden der beschouwde rotorafdeeling met die, beschreven door de vergelijkingen:

$$u\,\theta = (q\,\omega - p\,q\,w_0 - 2\,x\,p\,f_1\,w_0)\,t - \theta_{1y} - \frac{\pi}{2} - u\,\theta_0$$

en

$$u\,\theta = (q\,\omega - p\,q\,w_0 - 2\,x\,p\,f_1\,w_0)\,t - \theta_{2x} - \frac{\pi}{2}$$

kunnen we op geheel dezelfde wijze als bij den collector-motor de volgende uitdrukkingen afleiden voor den statorkrachtstroom $\mathbf{N}_{s.xy}$ en voor den rotorkrachtstroom $\mathbf{N}_{r.xy}$ in het beschouwde veld:

$$\mathbf{N}_{s.xy} = \frac{2\,\pi\sqrt{2}}{u}\left\{\mathbf{m}_{1.xy}\,\mathrm{K}_{1u}\,\mathfrak{N}_1\,I_{1y}\left(\frac{1}{R_u} + \frac{1}{R_{1u}}\right) + \mathbf{m}_{2.xy}\,\mathrm{K}_{2u}\,\mathfrak{N}_2\,I_{2x}\,\frac{1}{R_u}\right\}$$

$$\mathbf{N}_{r.xy} = \frac{2\,\pi\sqrt{2}}{u}\left\{\mathbf{m}_{1.xy}\,\mathrm{K}_{1u}\,\mathfrak{N}_1\,I_{1y}\,\frac{1}{R_u} + \mathbf{m}_{2.xy}\,\mathrm{K}_{2u}\,\mathfrak{N}_2\,I_{2x}\left(\frac{1}{R_u} + \frac{1}{R_{2u}}\right)\right\}$$

We zouden thans met behulp der in hoofdstuk XI afgeleide betrekkingen onmiddellijk de electromotorische krachten $\mathcal{E}_{1xy}$ en $\mathcal{E}_{2xy}$ kunnen bepalen, welke door deze krachtstroomen in de beschouwde wikkelings-afdeelingen geïnduceerd worden, en daarna op overeenkomstige wijze als bij den collector-motor het systeem vergelijkingen opstellen ter bepaling van de grootheden I en ϑ.

Wij zien echter onmiddellijk in dat in dit systeem vergelijkingen de constante θ_0 zal optreden, en dat dus de oplossing van dit systeem eveneens van deze constante zal afhankelijk zijn. Aangezien nu θ_0 het standsverschil der beschouwde afdeelingen van rotor- en statorwikkeling voorstelt op *één* der tijdstippen, waarop de spanning der statorafdeeling haar positief maximum bereikt, terwijl toch in het algemeen voor eene reeks opvolgende maxima dezer spanning eene reeks verschillende waarden van dit standsverschil zal optreden, zal de afhankelijkheid van θ_0 noodzakelijk beperkt blijven tot die grootheden, wier waarde eene verandering ondergaat als gevolg van eene verplaatsing van het tijdstip, dat wij bij de mathematische omschrijving van het verschijnsel als begintijd *kiezen*.

Hieruit volgt echter onmiddellijk, dat de volgende grootheden niet van θ_0 kunnen afhangen:

1°. de effectieve waarden der stroomcomponenten I_{1y} en I_{2x}.

2°. het phaseverschil ϑ_1 van de stator-stroomcomponente I_1, wier pulsatie $= q\,\omega$ is, met de statorspanning.

3°. het magnetische standsverschil der met dezelfde eenparige hoeksnelheid roteerende eenheidsvectoren $\mathbf{m}_{1xy}$ en $\mathbf{m}_{2xy}$, dat gelijk is $\pm\,(\vartheta_{2x} - \vartheta_{1y} - u\,\theta_0)$.

Nemen we in aanmerking, dat voor $y = 0$ de onder 3 genoemde grootheden gelijk worden aan $\pm\,(\vartheta_{2x} - \vartheta_1 - p\,q\,\theta_0 - 2\,x\,p\,f_1\,\theta_0)$ zoo volgt hieruit en uit de onafhankelijkheid van ϑ_1 van θ_0 dat de beide grootheden:

$$\varphi_{1y} = \vartheta_{1y} + 2\,y\,p\,f_2\,\theta_0$$

en

$$\varphi_{2x} = \vartheta_{2x} - (p\,q + 2\,x\,p\,f_1)\,\theta_0$$

eveneens niet van θ_0 kunnen afhangen.

De afhankelijkheid der phasen van de stroomcomponenten I_{1y} en I_{2x}, bepaald door ϑ_{1y} en ϑ_{2x}, van het standsverschil θ_0 blijkt dus inderdaad, zooals in hoofdstuk XII ten aanzien van de statorwikkeling werd opgemerkt, zoodanig te zijn dat met eene bepaalde verandering van θ_0 eene hiermede evenredige verandering der phasen gepaard gaat.

Voor het aandeel in het motorkoppel van het roteerend veld, overeenkomende met eene bepaalde waarde van x en eene bepaalde waarde van y, kunnen we op grond van de in hoofdstuk XII afgeleide betrekkingen de uitdrukking opstellen:

$$\mathbf{K}_{xy} = \frac{u^2}{16}\,[\mathbf{N}_{sxy}\,\mathbf{M}_{1xy}] = \frac{u^2}{16\,R_u}\,[\mathbf{M}_{2xy}\,\mathbf{M}_{1xy}]$$

waarin de grootheden $\mathbf{M}_{1xy}$ en $\mathbf{M}_{2xy}$ de $\pm\,2u$-polige magnetomotorische krachten voorstellen, opgeleverd door de stroomcomponenten I_{1y} en I_{2x}.

Hieruit volgt:

$$\mathbf{K}_{xy} = \frac{\pi^2}{2}\,\mathfrak{N}_1\,\mathfrak{N}_2\,I_{1y}\,I_{2x}\,\frac{\mathrm{K}_{1u}\,\mathrm{K}_{2u}}{R_u}\,[\mathbf{m}_{2xy}\,\mathbf{m}_{1xy}]$$

en daar:

$$[\mathbf{m}_{2xy}\,\mathbf{m}_{1xy}] = \pm\,k \sin(\theta_{2x} - \theta_{1y} - u\,\theta_0) = \pm\,k\,\sin(\varphi_{2x} - \varphi_{1y})$$

waarin het + of — teeken geldt, alnaarmate u positief of negatief is,

$$\mathbf{K}_{xy} = k\,\frac{\pi^2}{2}\,\mathfrak{N}_1\,\mathfrak{N}_2\,I_{1y}\,I_{2x}\,\frac{\mathrm{K}_{1u}\,\mathrm{K}_{2u}}{\pm\,R_u}\,\sin(\varphi_{2x} - \varphi_{1y}).$$

Voor de energie-verplaatsing in het beschouwde veld geldt de betrekking:

$$W_{xy} = k\,\mathbf{K}_{xy}\,w$$

waarin w bepaald is door:

$$u\,w = q\,\omega + 2\,y\,p\,f_2\,w_0$$

en waaruit dus volgt:

$$W_{xy} = \frac{\pi^2}{2}\,(q\,\omega + 2\,y\,p\,f_2\,w_0)\,\mathfrak{N}_1\,\mathfrak{N}_2\,I_{1y}\,I_{2x}\,\frac{\mathrm{K}_{1u}\,\mathrm{K}_{2u}}{\pm\,u}\,\frac{1}{R_u}\,\sin(\varphi_{2x} - \varphi_{1y}).$$

De waarde der energie-verplaatsing in het beschouwde veld en het aandeel in het motorkoppel, door dit veld opgeleverd, zijn dus blijkbaar volkomen bepaald door de van θ_0 onafhankelijke grootheden I_{1y}, I_{2x}, φ_{1y} en φ_{2x}. Aangezien nu de gemiddelde waarde der totale energie-verplaatsing en de gemiddelde waarde van het motorkoppel verkregen worden door eenvoudige sommatie dezer grootheden voor de roteerende sinusoidale velden, waaruit het werkelijke veld is saamgesteld, zullen deze gemiddelde totaalwaarden van de energie-verplaatsing en van het motorkoppel door de van θ_0 onafhankelijke grootheden I en φ volkomen bepaald zijn.

Daar nu bovendien de gemiddelde waarden der energieverliezen in de wikkelingen uitsluitend afhangen van de grootheden I zullen we zoowel de electrische als de mechanische verschijnselen, welke zich in den motor afspelen, volledig beschrijven kunnen met behulp der grootheden I en φ, mits we ons steeds beperken tot de beschouwing van het „gemiddelde" verschijnsel, waarmede we trouwens practisch uitsluitend rekening te houden hebben.

Het ligt dus voor de hand de grootheden θ als onbekenden van het vraagstuk te vervangen door de grootheden φ.

Voeren we hierbij ter bekorting in:

$$(q\,\omega + 2\,y\,p\,f_2\,w_0)\,t + 2\,y\,p\,f_2\,\theta_0 = \alpha_y$$

$$(q\,\omega - p\,q\,w_0 - 2\,x\,p\,f_1\,w_0)\,t - (p\,q + 2\,x\,p\,f_1)\,\theta_0 = \beta_x$$

zoo kunnen we de vergelijkingen, die de bewegingen der eenheidsvectoren $\mathbf{m}_{1.xy}$ en $\mathbf{m}_{2.xy}$ bepalen ten opzichte van het midden der beschouwde statorafdeeling als volgt schrijven:

$$u\,\theta = \alpha_y - \varphi_{1y} - \frac{\pi}{2}$$

en

$$u\,\theta = \alpha_y - \varphi_{2x} - \frac{\pi}{2}$$

die, welke deze bewegingen bepalen ten opzichte van het midden der beschouwde rotorafdeeling:

$$u\,\theta = \beta_x - \varphi_{1y} - \frac{\pi}{2}$$

en

$$u\,\theta = \beta_x - \varphi_{2x} - \frac{\pi}{2}.$$

Met behulp der in hoofdstuk XI afgeleide betrekkingen vinden we thans onmiddellijk voor de waarden der electromotorische krachten $\mathcal{E}_{1xy}$ en $\mathcal{E}_{2xy}$, welke in de beschouwde wikkelingsafdeelingen geïnduceerd worden door de in het voorgaande bepaalde krachtstroomen $\mathbf{N}_{sxy}$ en $\mathbf{N}_{rxy}$:

$$\mathcal{E}_{1xy} = \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{2} \frac{\mathfrak{N}_1}{n_1} \frac{K_{1u}}{\pm u} (q\omega + 2ypf_2 w_0) \Big\{ K_{1u} \mathfrak{N}_1 I_{1y} \left(\frac{1}{R_u} + \frac{1}{R_{1u}} \right) \sin(\alpha_y - \varphi_{1y}) + K_{2u} \mathfrak{N}_2 I_{2x} \frac{1}{R_u} \sin(\alpha_y - \varphi_{2x}) \Big\}$$

$$\mathcal{E}_{2xy} = \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{2} \frac{\mathfrak{N}_2}{n_2} \frac{K_{2u}}{\pm u} (q\omega - pqw_0 - 2xpf_1 w_0) \Big\{ K_{1u} \mathfrak{N}_1 I_{1y} \frac{1}{R_u} \sin(\beta_x - \varphi_{1y}) + K_{2u} \mathfrak{N}_2 I_{2x} \left(\frac{1}{R_u} + \frac{1}{R_{2u}} \right) \sin(\beta_x - \varphi_{2x}) \Big\}$$

De harmonische componente van den statorstroom I_1 met de pulsatie $q\omega$ komt tot stand onder de samenwerking van de statorspanning en van de in de statorwikkeling geïnduceerde electromotorische kracht van gelijke pulsatie. De overige harmonische componenten van den statorstroom I_{1y} en die van den rotorstroom I_{2x} komen daarentegen uitsluitend onder den invloed der in deze wikkelingen geïnduceerde overeenkomstige harmonische componenten der electromotorische kracht tot stand.

Aangezien nu de harmonische componente der electromotorische kracht, geïnduceerd in de statorwikkeling, welke overeenkomt met eene bepaalde waarde van y, verkregen wordt door sommatie van $\mathcal{E}_{1xy}$ voor alle geheele waarden van x tusschen $-\infty$ en $+\infty$, de harmonische componente, geïnduceerd in de rotorwikkeling, overeenkomende met eene bepaalde waarde van x, door sommatie van $\mathcal{E}_{2xy}$ voor alle geheele waarden van y tusschen $-\infty$ en $+\infty$, kunnen we thans de volgende betrekkingen opstellen:

$$\text{voor } y = 0 \qquad \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \mathcal{E}_{1x} - r_1 I_1 \sqrt{2} \cos(\alpha_0 - \varphi_1) + E\sqrt{2} \cos\alpha_0 = 0$$

$$\text{voor } y \gtrless 0 \qquad \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \mathcal{E}_{1xy} - r_1 I_{1y} \sqrt{2} \cos(\alpha_y - \varphi_{1y}) = 0$$

$$\text{voor } x \gtreqless 0 \qquad \sum_{y=-\infty}^{y=+\infty} \mathcal{E}_{2xy} - r_2 I_{2x} \sqrt{2} \cos(\beta_x - \varphi_{2x}) = 0$$

welke betrekkingen ons na invoering der boven afgeleide uitdrukkingen voor $\mathcal{E}_{1xy}$ en $\mathcal{E}_{2xy}$ de vergelijkingen van den motor opleveren

De vergelijkingen voor de verschillende waarden van y bestaan uit een aantal termen, welke alle van t afhankelijk zijn door het optreden van een factor van den vorm $\sin(\alpha_y - \varphi)$ of $\cos(\alpha_y - \varphi)$. Aangezien nu aan deze vergelijkingen voldaan moet worden voor alle waarden van t, en dus voor alle waarden van α_y, zullen zij geldig blijven indien we $\cos\alpha_y$ door 1 en $\sin\alpha_y$ door $i = \sqrt{-1}$ vervangen, wat neerkomt op de vervanging van $\cos(\alpha_y - \varphi)$ door $e^{i\varphi}$ en van $\sin(\alpha_y - \varphi)$ door $i\,e^{i\varphi}$. Om dezelfde reden zullen we in de vergelijkingen voor de verschillende waarden van x de grootheden $\cos(\beta_x - \varphi)$ en $\sin(\beta_x - \varphi)$ mogen vervangen door $e^{i\varphi}$ en $i\,e^{i\varphi}$.

We verkrijgen hierdoor het volgende van t onafhankelijke systeem vergelijkingen in complexen vorm:

voor $y = 0$

$$i\,\frac{\pi^2}{2}\,\frac{\mathfrak{N}_1}{n_1}\,q\,\omega\,\Big\{\mathfrak{N}_1 I_1\, e^{i\varphi_1} \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_{1u}^2}{\pm u}\left(\frac{1}{R_u}+\frac{1}{R_{1u}}\right)$$

$$+\,\mathfrak{N}_2 \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} I_{2x}\, e^{i\varphi_{2x}}\, \frac{K_{1u}\,K_{2u}}{\pm u}\,\frac{1}{R_u}\Big\} - r_1 I_1\, e^{i\varphi_1} + E = 0$$

voor $y \gtrless 0$

$$i\,\frac{\pi^2}{2}\,\frac{\mathfrak{N}_1}{n_1}\,(q\,\omega + 2\,y\,p\,f_2\,w_0)\,\Big\{\mathfrak{N}_1 I_{1y}\, e^{i\varphi_{1y}} \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \frac{K_{1u}^2}{\pm u}\left(\frac{1}{R_u}+\frac{1}{R_{1u}}\right)$$

$$+\,\mathfrak{N}_2 \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} I_{2x}\, e^{i\varphi_{2x}}\, \frac{K_{1u}\,K_{2u}}{\pm u}\,\frac{1}{R_u}\Big\} - r_1 I_{1y}\, e^{i\varphi_{1y}} = 0$$

voor $x \gtreqless 0$

$$i\,\frac{\pi^2}{2}\,\frac{\mathfrak{N}_2}{n_2}\,(q\,\omega - p\,q\,w_0 - 2\,x\,p\,f_1\,w_0)\,\Big\{\mathfrak{N}_1 \sum_{y=-\infty}^{y=+\infty} I_{1y}\, e^{i\varphi_{1y}}\, \frac{K_{1u}\,K_{2u}}{\pm u}\,\frac{1}{R_u}$$

$$+\,\mathfrak{N}_2 I_{2x}\, e^{i\varphi_{2x}} \sum_{y=-\infty}^{y=+\infty} \frac{K_{2u}^2}{\pm u}\left(\frac{1}{R_u}+\frac{1}{R_{2u}}\right)\Big\} - r_2 I_{2x}\, e^{i\varphi_{2x}} = 0$$

Dit systeem bevat voor iedere waarde van y één vergelijking en één onbekende van den vorm $I_{1y}\, e^{i\varphi_{1y}}$, voor iedere waarde van x één vergelijking en één onbekende van den vorm $I_{2x}\, e^{i\varphi_{2x}}$. Aangezien de vergelijkingen de grootheid θ_0 niet bevatten, zullen de grootheden I en φ, welke door deze vergelijkingen bepaald worden, inderdaad niet van θ_0 afhankelijk zijn.

We hebben nu te doen met een systeem, bestaande uit een oneindig aantal vergelijkingen met een oneindig aantal onbekenden, waarvan in het algemeen de oplossing slechts mogelijk is door opvolgende benaderingen, en dan nog slechts mits de onbekenden I_{1y} en I_{2x} bij onbepaalde toename van y en x tot 0 naderen.

Dat dit laatste inderdaad het geval moet zijn, volgt onmiddellijk uit de overweging, dat het beschouwde systeem vergelijkingen betrekking heeft op een physisch vraagstuk, en dat dus de oplossing een physisch bestaanbaren toestand moet bepalen, waarbij slechts *eindige* energie-hoeveelheden verplaatst of in een anderen vorm omgezet kunnen worden.

De gemiddelde waarden van het energieverlies in de beide wikkelingen:

$$V_1 = n_1\, r_1 \sum_{y=-\infty}^{y=+\infty} I_{1y}^2 \quad \text{en} \quad V_2 = n_2\, r_2 \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} I_{2x}^2$$

moeten dus door *eindige* grootheden kunnen voorgesteld worden, *)

---

*) De noodzakelijke betrekkingen tusschen de energie-hoeveelheden kunnen onmiddellijk als volgt uit het systeem vergelijkingen worden afgeleid.

Vermenigvuldigen we beide leden der vergelijkingen voor de verschillende waarden van y met $n_1\, I_{1y}\, e^{-i\varphi_{1y}}$, die voor de verschillende waarden van x met $n_2\, I_{2x}\, e^{-i\varphi_{2x}}$, zoo levert ons de gelijkstelling der reëele gedeelten de volgende betrekkingen:

voor $y = 0$

$$\frac{\pi^2}{2}\, \mathfrak{N}_1\, \mathfrak{N}_2\, q\, \omega\, I_1 \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} I_{2x} \sin(\varphi_{2x} - \varphi_1) \frac{K_{1u}\, K_{2u}}{\pm u} \frac{1}{R_u} + n_1\, r_1\, I_1^2$$
$$= n_1\, E I_1 \cos \varphi_1$$

wat slechts het geval kan zijn indien zoowel I_{1y} voor $y = \pm \infty$ als I_{2x} voor $x = \pm \infty$ tot de limietwaarde 0 naderen

---

voor $y \gtrless 0$

$$\frac{\pi^2}{2} \mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2 (q x + 2 y p f_2 w_0) I_{1y} \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} I_{2x} \sin(\varphi_{2x} - \varphi_{1y}) \frac{\mathrm{K}_{1u}\,\mathrm{K}_{2u}}{\pm u} \frac{1}{R_u} + n_1 r_1 I_{1y}^2 = 0$$

voor $x \gtreqless 0$

$$\frac{\pi^2}{2} \mathfrak{N}_1 \mathfrak{N}_2 (q x - p q w_0 - 2 x p f_1 w_0) I_{2x} \sum_{y=-\infty}^{y=+\infty} I_{1y} \sin(\varphi_{1y} - \varphi_{2x}) \frac{\mathrm{K}_{1u}\,\mathrm{K}_{2u}}{\pm u} \frac{1}{R_u} + n_2 r_2 I_{2x}^2 = 0$$

Met inachtneming der op bladz 198 afgeleide uitdrukkingen voor de waarden van het motorkoppel $\mathbf{K}_{xy}$ en van de energieverplaatsing W_{xy} opgeleverd door het veld, overeenkomende met bepaalde waarden van x en van y, kunnen we voor bovenstaande betrekkingen schrijven:

$$\sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} W_{x0} + n_1 r_1 I_1^2 = n_1 E I_1 \cos\varphi_1$$

$$\sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} W_{xy} + n_1 r_1 I_{1y}^2 = 0$$

$$-\sum_{y=-\infty}^{y=+\infty} W_{xy} + \mathbf{w}_0 \sum_{y=-\infty}^{y=+\infty} \mathbf{K}_{xy} + n_2 r_2 I_{2x}^2 = 0$$

waarbij de beide eerste ten aanzien van de harmonische stroomcomponenten der statorwikkeling, de laatste ten aanzien van de harmonische stroomcomponenten der rotorwikkeling de uitdrukking zijn der wet van het behoud van arbeidsvermogen. De sommatie dezer betrekkingen voor alle mogelijke waarden van y en voor alle mogelijke waarden van x geeft ons onmiddellijk de beide volgende:

$$W + V_1 = n_1 E I_1 \cos\varphi_1$$
$$W - V_2 = \mathbf{K}\,\mathbf{w}_0$$

zijnde de uitdrukkingen der wet van het behoud van arbeidsvermogen voor de beide wikkelingen.

We zien onmiddellijk in, dat voor eindige waarden van de energieverliezen V_1 en V_2 slechts eindige waarden der energie-opname $n_1 E I_1 \cos\varphi_1$, van de energie-verplaatsing W in het entrefer, en van de mechanische energie-afgifte $\mathbf{K}\,\mathbf{w}_0$ kunnen optreden.

Dat thans inderdaad eene oplossing door middel van opvolgende benaderingen mogelijk is, blijkt indien wij de vergelijkingen eenerzijds, en de onbekenden in ieder der vergelijkingen anderzijds, rangschikken naar eenzelfde opvolging der waarden van x en y.

Na vermenigvuldiging van beide leden met:

$$\frac{n_1}{q\omega + 2ypf_2w_0} \text{ of } \frac{n_2}{q\omega - pqw_0 - 2xpf_1w_0}$$

alnaarmate we te doen hebben met eene vergelijking, overeenkomende met eene bepaalde waarde van x of met eene bepaalde waarde van y, wordt dan de determinant, gevormd door de coëfficiënten der onbekenden, symmetrisch. Eene methode voor de oplossing van een dergelijk systeem vergelijkingen, door *achtereenvolgens* meerdere onbekenden in te voeren, werd reeds vroeger door schrijver aangegeven *). Bij toepassing eener dergelijke methode blijkt van zelf, wanneer eene voldoende mate van benadering verkregen is, en dus met de invoering van nog meerdere onbekenden kan worden opgehouden.

In sommige gevallen kan het systeem vergelijkingen eenigszins vereenvoudigd worden. Indien nl. f_1 oneven is, bestaat de mogelijkheid dat voor eene bepaalde reeks waarden van y, wier opvolgende verschillen f_1 bedragen, $q + 2yf_2$ door f_1 deelbaar is. Aangezien het quotient hierbij noodzakelijk oneven is, zullen de overeenkomstige waardenreeksen van $u = p(q + 2xf_1 + 2yf_2)$ in dit geval alle den term pf_1 bevatten, en de door deze waarden van u bepaalde velden induceeren bijgevolg in de f_1-phasige statorwikkeling een eenphasen-systeem electromotorische krachten. Zijn nu de f_1 takken dezer wikkeling in sterschakeling verbonden, zoo zal het hiermede overeenkomende eenphasen systeem stroomen niet kunnen optreden, m. a. w.:

Bij sterschakeling der wikkeling zijn de statorstroom-componenten I_{1y}, overeenkomende met de waarden van y, waarvoor $q + 2yf_2$ door f_1 deelbaar is, en om dezelfde reden de rotorstroom-componenten I_{2x}, overeenkomende met de waarden van x, waarvoor $q + 2xf_1$ door f_2 deelbaar is, $= 0$.

*) P. M. Verhoeckx. Une méthode analytique et graphique pour le calcul des réseaux fermés. *L'Éclairage Électrique.* 16 et 23 Avril 1904.

In ons systeem vergelijkingen zullen we dus de vergelijkingen, welke met bovenbedoelde waarden van x en y overeenkomen, moeten *vervangen* door:

$$I_{1y} = 0 \quad \text{en} \quad I_{2x} = 0.$$

We zien echter gemakkelijk in, dat deze vergelijkingen tot bovenstaande vormen herleid worden, indien we aan de constanten K_{1u} voor de bedoelde waarden van y en aan de constanten K_{2u} voor de bedoelde waarden van x de waarde 0 *toekennen*. Door op deze wijze den invloed van de koppeling der wikkelingen in rekening te brengen, mogen we dus het boven afgeleide systeem vergelijkingen als *algemeen* geldig blijven beschouwen.

We zullen thans nagaan, wat er van ons systeem vergelijkingen overblijft, indien we aannemen, dat voor alle waarden van u, welke van $\pm p$ verschillen, de constanten $K_u = 0$ zijn, m. a. w. dat slechts $2p$-polige velden kunnen optreden. Hierbij nemen we aan, dat de beschouwde q^e harmonische componente der statorspanning zelf kan worden opgevat als grondcomponente van een f_1-phasen-systeem met de pulsatie $q\,\omega$, wat, zooals wij in het vorige hoofdstuk aantoonden, bij de practisch gebruikelijke systemen steeds het geval is.

In de bovengenoemde onderstelling zijn dus slechts die waarden van K_u van 0 verschillend, waarvoor:

$$u = p\,(1 + 2\,x\,f_1 + 2\,y\,f_2) = \pm p$$

dus:

$$x\,f_1 + y\,f_2 = 0 \text{ of } -1.$$

Waarden van x en y, welke te samen aan een dezer beide voorwaarden voldoen, zullen we als overeenkomstige waarden aanduiden.

We zien nu onmiddellijk in, dat bij een meerphasen-motor (waarvoor f_1 en f_2 *beide* > 1 zijn) met iedere waarde van x hoogstens ééne waarde van y overeenkomt en omgekeerd, en dat bij een eenphasen-motor, (waarvoor $f_1 = 1$, doch $f_2 > 1$ is) met iedere waarde van x eveneens hoogstens ééne waarde van y, echter met iedere waarde van y steeds twee waarden van x, welke 1 verschillen, overeenkomen.

Hebben we te doen met waarden van y, waarmee geene waarden van x overeenkomen of omgekeerd, zoo zijn in de overeenkomstige vergelijkingen *alle* waarden van $K_u = 0$ te stellen, en uit deze vergelijkingen volgt dan onmiddelijk:

$$I_{1y} = 0 \text{ en } I_{2x} = 0.$$

Van de overblijvende vergelijkingen kunnen we thans die voor eene bepaalde waarde van y te samen beschouwen met die voor de overeenkomstige waarden van x, en opmerken dat in ieder dier vergelijkingen slechts die waarden van K_u verschillend van 0 zijn, welke optreden in de coëfficiënten der door de beschouwde waarden van x en y bepaalde onbekenden I_{2x} en I_{1y}. Iedere waarde van y levert ons dus een zelfstandig systeem vergelijkingen op ter bepaling van I_{1y} en van de overeenkomstige waarden van I_{2x}. Aangezien nu in alle vergelijkingen, met uitzondering van die voor $y = 0$, de bekende term $= 0$ is, volgt hieruit dat alle waarden van I_{1y} en I_{2x} met uitzondering van die, welke worden aangewezen door $y = 0$ en de hiermee overeenkomende waarden van x, $= 0$ zijn.

In het geval van een meerphasen-motor resten ons dus slechts de beide vergelijkingen voor $y = 0$, en voor de overeenkomstige waarde van x, zijnde $x = 0$:

$$i\frac{\pi^2}{2}\frac{\mathfrak{N}_1}{n_1} q\omega \left\{ \mathfrak{N}_1 I_1 e^{i\varphi_1} \frac{K_1^2}{p}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right) + \mathfrak{N}_2 I_2 e^{i\varphi_2} \frac{K_1 K_2}{p}\frac{1}{R} \right\}$$
$$- r_1 I_1 e^{i\varphi_1} + E = 0$$

$$i\frac{\pi^2}{2}\frac{\mathfrak{N}_2}{n_2} (q\omega - p w_0) \left\{ \mathfrak{N}_1 I_1 e^{i\varphi_1} \frac{K_1 K_2}{p}\frac{1}{R} + \mathfrak{N}_2 I_2 e^{i\varphi_2} \frac{K_2^2}{p}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_2}\right) \right\}$$
$$- r_2 I_2 e^{i\varphi_2} = 0$$

in het geval van een eenphasen-motor slechts de vergelijkingen voor $y = 0$, en voor de overeenkomstige waarden van x, zijnde $x = 0$ en $x = -1$:

$$i\frac{\pi^2}{2}\frac{\mathfrak{N}_1}{n_1} q\omega \left\{ 2\,\mathfrak{N}_1 I_1 e^{i\varphi_1} \frac{K_1^2}{p}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right) + \mathfrak{N}_2 (I_2 e^{i\varphi_2} + I_2' e^{i\varphi_2'}) \frac{K_1 K_2}{p}\frac{1}{R} \right\}$$
$$- r_1 I_1 e^{i\varphi_1} + E = 0$$

$$i\frac{\pi^2}{2}\frac{\mathfrak{N}_2}{n_2}(q\omega - p\,w_0)\left\{\mathfrak{N}_1 I_1 e^{i\varphi_1}\frac{K_1 K_2}{p}\frac{1}{R} + \mathfrak{N}_2 I_2 e^{i\varphi_2}\frac{K_2^2}{p}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_2}\right)\right\}$$
$$- r_2 I_2 e^{i\varphi_2} = 0$$

$$i\frac{\pi^2}{2}\frac{\mathfrak{N}_2}{n_2}(q\omega + p\,w_0)\left\{\mathfrak{N}_1 I_1 e^{i\varphi_1}\frac{K_1 K_2}{p}\frac{1}{R} + \mathfrak{N}_2 I_2' e^{i\varphi_2'}\frac{K_2^2}{p}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_2}\right)\right\}$$
$$- r_2 I_2' e^{i\varphi_2'} = 0$$

De beide bovenstaande systemen vergelijkingen vormen den feitelijken grondslag der gangbare theoriën van de meerphasige, en van de eenphasige motoren met kortsluit- en sleepringanker. Zij bepalen in het eerste geval éene stator- en éene rotorstroomcomponente, in het tweede geval éene stator- en twee rotorstroomcomponenten.

Voor het beantwoorden der vraag, of de vergelijkingen der gangbare theoriën tot practisch voldoend nauwkeurige uitkomsten leiden, beschouwen we het geval, dat n_2 vele malen grooter is dan n_1, welk geval practisch verwezenlijkt wordt door het zoogenaamde kooianker, en dat we kunnen beschouwen als een benadering van het theoretische grensgeval $n_2 = \infty$. Aangezien hierbij voor eindige waarden van x en voor waarden van y, welke van 0 verschillen, $u = \infty$, en dus K_{1u} en $K_{2u} = 0$ zijn wordt ons systeem vergelijkingen als volgt vereenvoudigd:

de vergelijkingen voor $y \gtrless 0$ leveren onmiddellijk op $I_{1y} = 0$, terwijl die voor de verschillende waarden van x overgaan in:

$$\mathfrak{N}_1 I_1 e^{i\varphi_1}\frac{K_{1u}\,K_{2u}}{\pm u}\frac{1}{R_u}$$
$$+ \mathfrak{N}_2 I_{2x} e^{i\varphi_{2x}}\left\{\frac{K_{2u}^2}{\pm u}\left(\frac{1}{R_u}+\frac{1}{R_{2u}}\right) + i\frac{2\,n_2\,r_2}{\pi^2\,\mathfrak{N}_2^2\,(q\,\omega - u\,w_0)}\right\} = 0$$

Met behulp dezer laatste vergelijkingen kunnen we alle onbekenden $I_{2x}e^{i\varphi_{2x}}$ uit de ongewijzigde vergelijking voor $y = 0$ elimineeren, en daarna uit deze $I_1 e^{i\varphi_1}$ oplossen.

Met deze oplossing zullen wij ons hier niet bezig houden daar zij tot geene bijzondere opmerkingen aanleiding geeft. We zullen echter nader de bovenstaande vergelijking beschouwen bij de synchrone snelheid van den motor, dus voor $pw_0 = q\,\omega$, waarbij de coëfficiënt van $\mathfrak{N}_2 I_{2x}\,e^{i\varphi_{2x}}$ gelijk wordt aan:

$$\frac{K_{2u}{}^2}{\pm u}\left(\frac{1}{R_u} + \frac{1}{R_{2u}}\right) - i\frac{n_2\,r_2}{x\,f_1\,q\,\omega\,\pi^2\,\mathfrak{N}_2{}^2}$$

Practisch nu hebben we steeds te doen met zoodanig kleine waarden van den rotorweerstand, dat de modulus van bovenstaande complexe uitdrukking bij benadering gelijk is aan het reëele gedeelte, tenzij $x = 0$ is, in welk geval de modulus oneindig groot wordt.

Bijgevolg is voor $x = 0$:

$$I_{2x} = 0$$

voor alle overige waarden van x:

$$\mathfrak{N}_2\,I_{2x}\,\frac{K_{2u}{}^2}{\pm u}\left(\frac{1}{R_u} + \frac{1}{R_{2u}}\right) = \pm\,\mathfrak{N}_1\,I_1\,\frac{K_{1u}\,K_{2u}}{\pm u}\,\frac{1}{R_u}$$

dus, aangezien in het beschouwde geval $K_{2u} = \frac{2}{\pi}$

$$I_{2x} = \pm\,\frac{\pi}{2}\,\frac{\mathfrak{N}_1}{\mathfrak{N}_2}\,I_1\,K_{1u}\,\frac{R_{2u}}{R_u + R_{2u}}$$

In tegenstelling met de gangbare theorie der meerphasenmotoren vinden we dus, dat bij de synchrone snelheid de rotorwikkeling niet stroomloos wordt, en dat dus ook het energieverlies in deze wikkeling niet $= 0$ is. Het aandeel van I_{2x} in dit energieverlies is blijkbaar:

$$V_{2x} = n_2\,r_2\,I_{2x}{}^2 = \frac{\pi^2}{4}\,\frac{n_2\,r_2\,\mathfrak{N}_1{}^2}{\mathfrak{N}_2{}^2}\,I_1{}^2\,K_{1u}{}^2\,\frac{R_{2u}{}^2}{(R_u + R_{2u})^2}$$

waarvoor wij bij invoering van het energieverlies in de statorwikkeling V_1, en van de verhouding der koperhoeveelheden in stator en rotor λ, welke, zooals bekend ondersteld mag worden, gelijk is aan die van de grootheden $\frac{n_2\,r_2}{\mathfrak{N}_2{}^2}$ en $\frac{n_1\,r_1}{\mathfrak{N}_1{}^2}$, ook kunnen schrijven:

$$V_{2x} = \frac{\pi^2}{4}\,\lambda\,V_1\,K_{1u}{}^2\,\frac{R_{2u}{}^2}{(R_u + R_{2u})^2}$$

De sommatie van V_{2x} over alle mogelijke waarden van x, behalve $x = 0$, levert het totale energieverlies in de rotorwikkeling op bij de synchrone snelheid. Blijkbaar is de mate van convergentie der te sommeeren reeks afhankelijk van de wijze waarop eenerzijds K_{1u}^2, anderzijds de verhouding van R_{2u} tot R_u, afnemen bij toenemende waarden van u. Bij eene gelijkmatig verdeelde statorwikkeling, waarvoor K_{1u}^2 omgekeerd evenredig is met u^2, zal de reeks steeds sterk convergeeren; daarentegen is bij eene éénspleetswikkeling, waarvoor K_{1u}^2 constant is, de convergentie geheel afhankelijk van de verhouding der reluctanties R_{2u} en R_u, en wordt zelfs de beschouwde reeks divergent, indien deze verhouding oneindig groot is, dus bij afwezigheid van magnetische spreiding.

Hieruit mogen we besluiten, dat bij de practisch gebruikelijke wikkelingen de sommatie van V_{2x} eene waarde kan opleveren, welke volstrekt niet verwaarloosbaar is ten opzichte van V_1, m. a. w. dat ook bij de synchrone snelheid het energieverlies in de rotorwikkeling eene wezenlijke bijdrage kan leveren tot het totale energieverlies in den motor.

Tusschen het aandeel in de energieverplaatsing in het entrefer W_x, het energieverlies V_{2x}, en het mechanische vermogen $\mathbf{K}_x \mathbf{w}_0$, opgeleverd door de stroomcomponente I_{2x}, moet de volgende betrekking bestaan:

$$W_x - V_{2x} = \mathbf{K}_x \, \mathbf{w}_0 = \frac{W_x}{w} \, w_0 = W_x \, \frac{u}{p}$$

waaruit volgt:

$$W_x = \frac{p}{p-u} \; V_{2x} = -\frac{1}{2\,x f_1} \; V_{2x}$$

De totale energieverplaatsing W verkrijgen we door sommatie van W_x voor alle mogelijke waarden van x, behalve $x = 0$. Hierbij is de grootste der te sommeeren termen slechts gelijk aan het $2 f_1^{\,e}$ deel van V_{2x}, terwijl overigens de absolute waarde van de verhouding dezer termen tot V_{2x} omgekeerd evenredig is met x.

Nemen we bovendien nog in aanmerking dat deze termen afwisselend positief en negatief zijn, zoo blijkt dat de totale energieverplaatsing naar den rotor slechts gering kan zijn in vergelijking met het totale energieverlies in de rotor-wikkeling. In hoofdzaak zal dus dit energieverlies moeten worden aangevuld door *mechanisch* aan den rotor toegevoerde energie, en hieruit volgt dus, in afwijking van de gangbare theorie, dat de motor zelfs in *volkomen* onbelasten toestand de synchrone snelheid uit zich zelf niet zal kunnen bereiken.

Uit de voorgaande beschouwingen volgt nu, dat zelfs in het theoretische grensgeval $n_2 = \infty$ de verwaarloozing der nevenvelden slechts leiden kan tot eene motor-theorie *in eerste benadering*.

Dit geldt dus à fortiori in het geval dat n_2 eindig is, waarmee we practisch steeds te doen hebben, en waarbij de verschijnselen nog meer saamgesteld worden door het optreden der stroomen I_{1y} in de statorwikkeling.

Eene *exacte* theorie dezer motoren kan slechts opgebouwd worden op het *volledige* stelsel vergelijkingen, dat we in dit hoofdstuk hebben afgeleid.

INHOUD.

STELLINGEN.

I.

Een sinusoidaal magnetisch veld kan in zijn meest algemeenen vorm steeds beschouwd worden als de superpositie van twee sinusoidale velden van verschillende soort, die ieder voor zich door eene vector-grootheid kunnen worden voorgesteld.

De samenstelling dezer vectoren tot een enkelen vector, voorstellende het totale veld, is niet geoorloofd.

II.

Een sinusoidaal magnetisch veld, dat hetzij door één vector, hetzij door twee gelijk of tegengesteld gerichte vectoren, kan worden voorgesteld, kan geene overbrenging van kracht of energie tusschen twee lichamen tot stand brengen.

Bedoelde overbrenging kan slechts geschieden door samenwerking van twee ongelijksoortige en ongelijkstandige veld-componenten als bedoeld in de stelling I.

De waarde van het overgebrachte krachtskoppel wordt bepaald door het vectorproduct der vectoren, waardoor de ongelijksoortige veld-componenten kunnen worden voorgesteld.

III.

In een vlak magnetisch veld van willekeurigen mits onveranderlijken vorm, roteerende om eene as, welke loodrecht staat op het vlak der krachtlijnen, is het oogenblikkelijk naar deze as overgebrachte vermogen gelijk aan het product van het overgebrachte constante krachtskoppel en de oogenblikkelijke rotatiesnelheid van het veld.

IV.

De gebruikelijke splitsing van den magnetischen krachtstroom binnen het entrefer eener electrische machine in:

een restkrachtstroom, afhankelijk van de resulteerende magnetomotorische kracht der beide wikkelingen,

en

twee lekkrachtstroomen, ieder afhankelijk van de magnetomotorische kracht van een der wikkelingen,

is uitsluitend te beschouwen als een mathematische kunstgreep, waaraan geene physische beteekenis kan worden toegekend.

V.

De identifieering:

eenerzijds van den restkrachtstroom eener electrische machine met het deel van den krachtstroom, dat de beide wikkelingen snijdt,

anderzijds van de lekkrachtstroomen met de deelen van den krachtstroom, welke slechts één dezer beide wikkelingen snijden,

berust op begripsverwarring.

VI.

In de gangbare theoriën der electrische machines ligt aan de bepaling van het magnetisch veld de onderstelling ten grondslag, dat de omgeving (met uitsluiting van het entrefer) magnetisch impermeabel is.

Voor goed gedimensionneerde machines levert deze onderstelling op zich zelf slechts eene practisch verwaarloosbare onnauwkeurigheid op in de uitkomst der berekening, en moet zij dus als volkomen geoorloofd beschouwd worden.

VII.

Het is wenschelijk dat draaistroomnetten voor lage spanning met 0-leider worden uitgevoerd.

VIII.

De partieele differentiaal-vergelijking, in de electriciteitsleer bekend als de telegraaf-vergelijking:

$$c^2 \frac{\delta^2 I}{\delta x^2} = \varepsilon \mu \frac{\delta^2 I}{\delta t^2} + 4 \pi \lambda \mu \frac{\delta I}{\delta t}$$

laat geene oplossing toe van den vorm:

$$I = A\, e^{\alpha x + \beta t}$$

welke vereenigbaar is met de aanvangscondities, geldende bij het intreden van overspannings-verschijnselen.

Eene theorie dezer verschijnselen, welke berust op bovenbedoelde particuliere oplossing der telegraaf-vergelijking, moet noodzakelijk leiden tot onjuiste uitkomsten.

IX.

De in de meeste Gemeentelijke Electriciteitsverordeningen voorkomende bepalingen omtrent de grootte der toe te laten phase-verschuiving bij motoren behooren daaruit te verdwijnen.

X.

De gebruikelijke tarieven bij wissel- en draaistroom, gebaseerd op het kilowatturen-verbruik, berusten op een onjuisten grondslag.

XI.

Een stroom-tarief, dat ten allen tijde eene vaste verhouding waarborgt tusschen de zelfkosten en den verkoopsprijs der electrische energie, moet nog worden uitgedacht.

XII.

Energie-verkoop met stroombegrenzers is alleen aan te bevelen bij eene volbelaste centrale, die niet voor uitbreiding vatbaar is.