UNIVERSIDAD NACIONAL DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

EMPUJE DE TIERRAS

TESIS PROFESIONAL

Presentada

por el pasante de Ingeniería Civil

LUIS FLORES COVARRUBIAS

MEXICO, D. F.

1 9 3 7

UNIVERSIDAD NACIONAL DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

A la Biblioteca de la Noble Institución del Geológico, con el deseo de que esta tesis sea útil.

L. Flores Covarrubias

Enero de 1940.

EMPUJE DE TIERRAS

Tesis Profesional Presentada por
el Pasante de Ingeniería Civil

LUIS FLORES COVARRUBIAS

México, D. F.

1 9 3 7

Con todo cariño y gratitud a mis padres Doña Luz Covarrubias de Flores e Ing. Don Teodoro Flores. Con mi afecto y cariño a mis hermanos y familiares

A mi respetado Maestro el Sr. Ing. Manuel Santillán

A los Honorables Profesores de mi Escuela

261

I N D I C E

INTRODUCCION

En el proyecto y ejecución de cualquier obra de ingeniería, tres son los puntos de vista principales desde los que debe estimarse los diversos aspectos de sus estructuras.

En términos generales, en el primer punto de vista puede suponerse cualquiera estructura como dotada de una rigidez absoluta, y en este supuesto debe estáticamente evitarse que se produzca cualquier movimiento de ella, ya sea por deslizamiento o por rotación alrededor de un eje.

En el segundo punto de vista, el ingeniero norma su criterio, de acuerdo con los hechos reales y no pudiendo aceptar la existencia de estructuras de rigidez absoluta, procura, en sus proyectos y en su realización, que la distribución de fatigas en las estructuras consideradas sea tal, que los esfuerzos interiores, desarrollados por las fuerzas exteriores, no sobrepasen ciertos límites elásticos de la resistencia molecular interna de dichas estructuras.

El tercer punto de vista, es el económico, tan imperativo en sí mismo que viene a imponer poderosas restricciones a las soluciones teóricas dadas por los dos primeros puntos de vista, lo que hace de difícil resolución ciertos problemas de Ingeniería.

Ahora bien, es evidente, que para la resolución de un problema de Ingeniería, teniendo en cuenta estos puntos de vista, es de ingente necesidad el conocimiento de las fuerzas exteriores que van a obrar temporal o permanentemente sobre las estructuras en cuestión.

INTRODUCCION

[illegible] cualquier obra [illegible] los puntos de vista principales desde los que [illegible] de sus [illegible].

[illegible] generales, [illegible] desde [illegible] vista [illegible] por [illegible].

[illegible] punto de vista [illegible] de los [illegible] que [illegible].

[illegible] tercer punto de vista, [illegible] importa[illegible] [illegible] las dos [illegible].

[illegible]

De estas fuerzas exteriores, es de las más importantes y quizá la que más a menudo se presenta en obras de Ingeniería, la resultante de los empujes debidos a una porción de tierras. Esto se patentiza en los estribos de los puentes, en muchos tipos de presas, en fortificación de tajos y canales, en obras de ademación, en socavones y tiros de minas y en la fortificación de ciertas labores de disfrute.

No son las anteriores razones, las únicas que demuestran que el conocimiento del empuje de tierras es de capital importancia en la Ingeniería. En efecto, existe además otra, que hace que el citado conocimiento sea de actual importancia, sobre todo en nuestro medio.

Me refiero al cambio básico y radical que han sufrido las ideas sobre tan interesante tema, ideas que no solamente difieren de las teorías clásicas, que desde antaño hasta hoy día se vienen aplicando en el cálculo de Ingeniería; sino que señalan también, en las teorías clásicas, errores y falacias fundamentales, que hacen que estas teorías, sean en algunos casos restringidas y en la mayoría desechadas.

Este cambio tan profundo, notado de una manera franca desde hace algunos años, seguramente se debe a la posibilidad que se tiene hoy día de evaluar y comparar las magnitudes de los esfuerzos internos y de las consiguientes deformaciones sufridas en el interior de masas de arenas y tierras.

Estas son, entre otras, las razones por las cuales reviste en Ingeniería gran importancia de actualidad, el tema que me ha sido asignado como tesis.

Habiendo tenido el honor de asistir como representante del Instituto Geológico de México a la Conferencia Internacional de Mecánica de Suelos, efectuada en la Universidad de Harvard, tuve oportunidad de conocer las ideas que sobre este tema imperan hoy día, y es mi intención

al desarrollar esta tesis contribuir, en la medida de mis cortos esfuerzos, a la divulgación de estas nuevas ideas sobre la distribución y magnitud de las fuerzas debidas al empuje de tierras y para exponer, al mismo tiempo, los conceptos que marcan actualmente las limitaciones a que deben sujetarse las teorías clásicas de Empuje de Tierras.

Luis Flores Covarrubias

México, D. F. julio de 1937.

I

TEORIAS CLASICAS SOBRE EMPUJE DE TIERRAS

TEORIAS DE COULOMB Y COULOMB-PONCELET.- Si en la (Fig. 1) suponemos que AB es el paramento interno del muro que va

P= Resultante de las reacc.del muro.
θ= $\angle$ del prisma de empuje.
β= $\angle$ de rozamiento entre tierra y muro.
$tg\beta = \mu'$
ϕ= $\angle$ de talud de las tierras.
$tg\,\phi = \mu$
R= resultante de las reacciones de la porción BCDE.
w= peso volumétrico del material.

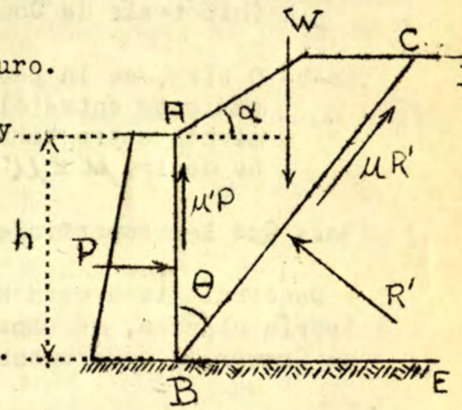


FIG. 1.

a sostener las tierras comprendidas a la derecha; entonces la teoría clásica de Coulomb y esta misma teoría junto con la hipótesis de Poncelet, demuestra:

A) Que la resultante P, vale

$$P = K_1 w h^2 \quad \{K_1 = constante\}$$

B) Que de ser $\alpha = 0$, el prisma de máximo empuje está limitado por el plano bisector del ángulo $\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)$.

C) Que en las mismas condiciones anteriores, $(\alpha = 0)$, Pmáx está aplicado a la tercera parte de h a partir de B.

Para demostrar A), B), y C) la teoría de Coulomb y la teoría de Coulomb-Poncelet tienen que basarse en las siguientes hipótesis:

1a.- Que para calcular las diferentes reacciones, tiene validez la ley elemental del rozamiento, del propio Coulomb.

2a-a- Que el rozamiento entre el muro y la tierra es nulo (hipótesis de Coulomb); $\mu' = 0$

2a-b- O bien, en la teoría de Coulomb-Poncelet, que el rozamiento entre el muro y la tierra es igual al rozamiento entre tierra y tierra (hipótesis de Poncelet) es decir; $\mu = \mu'$

3a.- Que las superficies de ruptura son planas.

Concerniente a esta hipótesis, los partidarios de la teoría clásica, se empeñan en afirmar que los experimentos de Cramer la comprueban.

4a.- Que el prisma ABC está a punto de deslizar a lo largo del plano BC, y que por lo tanto R forma el ángulo ϕ con la normal a BC.

La teoría clásica de Coulomb fué ideada en principio por Vauban y Bullet (1687) sin embargo, Coulomb, fué el primero que introdujo el concepto de prisma de máximo empuje, idea alrededor de la cual se desarrollaron los trabajos de

Prony, François, Navier, Poncelet, Hagen, Scheffler, Cul--mann, Rebhan, Wittman y Weyrauch.

La teoría de Coulomb admite las hipótesis antes enunciadas excluyendo la segunda letra b, (hipótesis de Poncelet). En estas condiciones expresa a P como función de θ y encuentra

$$P_{máx} = \frac{1}{2} w h^2 tg^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{en el caso particular} \\ \text{de } \alpha = 0 \end{array} \right\}$$

valor que puede escribirse en la forma

$$P_{máx} = \frac{1}{2} w h^2 \left(\sqrt{1+\mu^2} - \mu\right)^2$$

Admitiendo la hipótesis de Poncelet, se llega a una --- teoría que llamaré teoría Coulomb-Poncelet. En esta teo-- ría se proyectan las diversas fuerzas sobre dos ejes respectivamente vertical y horizontal y se elimina a R de -- las ecuaciones así encontradas, para llegar al valor de P

$$P = \frac{1}{2} w h^2 \frac{1 - \mu \, tg\theta}{(2\mu \, ctg\theta + 1 - \mu^2)(1 + tg\alpha \, tg\theta)} \quad \dots\dots\dots\dots \text{(I)}$$

diferenciando este valor, igualando con 0 a la derivada - y despejando a θ encontramos

$$\theta = tg^{-1} \frac{2\mu^2 - \sqrt{2\mu(1+\mu^2)(\mu - tg\alpha)}}{(1+\mu^2)\,tg\alpha - \mu(1-\mu^2)}$$

valor de θ que hace a P máximo, este valor P'_{max} varía -- del encontrado por Coulomb para muros en iguales circunstancias sólo en el valor de la constante K_1.

Si imaginamos un muro de altura variable z, el resultado de la teoría de Coulomb lo podemos escribir

$$P = \frac{1}{2} w z^2 tg^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right),$$

esta ecuación nos muestra, que si llamamos p a la presión función de z, que actúa

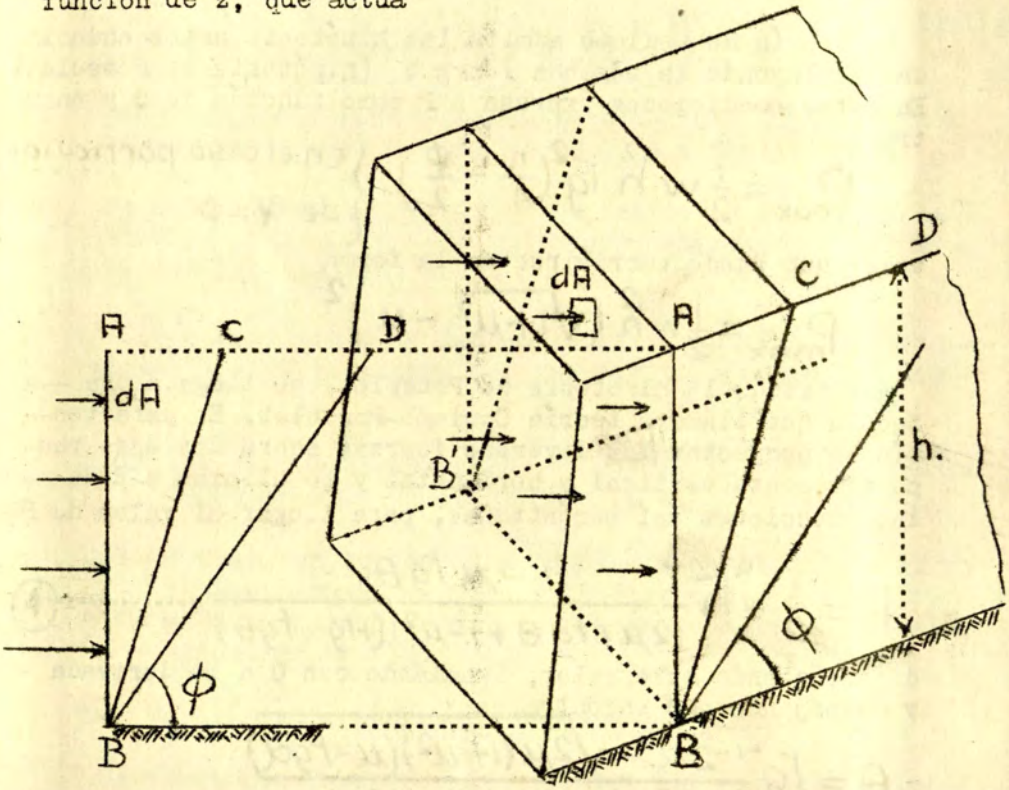


FIG. 2.

en el area dA (Fig. 2), entonces

$$P=\int_0^h p\,dz=\frac{w}{2}z^2\,tg^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi}{2}\right)=K_1'z^2$$

diferenciando con respecto a z obtenemos

$$p = 2Kz$$

que nos indica que la presión originada en el muro es-función lineal de la altura.

Es obvio que en esta clase de repartición de presiones, analogamente con las presiones hidrostáticas, la resultante está a la tercera parte de la altura del - muro a contar de B. Conclusión C) a la que llega la - teoría de Coulomb.

Por otra parte, es evidente, que esta conclusión --- así como todas las ya enunciadas, son el resultado directo de las cuatro hipótesis sobre las que se basa esta teoría de Coulomb.

Teoría de Rankine.- Juan Guillermo Macquorn Rankine - ideó otra teoría que análoga a la teoría del equilibrio elástico, pero introduciendo el rozamiento interno y la cohesión, en lugar de las relaciones de Hook, analiza-el equilibrio de las fuerzas que intervienen en estos-procesos físicos.

En esta teoría trabajaron intensamente y posteriormente a Rankine, Scheffler, Levy, Cousidère, Mohr Winkler, Weyrauch Häseler y Bonnines.

La teoría de Rankine, tomada en el caso particular-- de que el paramento interno del muro es vertical y que la superficie exterior de las tierras es horizontal, demuestra:

A) que la resultante P de los empujes de la tierra sobre el muro de retención (Fig. 3) tiene por valor

$$P = \frac{1}{2} w h^2 \frac{1 - \operatorname{sen} \phi}{1 + \operatorname{sen} \phi}$$

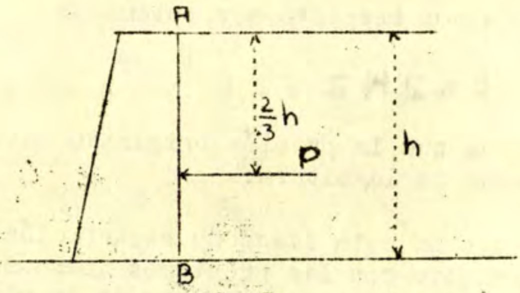


FIG. 3.

valor idéntico al que proporciona la teoría de Coulomb para este caso particular, siendo:

w = peso de las tierras, por unidad de volumen.
ϕ = ángulo de talud natural de las tierras.

B) el punto de aplicación de P está a la tercera parte de h a partir de B.

Rankine para establecer su teoría tuvo que basarla en las siguientes hipótesis:

1a- que la distribución de presiones en el macizo de tierras no se altera al ser sustituída una parte de él por el muro de retención.

2a- que el empuje contra el muro que tiene el paramento vertical es horizontal si la superficie del terreno es también horizontal.

3a- que es vertical la presión ejercida en una superficie horizontal, si se imagina esta superficie dentro del macizo de tierras.

4a- que el desprendimiento de una parte del macizo de tierras está próximo a producirse a lo largo de un plano, para el cual, la inclinación con respecto a la normal del esfuerzo resultante es por consiguiente el ángulo ϕ

de talud de las tierras.

5a.- que las superficies de resbalamiento son planas.

<u>Exposición de la teoría de Rankine con algunas consideraciones elementales sobre esfuerzos y planos principales.</u>- Consideremos el tetraedro y el paralepípedo elementales de la --

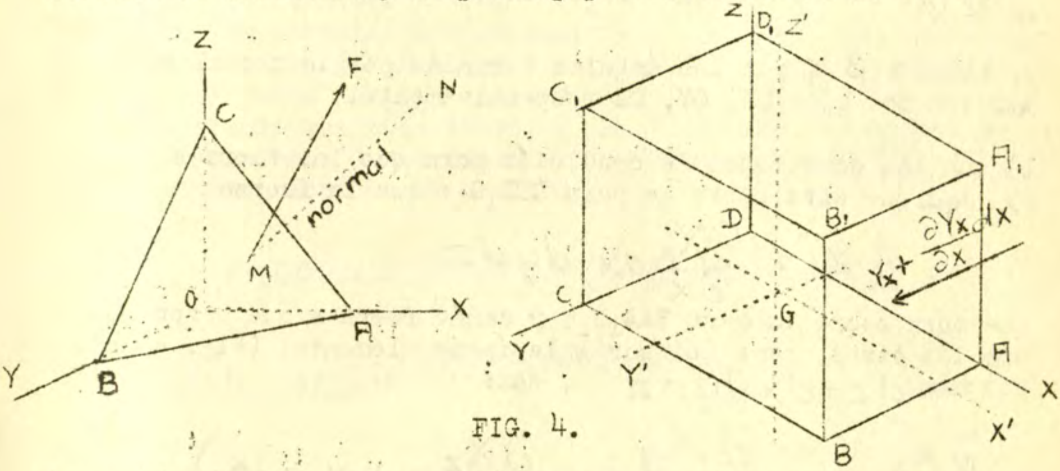


FIG. 4.

(Fig. 4). Si adoptamos las notaciones para las tensiones tangenciales y normales de la (Fig. 5) en la cual la mayúscula indica a que eje es paralela la tensión y el subíndice indica a que eje es perpendicular el elemento de área a que pertenece, entonces es fácil encontrar:

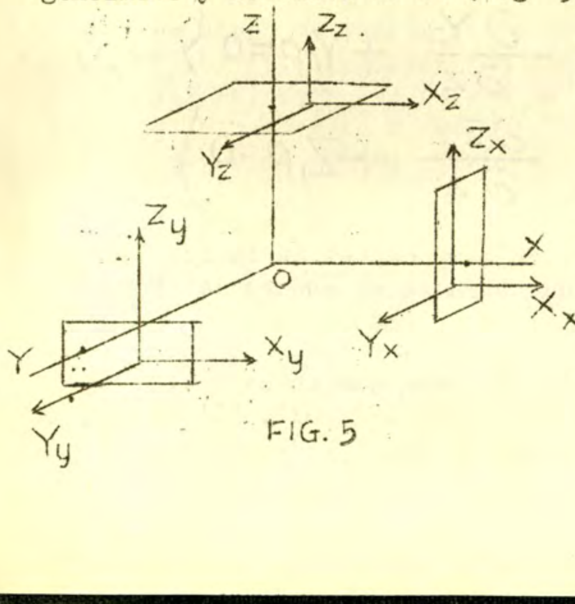


FIG. 5

a) que las proyecciones de la tensión resultante F que obra sobre la cara ABC del tetraedro elemental de la (Fig. 4) son

$$\left.\begin{aligned} X &= X_x\cos\alpha + X_y\cos\beta + X_z\cos\gamma \\ Y &= Y_x\cos\alpha + Y_y\cos\beta + Y_z\cos\gamma \\ Z &= Z_x\cos\alpha + Z_y\cos\beta + Z_z\cos\gamma \end{aligned}\right\} \text{--------} (4)$$

en ellas α, β, γ son los ángulos formados por la normal a -- ABC con los ejes OX, OY, OZ respectivamente.

b) que las ecuaciones de condición para que las fuerzas $-X_x\,dydz$ que obra sobre la cara CDD_1C_1; que la fuerza

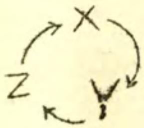
$$\left(X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x}dx\right)dydz$$

que obra sobre la cara BAA_1B_1; y demás fuerzas que obran so bre las otras caras del paralelepípedo elemental (Fig. 4)de volumen $d\tau = dx\,dy\,dz$, son:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + X_1\rho = 0 \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + Y_1\rho = 0 \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + Z_1\rho = 0 \end{aligned}\right\} \text{--} (5)$$

en las cuales X_1, Y_1, Z_1 son las componentes de la resul--- tante de la fuerza exterior que obra en el centro de grave- dad G y ρ es la masa por unidad de volúmen.

c) que las ecuaciones de condición para que no haya giro al rededor de cualquiera de los tres ejes GX', GY', GZ' que pa san por el centro de gravedad del paralelepípedo son



$$\left.\begin{aligned} X_y &= Y_x \\ Y_z &= Z_y \\ Z_x &= X_z \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (6)$$

Haciendo uso de (4) (5) y (6) y además denotando por la inicial T a las tensiones tangenciales y por N a las normales, y si en las normales los subindices x, y, z los cambiamos respectivamente por 1, 2, 3 y en las relaciones de las tangenciales dadas por la (6), estos mismos números indican cualquiera de las tres letras x, y, z que faltan; entonces las proyecciones de la tensión resultante F dadas por la (4) las podemos escribir en la forma,

$$\left.\begin{aligned} X &= N_1 \cos\alpha + T_3 \cos\beta + T_2 \cos\gamma \\ Y &= T_3 \cos\alpha + N_2 \cos\beta + T_1 \cos\gamma \\ Z &= T_2 \cos\alpha + T_1 \cos\beta + N_3 \cos\gamma \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (7)$$

Ahora bien, la Teoría de la Elasticidad investiga si hay posiciones privilegiadas del plano ABC del tetraedro elemental (Fig. 4) para las cuales la tensión resultante F coincide con la normal MN y que por lo tanto las componentes de F sobre ABC sean nulas.

Para ésto pongamos las condiciones necesarias y suficientes

$$\begin{aligned} X &= F\cos\alpha \\ Y &= F\cos\beta \\ Z &= F\cos\gamma, \end{aligned}$$

con lo cual las ecuaciones (7) toman la forma

$$\left.\begin{aligned}(N_1-F)\cos\alpha+T_3\cos\beta+T_2\cos\gamma=0\\ T_3\cos\alpha+(N_2-F)\cos\beta+T_1\cos\gamma=0\\ T_2\cos\alpha+T_1\cos\beta+(N_3-F)\cos\gamma=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (8)$$

en las cuales se supone conocidas las tensiones N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3, eliminando las incógnitas α, β, γ, llegamos a la ecuación

$$T_2T_3(N_2-F)(N_3-F)-T_1T_3^2(N_3-F)-T_1T_2^2(N_2-F)+T_1^2T_2T_3-T_1^3(N_1-F)+T_1^2T_2T_3+T_1(N_1-F)(N_2-F)(N_3-F)-T_2T_3(N_2-F)(N_3-F)=0$$

Dividiendo por T_1 multiplicando por (-1) y ordenando en potencias decrecientes de F llegamos a la ecuación de tercer grado en F

$$F^3-(N_1+N_2+N_3)F^2+(N_1N_2+N_1N_3+N_2N_3-T_1^2-T_2^2-T_3^2)F-(N_1N_2N_3+2T_1T_2T_3-N_1T_1^2-N_2T_2^2-N_3T_3^2)=0 \cdots\cdots\cdots \quad (9)$$

que evidentemente por ser de tercer grado tiene a lo menos una raíz real; llamémosla A, por lo tanto

$$F=A$$

y las ecuaciones (8) toman las formas

$$\left.\begin{aligned}(A-F)\cos\alpha=0\\ (N_2F)\cos\beta+T_1\cos\gamma=0\\ T_1\cos\beta+(N_3-F)\cos\gamma=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (10)$$

Haciendo un giro de ejes hasta que OX coincida con la fuerza A, resulta

$$N_1 = A$$

$$T_3 = 0$$

$$T_2 = 0$$

volviendo a eliminar α, β, γ del sistema (10) llegamos a la ecuación de segundo grado en F

$$F^2 - (N_2 + N_3)F + (N_2 N_3 - T_1^2 = 0$$

que tiene las dos soluciones reales

$$B = \frac{1}{2} \left\{ (N_2 + N_3) + \sqrt{(N_2 - N_3)^2 + 4T_1^2} \right.$$

$$C = \frac{1}{2} \left\{ (N_2 + N_3) - \sqrt{(N_2 - N_3)^2 + 4T_1^2} \right.$$

Por lo tanto podemos concluir:

Que para todo punto interior de un cuerpo, urgido por esfuerzos elásticos, existen tres direcciones privilegiadas en el espacio, perpendiculares dos a dos, para las cuales existen correspondientemente tres planos principales y tres esfuerzos principales.

Una vez puesta en evidencia la existencia de estos esfuerzos principales, hagamos uso de ellos.

Imaginemos una porción M, (Fig. 6), de un cuerpo, en el interior del cual se desarrollan esfuerzos. Para el punto interior O, supongamos, que los dos únicos esfuerzos principales unitarios son p_x y p_y, alojados a lo largo de los ejes OX y OY, la normal a la superficie forma el ángulo θ con OX.

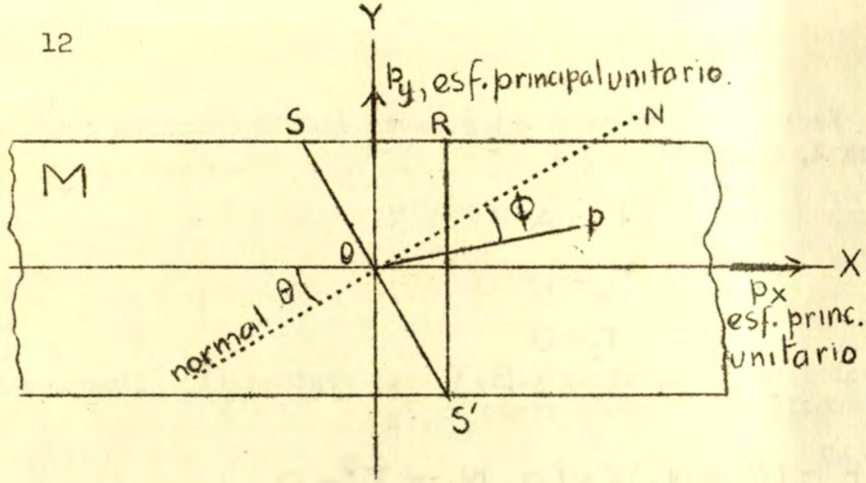


FIG. 6

El cuerpo M tiene la unidad de longitud perpendicular--- mente a los dos esfuerzos principales. Considerando el equi librio de la porción SS'R el esfuerzo unitario a lo largo- de ON, vale

$$p_n = p_x \cos^2\theta + p_y \operatorname{sen}^2\theta$$

y el valor del esfuerzo rasante es

$$p_t = (p_x - p_y)\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

Y de aquí que el esfuerzo resultante unitario, p, forma- con la normal ON, un ángulo ϕ tal que

$$\phi = \operatorname{tg}^{-1}\frac{(p_x - p_y)\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{p_x\cos^2\theta + p_y\operatorname{sen}^2\theta} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

Veamos que condición debe cumplirse para que ϕ sea máxi- mo.

Diferenciando la (11) , igualando la derivada con 0 y sim plificando obtenemos

$$(p_x \cos^2\theta + p_y \operatorname{sen}^2\theta)\cos 2\theta + (p_x - p_y)\operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0$$

de la cual

$$p_n \cos 2\theta + p_t \operatorname{sen} 2\theta = 0$$

o bien

$$\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right)$$

reemplazando en (11)

$$tg\,\phi = \frac{(p_x - p_y)\cos\phi}{p_x(1-\operatorname{sen}\phi) + p_y(1+\operatorname{sen}\phi)}$$

de donde el cociente entre el esfuerzo principal menor (p_y) entre el esfuerzo principal mayor (p_x) vale

$$\frac{p_y}{p_x} = \frac{1-\operatorname{sen}\phi}{1+\operatorname{sen}\phi} \quad \text{........................} (12)$$

En el valor de este cociente, se basa Rankine para encontrar el valor y punto de aplicación de la resultante de las reacciones del muro.

En efecto, de acuerdo con las tres primeras hipótesis de- su teoría, antes enunciadas, Rankine interpretó el esfuerzo horizontal unitario aplicado en un punto del muro como el - esfuerzo principal unitario p_y y la presión vertical unitaria como el esfuerzo unitario p_x de valor

$$p_x = wh \quad \text{..................................} (13)$$

Por la (12) es evidente que p_y vale

$$p_y = wh\,\frac{1-\operatorname{sen}\phi}{1+\operatorname{sen}\phi} \quad \text{..................} (14)$$

siendo el ángulo de talud.

Como consecuencia lógica de estos resultados puede darse a P (resultante de las reacciones del muro) el valor

$$P=\frac{1}{2}wh^2\frac{1-\operatorname{sen}\phi}{1+\operatorname{sen}\phi} \quad \text{..........................} \quad (15)$$

Además como la 14 puede escribirse

$$p_y = Kh$$

en la cual K es constante, fácil es deducir que la distribución de presiones es la hidrostática y que P está aplicado a la tercera parte de h a partir del punto B, (Fig. 3)

RESUMEN

En la anterior exposición notamos:

1° Que las tres teorías (Coulomb, Coulomb-Poncelet y Rankine) para el caso particular tratado, llegan al mismo valor de P

$$P = Kh^2, \ (K = \text{constante})$$

2° Igualmente las tres teorías deducen una distribución de fatigas sobre el muro idéntica a la distribución hidrostática y por consiguiente que P está aplicada a la tercera parte de h a contar desde la vista interior del muro.

Para llegar a estas conclusiones:

a) <u>Coulomb</u>, introduce la idea de prisma de máximo empuje,-

aplica su ley del rozamiento interno, supone nulo el roza miento entre muro y tierra y considera próximo a romperse - el equilibrio de las fuerzas desarrolladas en el interior - del material retenido.

b) <u>Poncelet</u>, hace las anteriores hipótesis desechando la -- del valor nulo del coeficiente de fricción entre muro y tie rra y le asigna, a éste, el valor que tiene entre tierra y tierra.

c) <u>Rankine</u>, supone fundamentalmente, que el estado de fatigas no se ha alterado en la masa de las tierras al introducir el muro de retención; que el equilibrio de estas fatigas interiores está próximo a romperse a lo largo de una sec--- ción plana; que el empuje sobre una sección plana horizon-- tal, es vertical, y viceversa.

----ooOoo----

.//.

[illegible]

b) [illegible] que [illegible]

c) [illegible] de [illegible] y [illegible] práctica [illegible]
[illegible]

———o0o———

II

NUEVAS IDEAS SOBRE EMPUJE DE TIERRAS

Todos los métodos hasta hoy día conocidos, para calcular las presiones debidas a tierras, están basados en las tres teorías arriba expuestas.

Ahora bien, muchas han sido las observaciones en trabajos prácticos de Ingeniería que han puesto de manifiesto la -- flagrante contradicción entre estas teorías clásicas sobre Empuje de Tierras y la manera real como suceden los hechos en la práctica.

Debido a esta mutua contradicción, se han desarrollado - trabajos experimentales tan importantes como los realizados por Karl von Terzaghi, efectuados en el Instituto Tecnológico de Massachusetts Cambridge, Mass., los trabajos descritos por Mr. J. C. Meem, por Mr. H. G. Moulton, los efectuados en París por Mr. Langer, los de M. G. Spangler en - Iowa, las consideraciones teóricas debidas a Geoge W. Glick D. E. Moran, Maurice Buisson de la Escuela Politécnica de- París, Dimitri Krynine, Jeremiah E. B. Jennings, Raymond D. Mindlin, etc.

Estos trabajos se dieron a conocer con motivo de la Conferencia Internacional de Mecánica de los Suelos en la Uni versidad de Harvard, Ca. Mass. y pude juzgar como más decisivos importantes y concluyentes los debidos al Profesor Terzaghi, los debidos a H. G. Moulton y las experiencias prácticas efectuadas en el Colegio del Estado de Ames, Iowa por M. G. Spangler así como las opiniones emitidas acerca de ellos.

Para analizar las teorías clásicas, Terzaghi fija su atención en los tres elementos siguientes:

1° Cociente de presión hidrostática, K, de un material dado. Definido por

$$K = \frac{p_1}{p_2}$$

p_1 = presión lateral unitaria en un punto del material de que se trata.

p_2 = presión lateral unitaria en el mismo punto, si la masa del material se reemplazara por un líquido de igual peso específico que el material quitado.

2° El centro de presión en el paramento interno del muro de retención.

3° Movimientos del muro que pueden ser de dos clases el del tipo R, cuando el muro se desaloja con movimiento de rotación alrededor de su arista inferior; y el del tipo T, cuando se translada paralelamente a su posición original.

Análisis de Terzaghi sobre la teoría de Coulomb.- Por lo expuesto en las primeras páginas, la teoría de Coulomb puede dividirse en dos partes; la primera que trata de determinar el valor de la presión resultante sobre el muro debido al empuje de las tierras.

Como se recordará nada se supone sobre el estado de fatigas en el interior de las tierras y por lo tanto, esta primera parte, ninguna información puede dar de la posición del centro de presión.

De la segunda parte, debido a las hipótesis que la apoyan se dedujo que la repartición de presiones es la hidrostática.

Experiencias efectuadas por Terzaghi sobre arenas, demuestran, que la primera parte de la teoría de Coulomb es justificada para algunas arenas, pues en ellas, las superficies de ruptura son sensiblemente planas y todos sus elementos diferenciales de área trabajan al esfuerzo cortante. En otros materiales diferentes no se llenan estas condiciones.

Asimismo Terzaghi, conociendo las relaciones entre esfuerzos y deformaciones en el interior de diversos tipos de arenas han encontrado:

1° Que el empuje sobre el muro, en un caso particular, calculado por la teoría de Coulomb, es el valor mínimo que puede asumir este empuje bajo las diferentes variantes que puede haber en el caso particular tratado.

2° Para que la teoría de Coulomb esté de acuerdo con la realidad, es necesario que en todos los puntos del prisma que se desprenden, al haber un movimiento del muro, exista un mismo valor K_c, de K.

3° Es evidente por la naturaleza de las hipótesis de Coulomb, que para que se cumpla 2° es necesario que el movimiento del muro sea de rotación alrededor de su arista inferior externa.

4° Que el valor K_c es el valor mínimo que puede tener K.

5° Para que exista este valor mínimo de K_c es necesario que las paredes del muro sean perfectamente pulidas y por lo tanto que no exista fricción entre muro y tierra. Cuando el muro es rugoso, K, no puede asumir este valor mínimo.

6° Que en estas condiciones el valor K_c es constante a --

través de la masa de arena lo que trae como consecuencia -- que la distribución de presiones sea casi la hidrostática,- tal como lo supuso Coulomb.

7° Al efectuarse el movimiento de rotación del muro provoca éste, un cambio gradual desde el estado natural de fatigas a un estado de fatigas caracterizado por una presión lateral- mínima. Si el movimiento del muro continúa se produce el -- plano de fractura y se desprende el prisma de máximo empuje.

8° El estado de presión lateral mínima se restringe únicamente a la porción comprendida a la izquierda de ac (Fig.7).

9° El ángulo que debe girar el muro para producir, primero el estado de mínima presión lateral y después el plano de - ruptura, es función de las propiedades elásticas de la arena así como de la profundidad de las tierras contenidas.

10° Que para otra clase de movimientos del muro y otras --- condiciones del pulimento de su cara interna no pueden existir las condiciones descritas por la teoría de Coulomb y resumidas en la (Fig. 7). En ella, Terzaghi dedujo experimentalmente la curva de la variación de los valores de K como- función de los movimientos promedios de rotación del muro.

<u>Análisis</u> <u>de</u> <u>la</u> <u>teoría</u> <u>de</u> <u>Rankine</u>.- De lo expuesto en el Capítulo I puede afirmarse que la teoría de Rankine está resumida en las ecuaciones 13 y 14 . La primera

$$p_x = w h \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (13)$$

muestra la suposición hecha por Rankine de que la presión-- vertical unitaria crece proporcionalmente con la profundi-- dad.

La segunda

$$p_y = w h \frac{1 - \operatorname{sen} \phi}{1 + \operatorname{sen} \phi} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (14)$$

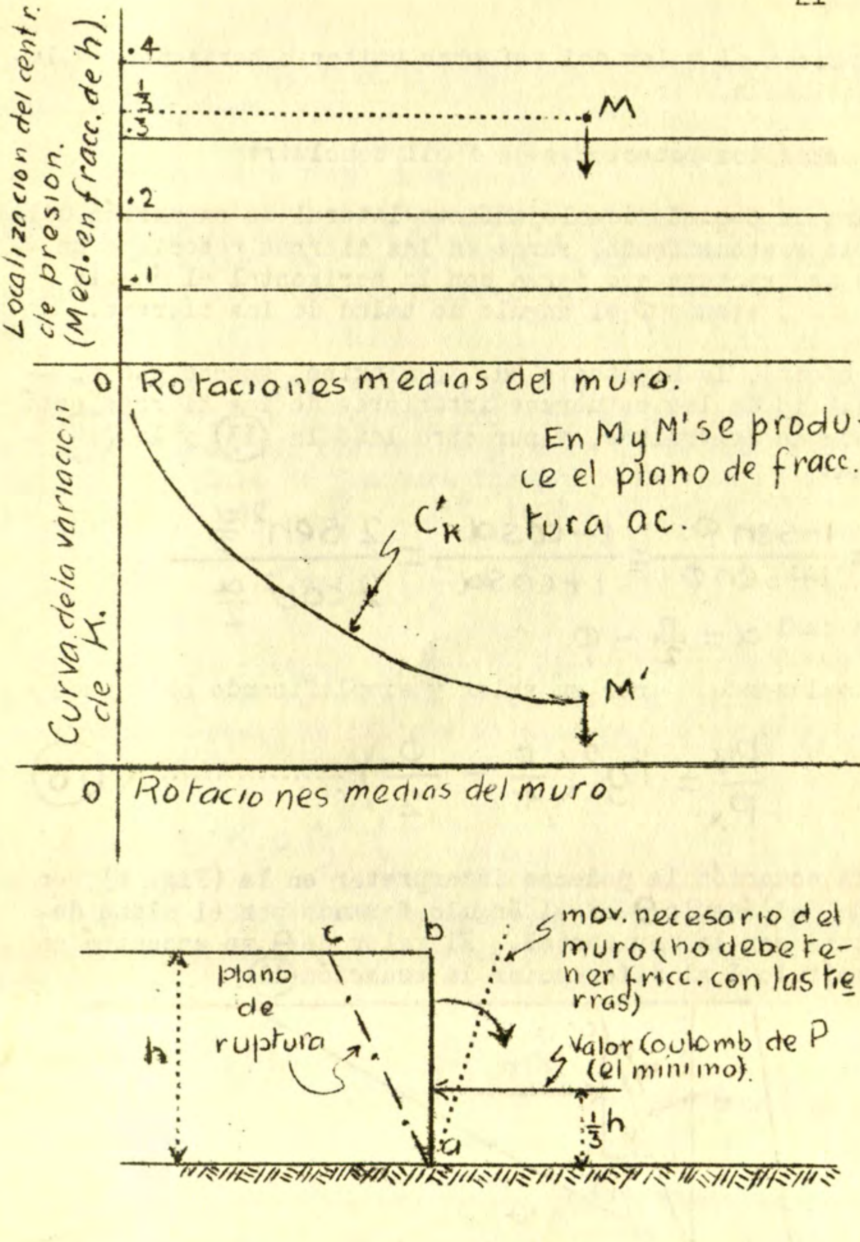

Localizacion del centr. de presion. (Med. en fracc. de h).
.4
1/3
.3
.2
.1
0
M
Rotaciones medias del muro.
Curva de la variacion de K.
En M y M' se produce el plano de fracc. tura ac.
C'K
M'
0
Rotaciones medias del muro
mov. necesario del muro (no debe tener fricc. con las tierras)
c
b
Plano de ruptura
h
Valor Coulomb de P (el minimo).
1/3 h
a

FIG. 7.

proporciona el valor del esfuerzo unitario horizontal a la profundidad h.

De estas dos ecuaciones es fácil concluir:

1º Para un pequeño desalojamiento lateral de expansión del muro de sostenimiento, surge en las tierras retenidas un plano de fractura que forma con la horizontal el ángulo $45+\frac{\phi}{2}$, siendo ϕ el ángulo de talud de las tierras.

En efecto, la hipótesis 4a. de Rankine, supone que el equilibrio de los esfuerzos interiores de las tierras está a punto de destruirse, y por otro lado la (13) y la (14) nos dan

$$\frac{p_y}{p_x}=\frac{1-\operatorname{sen}\phi}{1+\operatorname{sen}\phi}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

en la cual $\alpha=\frac{\pi}{2}-\phi$

Reemplazando por su valor y simplificando obtenemos

$$\frac{p_y}{p_x}=\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\phi}{2}\right) \quad \text{.................} \quad (16)$$

Esta ecuación la podemos interpretar en la (Fig. 8), en la cual el ángulo θ es el ángulo formado por el plano de fractura con la horizontal. El valor de θ se encontró en el Capítulo I al diferenciar la ecuación (11).

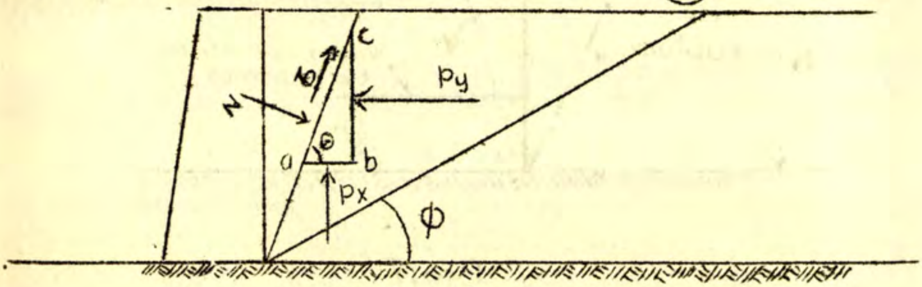


FIG. 8.

2° El valor del cociente de presión hidrostática, K, es - constante y vale

$$K_r = tg^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)$$

ésto lo pone en evidencia la (16). Esta constancia de K_r a través de la masa de tierras, unida a la (13) trae por consecuencia la distribución hidrostática de las presiones sobre el muro.

Además, por métodos análogos podemos deducir igualmente, que si el movimiento pequeño del muro es de translación pero comprimiendo las tierras se produce un estado de fatigas tal, que el plano de fractura formará ahora con la horizontal el ángulo, $45 - \frac{\phi}{2}$, y K tendrá el valor

$$K'_r = tg^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)$$

Al estado de fatigas, producido por el movimiento de --- deslizamiento del muro hacia afuera de las tierras, le llamaré primer estado de fatigas de Rankine, se caracteriza - por el valor de K igual a

$$K_r = tg^2\left(45 - \frac{\phi}{2}\right)$$

Al segundo estado de fatigas (cuando el muro en su mo-- vimiento de translación comprime las tierras) caracterizado por

$$K'_r = tg^2\left(45 + \frac{\phi}{2}\right)$$

la llamaré segundo estado de fatigas de Rankine.

Ahora bien, estudios experimentales de Karl von Terza-- ghi sobre las relaciones que hay entre los esfuerzos o fatigas y las deformaciones en el interior de arenas, le han permitido hacer las siguientes afirmaciones concluyentes:

1a.-Los dos valores extremos K_r y K'_r que caracterizan los dos estados de fatigas dados por la teoría de Rankine no - concuerdan con el valor K_o que caracteriza al estado de - fatigas en el seno de lechos de arenas que han sido formados de manera análoga a como se forman por sedimentaciones sucesivas, en la naturaleza.

Este valor K_o caracteriza al estado natural de fatigas - en los depósitos reales y naturales con los cuales trabaja el ingeniero y por consiguiente no sometidos a estados artificiales inverosímiles.

2a.-El valor del cociente de presión hidrostática K_o está comprendido entre los valores extremos de Rankine K_r y - K'_r y vale:

para arenas compactas de .4 a .45
para arenas sueltas de .45 a .50

Por otra parte el valor K_r es el mínimo que puede tener K, como lo muestra la ecuación (12).

3a.-La magnitud del desalojamiento que tiene que sufrir el muro, para pasar del estado natural de fatigas K_o a cualquiera de los dos estados extremos de Rankine K_r o K'_r, es función de la naturaleza de las arenas y de las dimensiones de su volumen.

Cuantifica Terzaghi estos desalojamientos del muro, por los coeficientes empíricos c_r y c'_r correspondientes respectivamente a K_r y K'_r, que deben aplicarse al ancho total de las arenas contenidas.

Para c_r da un valor de .015 en arenas compactas y para arenas sueltas dice que es mucho mayor, además afirma que en casos iguales c_r y c'_r tienen casi los mismos valores.

Como una aplicación a un muro no mayor en su ancho de 30.5m encuentra el enorme desalojamiento mínimo de 45.8 cm. para pasar del estado natural de fatigas al primero o segundo estados de Rankine, desalojamiento imposible de obtener en la práctica.

4a.-Que aun produciéndose cualquiera de los dos estados artificiales de Rankine, estos estados se limitan en la tierra a las porciones limítrofes al paramento interno del muro.

De lo que puede concluirse que en la práctica, nunca pueden encontrarse las condiciones necesarias para aplicar correctamente la teoría de Rankine y que por consiguiente ésta dará siempre resultados falsos.

La gravedad aumenta por el hecho de que los empujes computados por la (15), siempre son menores que los reales.

TEORIA DE TERZAGHI.- No dando ninguna información la teoría de Rankine ni la de Coulomb, para pequeños movimientos de translación del muro, debido que para estar dentro del estado de fatigas requeridos por estas dos teorías es necesario, para la primera grandes desalojamientos del muro, y para la segunda movimientos de rotación del mismo, también considerables, unida esta condición a la de que el muro no presente ninguna fricción con la tierra.

Debido, pues, a esta falta de información de lo que ocurre para pequeños desalojamientos de translación del muro, como el de la figura 9, al pasar de la posición AB a la A' B', Terzaghi explica el fenómeno que sucede para estos pequeños desalojamientos haciendo uso de lo que él ha llamado "efecto de arqueo".

El divide al prisma de máximo empuje ABC en dos porciones por medio de la línea ideal mn.

Para la porción inferior Bmn debido a su poco volumen el desalojamiento pequeño BB' es suficiente para variar en tal

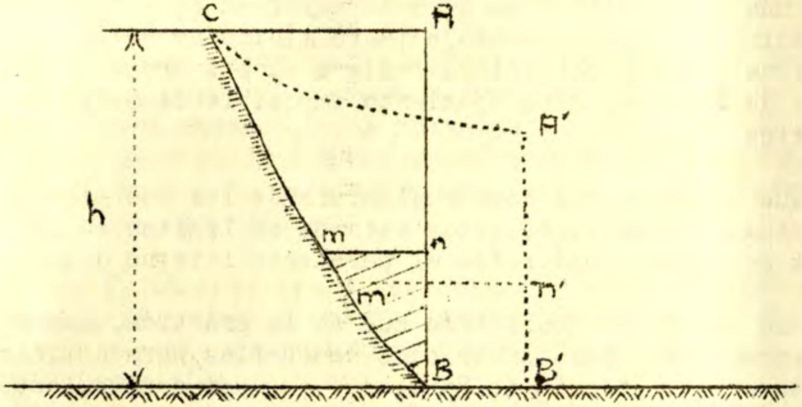


FIG. 9.

grado el estado de fatigas en su interior, que K alcanza rá pidamente el valor mínimo K_c.

Para la porción superior ACmn, debido a su mayor volumen este pequeño desalojamiento BB' no altera sino en parte el estado de fatigas en esta porción, de tal manera que para ella $K > K_c$.

Por otra parte, al pasar la porción inferior de Bnm, a B'n'm'B el límite mn baja a la posición m'n', lo que trae un hundimiento de la porción superior; pero como en esta $K > K_c$ al hundirse varía la fricción a lo largo de su límite izquierdo Cm, pero no llega a ser nula en su nueva posición Cm'. Debido a esta fricción existente a lo largo de Cm' la porción A'Cm'n' no carga su peso todo sobre B'n'm'B sino parte lo transmite por medio de su límite Cm' a la porción comprendida a la izquierda de CB.

Esta disminución del peso que obra sobre la porción B'n'm'B es lo que Terzaghi ha llamado "efecto de arqueo".

Este efecto de arqueo explica que la distribución de presiones no sea la hidrostática, en efecto, al quedar disminuida la presión que obra sobre Bmn y debido al peso de al peso de A'Cm'n', la presión ejercida por B'n'm'B sobre el muro a través de B'n' también disminuye; como la presión total queda constante, obligadamente la presión contra el muro debida a la porción superior A'Cm'n' tiene que aumentar, lo que trae que el centro de presión suba arriba de un tercio de h y que la distribución de presiones no sea la hidrostática.

Además, cuando el efecto de arqueo sea máximo, evidentemente se alcanza el valor mínimo de Coulomb de la presión sobre el muro, puesto que la presión posible a lo largo de Cm' es máxima. También es evidente que si el movimiento del muro prosigue más allá de la posición que produjo el valor mínimo de Coulomb, entonces irá desapareciendo el efecto de arqueo y por consiguiente el centro de presión irá bajando acercándose a un tercio de h y juntamente el valor de la presión lateral y por lo tanto el valor de K irán aumentando hasta el momento en que se produzca el plano de falla a lo largo de CB.

Todas estas razones aludidas por Terzaghi pueden verse resumidas en la (Fig. 10).

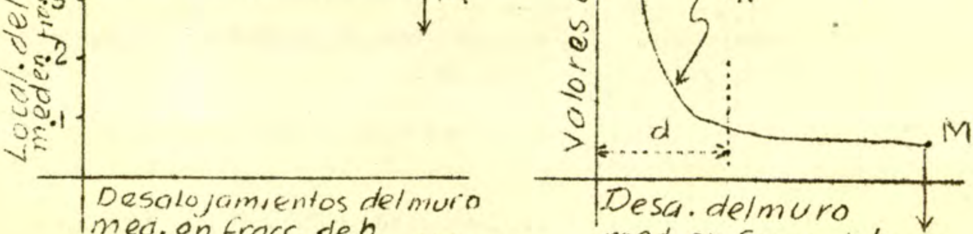


FIG. 10.

Comparando las curvas C'_K de la (Fig. 7), con la C_K de la (Fig. 10) notamos gran diferencia por el hecho de que la C_K se acerca más rápidamente a la horizontal que pasa por m', que la curva C'_K, la que tiene su concavidad más abierta.

Fácil es explicar este hecho, en el caso de Coulomb ----- (curva C'_K) el movimiento necesario del muro es de rotación alrededor de la arista inferior externa, este movimiento -- tiene menores desalojamientos cuando aumenta la profundidad pues la longitud de los arcos descritos por los diversos -- puntos del muro son $\propto$ a sus distancias al pie del muro, lo que trae que esta clase de movimiento compensa el efecto de arqueo, necesitándose gran rotación del muro para alcanzar K el valor K_c. En cambio en el caso de la (Fig. 10) (curva C_K) puede producirse perfectamente el efecto de arqueo y - muy al principio de los desalojamientos del muro se alcanza el valor mínimo K_c; o en otras palabras, rápidamente la curva C_K alcanza la horizontalidad.

<u>EXPERIMENTOS QUE APOYAN LOS ANTERIORES CONCEPTOS.</u>- Las teorías clásicas afirman que la presión de las tierras sobre-los paramentos internos de los muros de retención se incrementa como la presión hidrostática, en proporción directa-con la profundidad. Además del análisis antes expuesto, -- existen hechos experimentales muy elocuentes que muestran - lo erróneo de tal afirmación de las teorías clásicas.

Medidas directas efectuadas por M. Miller en 1916 en las obras de ingeniería de la terminal del sub-way en la Avenida Flatbush en la ciudad de Nueva York y mencionadas por - H. G. Moulton y por Terzagui, dan a conocer la naturaleza-de la distribución de fatigas debidas a porciones de tie-- rras.

Las condiciones en que estas medidas fueron hechas se --- muestran en la (Fig. 11).

La pared vertical sobre la cual midió Miller las presio-- nes tenía 6.7 m. de ancho por 18.3 m. de altura, encontró -

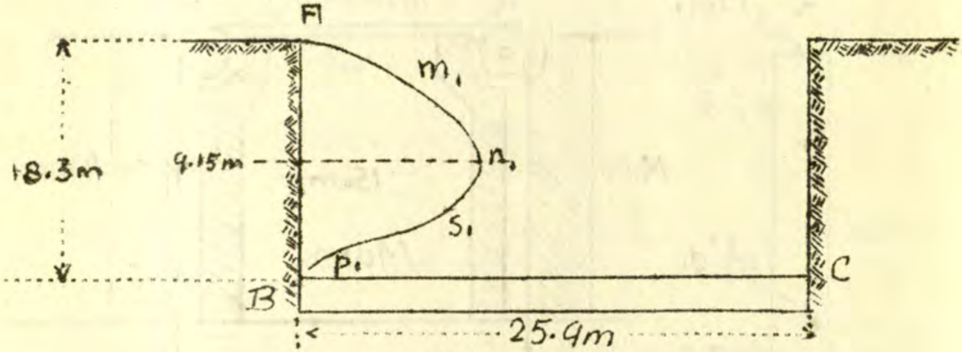


FIG. 11.

la mayor presión (distancia en nn_1) a la mitad de la altura, y pudo construir la curva $Am_1n_1s_1p_1$ que relaciona las pre-- siones con sus correspondientes alturas, esta curva difiere por completo de la línea recta requerida por la distribución hidrostática.

Experimentos efectuados por M. G. Spangler desde 1932 hasta 1934 en la Estación de Experimentación de Ingeniería del Colegio de Estado de Iowa, indican resultados concordantes con los de Miller y de Terzaghi.

Spangler efectuó sus experimentos sobre tres muros de concreto de 4.57 m de largo por 1.83 de alto (Fig. 12)

Los procedimientos con los cuales se registraron las presiones laterales sobre el muro fueron dos:

El primero, muy ingenioso, se ve en la (Fig. 12) la cinta de acero que puede ser traccionada desde fuera del muro, desliza entre dos placas de acero apoyando sobre los dos rodillos RR', la cinta atraviesa el muro en el interior de las dos piezas de fundición F,F', empotradas en el concreto armado. Las placas de acero y la cinta en el paramento interno del muro están separadas de las tierras por medio de fieltro impermeable.

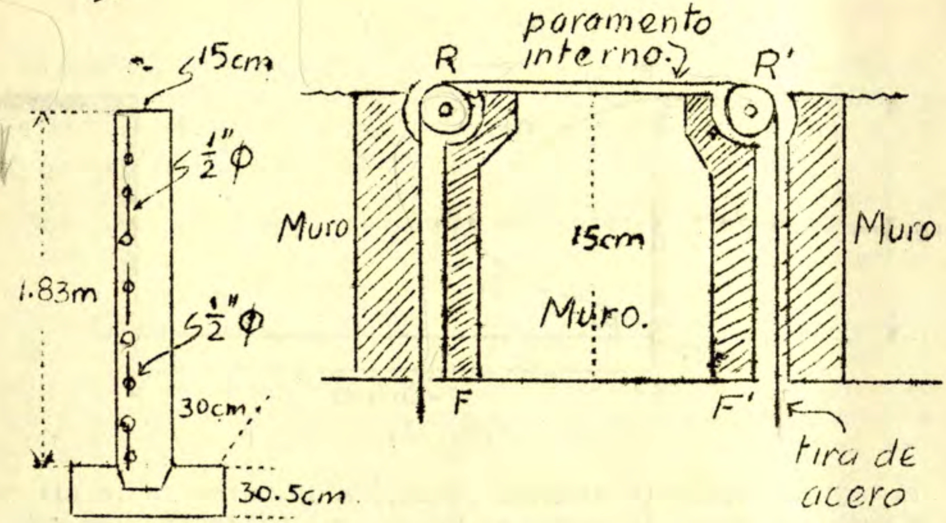


FIG. 12.

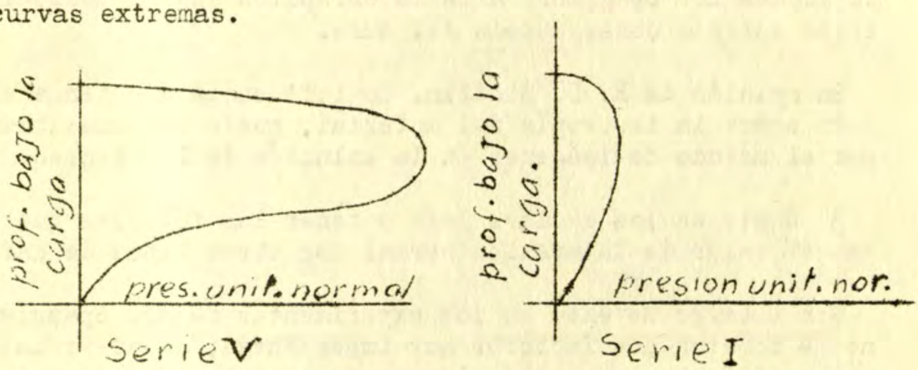
Es evidente que la mayor presión ejercida por las tie---rras en el paramento interno y transmitida a la cinta de -acero, por el fieltro y la placa de acero, hará que el esfuerzo (medido con un dinamómetro) necesario para tirar -desde fuera de la cinta de acero, sea mayor, con lo cual -podrá ser medida la presión ejercida por el material sobre el muro.

La relación entre las presiones y el primer esfuerzo necesario para poner en movimiento la cinta, fué calibrada -por medio de una cámara neumática de automóvil cuya presión sobre el muro podía ser medida con un manómetro.

En el segundo método para medir las presiones se usáron las celdas de presión diseñadas por el notable experimentador de Chicago, Mr. Goldbeck.

En esta forma, y usando cargas concentradas debidas a -la rueda trasera de camiones muy cargados, Mr. Spangler -pudo definir la distribución de presiones en un material compuesto por grava redonda de mina.

De las numerosas curvas experimentales obtenidas por Mr. Spangler, sólo reproduzco la fisonomía general de las dos curvas extremas.



Los experimentos de Mr. Spangler tienen interés desde -- tres puntos de vista:

1° Demuestran de una manera concluyente, que la distribución de presiones en el paramento interno de un muro de retención de tierras no es la distribución hidrostática.

2° Dan el medio para obtener la ecuación empírica

$$h_c = K_p \cdot \frac{X^{1.5}\, Z^{1.25}}{r^5} \quad \left\{ \begin{array}{l} K\text{=constante dimensional} \\ P\text{=valor de la carga concentrada} \\ X, Z \text{ coordenadas del punto en donde obra la carga.} \\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ distancia entre la carga y el punto considerado.} \end{array} \right.$$

que proporciona el valor de la presión unitaria normal al muro, y la compara con la fórmula de Boussinesq

$$h_c = \frac{3}{2\pi}\, p\, \frac{x\, z^2}{r^5}$$

que da la presión lateral unitaria sobre un plano vertical, fórmula que derivó Bousinesq de la distribución de fatigas debida a una carga concentrada normal a un medio elástico infinito limitado por un plano vertical, en una de sus extremidades.

Los valores obtenidos por Spangler son mayores que los dados por la ley de Boussinesq, probablemente debido (como lo supone Mr. Spangler) a la interrupción que el medio isótropo sufre a consecuencia del muro.

En opinión de R. D. Mindlin, la influencia que tenga el muro sobre la isotropía del material, puede ser analizada por el método de imágenes en la solución de Boussinesq.

3º Sugieren los caminos para obtener las fórmulas que dan el valor de la presión normal con otros tipos de carga.

Sin embargo de ésto en los experimentos de Mr. Spangler no se tomaron dos factores muy importantes, a saber: las posibles deformaciones que el muro de sostenimiento puede haber sufrido, y como lo hace notar Dimitri P. Krynine no se ha hecho intevenir en la fórmula de Mr. Spangler la altura del muro de retención, con lo cual se ha perdido por una parte información acerca de la influencia que pueda tener esta altura con la magnitud y localización de la resultante de las presiones sobre el muro, y por otra la influencia que posiblemente tenga la naturaleza del cimiento sobre el cual descansan las tierras retenidas.

Experiencias que toman en cuenta los movimientos de los muros fueron hechas por Terzaghi en el año de 1926 en el Instituto Tecnológico de Massachusetts y descritas en varios artículos del Engineering News-Record de 1934. De esta serie de experimentos expondré dos, en la I el movimiento del muro fué de rotación alrededor de un eje 51 centímetros más abajo que su arista inferior del muro, en la II el movimiento es de translación.

Las condiciones, medidas de los muros, y resultados obtenidos por Terzaghi se muestran en la (Fig.13).

En ellas podemos notar:

a) Que el mismo valor del movimiento del muro (medido en fracciones de h) que produce el máximo "efecto de arqueo"

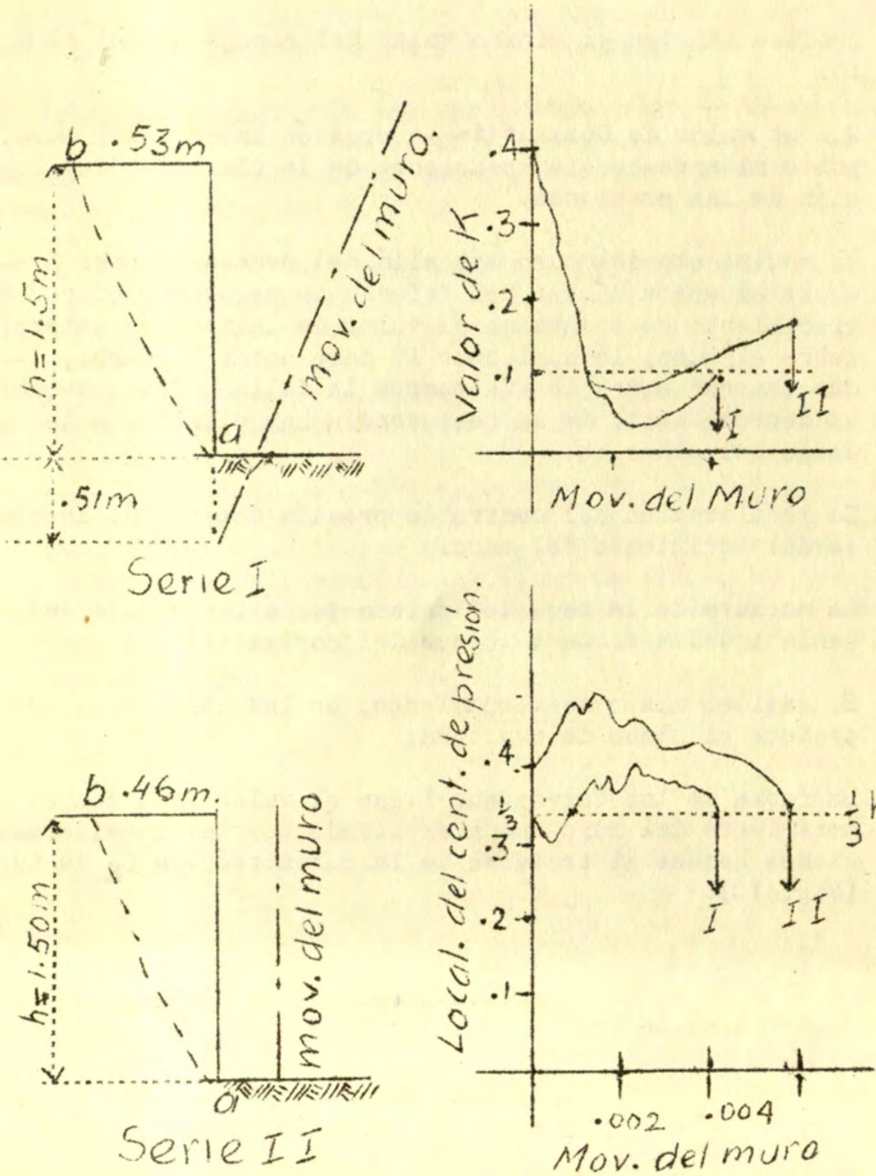

b .53m
h=1.5m
.51m
a
mov. del muro
Serie I
Valor de K
.4
.3
.2
.1
I
II
Mov. del Muro
Local. del cent. de presion.
.4
.3
.2
.1
1/3
1/3 h
I
II
.002
.004
Mov. del muro
b .46m.
h=1.50m
mov. del muro
a
Serie II

FIG. 13 .

produce también el mínimo valor del empuje normal al muro.

b) Que el valor de Coulomb de la presión lateral del muro, puede alcanzarse, independiente de la clase de distribución de las presiones.

c) Un movimiento del muro más allá del necesario para producir el valor máximo del "efecto de arqueo" produce un crecimiento constante en el valor de la presión lateral sobre el muro, lo cual, como lo hace notar Terzaghi, muestra que antes de efectuarse la falla o fractura hay un decrecimiento de la resistencia hay cizalleo a lo largo del plano ab.

d) La localización del centro de presión depende de la clase del movimiento del muro.

e) La anchura de la base del prisma de máximo empuje depende igualmente de la clase del movimiento del muro.

f) Es casi el mismo desalojamiento, en las dos series, que produce el plano de fractura.

g) La forma de las curvas que ligan el valor de K con el movimiento del muro queda explicado por las consideraciones hechas al tratarse de la curva teórica C_K de la (Fig. 10).

RESUMEN

1° Para que la teoría de Coulomb tenga validez, se necesita que el muro de retención de tierras no presente ninguna fricción al material retenido y que haya sufrido una rotación previa alrededor de su arista inferior.

2° Igualmente, para que los resultados de la de Rankine sean válidos es necesario que el muro sufra un movimiento de translación de tal magnitud que nunca puede efectuarse en la práctica.

3° El efecto de arqueo explicado por Terzaghi explica el hecho manifestado por muchos experimentos de que la distribución de presiones no es la hidrostática.

4° Estos experimentos muestran: que la presión mayor siempre está a la mitad de la altura del muro o más arriba, que las teorías de Boussinesq y el método de imágenes ideado para medios elásticos puede aplicarse con restricciones al problema de distribución de fatigas, que mientras mayor sea el efecto de arqueo, menor es la presión total lateral, y por último que la formación del plano de fractura que está precedida de una disminución de la resistencia al esfuerzo cortante a lo largo del plano de desprendimiento del prisma de máximo empuje.

III

INVESTIGACIONES DEL ALUMNO QUE PRESENTA ESTA TESIS

A).-<u>EXPERIMENTOS</u>.-Estos experimentos persiguen tres objetos:

1o.-Mostrar de una manera objetiva los fenómenos que sobre empuje de tierras se han descrito en los dos capítulos precedentes.

2o.-Ayudar, también de una manera objetiva, a la comprensión de los fenómenos que ocurren en la distribución de fatigas en el interior de masas de arenas, cuando en las superficies de éstas obran determinadas sobrecargas.

3o.-Aclarar cualitativamente algunos elementos del análisis que hago de las condiciones en que ocurren la distribución de fatigas sobre una ataguía.

Estos experimentos no sirvieron en manera alguna para cuantificar hechos, sino como ya dije, sólo sirvieron para dar información cualitativa de algunos fenómenos.

En la (Fig. 14) se pueden ver dos de los principales fenómenos ya descritos, que ocurren cuando se hace fallar por rotación y por translación un muro que retiene tierras, de acuerdo respectivamente, con las condiciones teóricas de las teorías de Rankine y Coulomb.

A la derecha de la figura puede verse el muro que falló por rotación alrededor de su arista inferior, notándose perfectamente la superficie de fractura del prisma de Coulomb; esta superficie no es plana sino que se vuelve cóncava junto a los cristales gruesos laterales; ésto en parte puede ser debido a la fricción entre la arena y el vidrio y que por ser de reducidas dimensiones el aparato tiene gran influencia esta fricción en la forma de la superficie de ruptura.

Con igual claridad puede notarse el **hundimiento** descrito por Terzaghi en su teoría del "esfuerzo de arqueo" y que tan gran importancia tiene en ella.

En la segunda vista del mismo aparato (Fig. 15) debido a que la arena se depositó en capas alternadas de diferentes colores, es perfectamente visible la "cuña" del prisma de máximo empuje (derecha del grabado) en cambio la izquierda, es decir cuando el muro falla paralelamente a su posición inicial, entonces la parte inferior de la arena deslizada se vuelve curva, mostrándose con esto el efecto de arqueo. Los mismos fenómenos de fricción entre arena, entre vidrio y fondo de madera aumentados por las reducidas dimensiones del aparato no pueden dar resultados cuantitativos sobre la magnitud de los ángulos de los prismas resbalados.

<u>Fenómenos Fotoelásticos</u>.-<u>Explicación</u> y <u>Significado de las Líneas Isoclínicas</u>.-Para determinar las presiones en los diversos puntos de un medio elástico, se ha venido - utilizando en los últimos años y con gran éxito, procedimientos que se les ha llamado Fotoelásticos.

El principio de estos procedimientos está basado en el hecho experimental descubierto por David Brewster en los principios del siglo pasado.

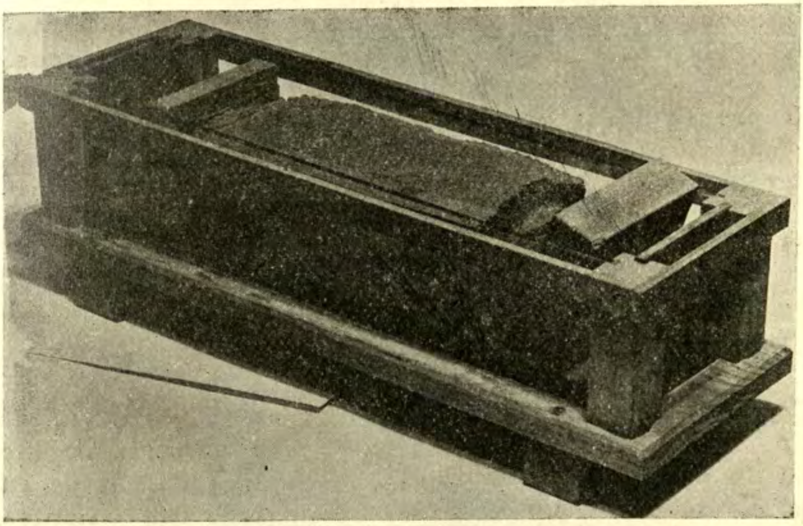


FIG. 14

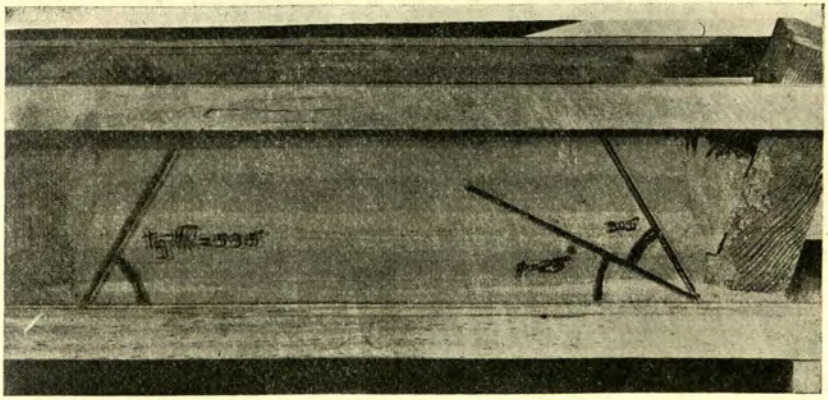


FIG. 15

Brewster comprobó que si sometía a la luz polarizada un cuerpo transparente desigualmente fatigado en una de sus dimensiones, entonces aparecían en el cuerpo una serie de bandas brillantes y obscuras de diferentes coloraciones.

El propio Brewster indicó que este hecho podía ser aprovechado en el estudio de las fatigas de los cuerpos, pero el primero en llevar a cabo esta importante aplicación fué C. Wilson mucho tiempo después, sus trabajos fueron continuados por A. Mesnager y E. G. Coker.

Con el objeto de aclarar estos hechos construí el aparato de la (Fig. 16) que esencialmente consiste en lo siguiente:

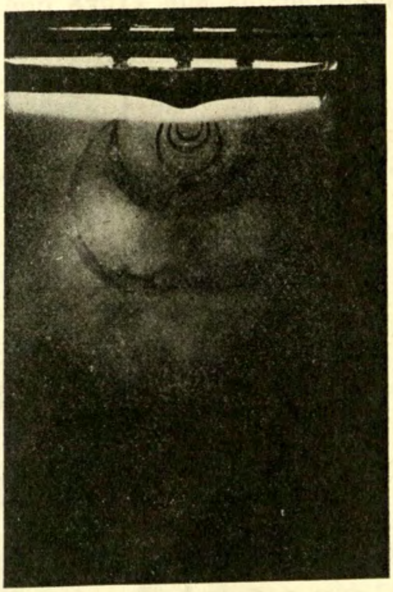
Un foco encerrado en el tubo que se ve en la parte superior del aparato, este foco tiene una pantalla roja con objeto de hacer su luz en parte monocromática. Estos rayos, después de pasar por un vidrio despulido van a herir la superficie de un cristal de caras paralelas cuya superficie posterior se ha ahumado previamente, los rayos así polarizados parcialmente, atraviesan un recipiente intermedio de 32 mm de espesor el que contiene un medio elástico isótropo.

Los rayos polarizados que pasan por este medio elástico van a herir la superficie de un espejo análogo al primero y que forma con éste, el ángulo de polarización.

Al medio elástico se le pueden dar presiones verticales con los tres tornillos de presión, visibles en la figura.

Las líneas isoclínicas alternativamente obscuras y brillantes del fenómeno fotoelástico pueden verse por reflexión en este segundo espejo (a través del cuadro más obscuro de la parte anterior del aparato).

Imaginemos una porción QSKN del medio elástico del aparato descrito, en la cual sus lados SN y QS son paralelos respectivamente a los esfuerzos principales y cuya existencia y significado ya se explicó en el primer capítulo.



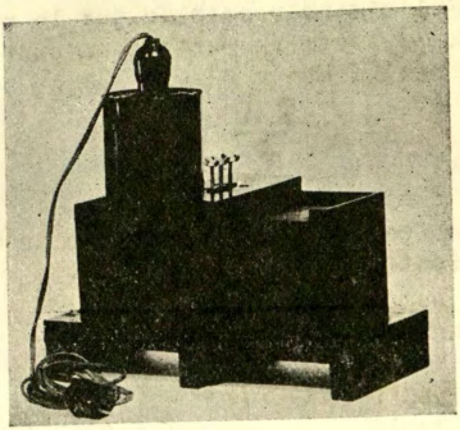
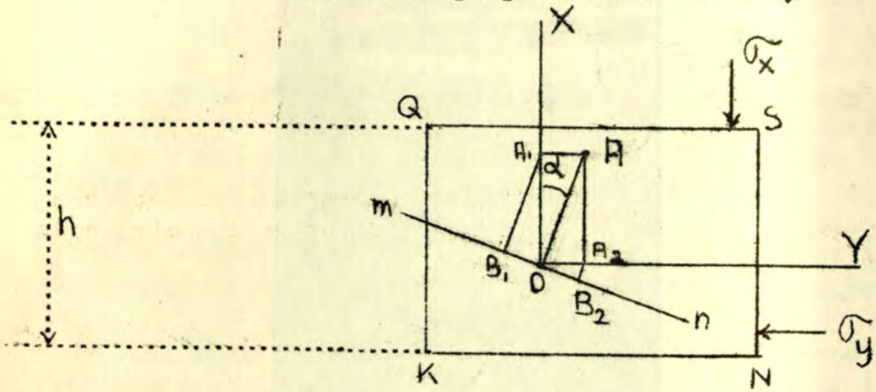


FIG. 16

Perpendicularmente a esta sección KNSQ hiere el rayo de luz polarizada que suponemos que vibra con movimiento armónico simple en el plano OA perpendicular al KNSQ.



Este rayo por ser de luz monocromática sigue en su vibración la ley

$$S = a \cos pt$$

en la cual S es el camino recorrido por la partícula vibrante en el tiempo t con respecto a un punto fijo; a, es la amplitud del movimiento y

$$\frac{2\pi}{p}$$

es el período del movimiento.

Los movimientos componentes a lo largo de OX y OY tienen por consiguiente las leyes respectivas

$$x = a \cos\alpha \cos pt$$

$$y = a \operatorname{sen}\alpha \cos pt$$

La experiencia ha demostrado que las velocidades de los rayos de luz en las direcciones respectivas OX y OY son -

proporcionales a los esfuerzos principales, por lo tanto como

$$\sigma_x \neq \sigma_y$$

también

$$v_x \neq v_y$$

Los tiempos t_1 y t_2 respectivos necesarios para atravesar la sección de espesor h por los dos rayos en las direcciones OX y OY son

$$t_1 = \frac{h}{v_x} \; ; \; t_2 = \frac{h}{v_y}$$

Si referimos el movimiento vibratorio lumínico después de atravesar el medio elástico al mismo instante físico de antes de atravesar dicho medio, entonces las leyes del movimiento estarán dadas por

$$x = a\cos\alpha \cos p(t - t_1)$$

y

$$y = a\,\mathrm{sen}\,\alpha \cos p(t - t_2).$$

Estas dos vibraciones evidentemente tienen una diferencia de fase igual a

$$p(t_2 - t_1)$$

La diferencia $t_2 - t_1$ vale

$$t_2 - t_1 = \frac{h}{v_y} - \frac{h}{v_x} \doteq \frac{h(v_y - v_x)}{v^2} = K(\sigma_x - \sigma_y)$$

por dos razones; la primera por ser muy pequeña la diferencia entre el producto $v_x \cdot v_y$ y el cuadrado de la velocidad del rayo luminoso polarizado en el medio elástico si éste no estuviera perturbado por las presiones superiores.

El coeficiente K de proporcionalidad como lo hace notar Timoshenko depende de h y de la naturaleza del medio elástico; es determinable experimentalmente.

Ahora bien si por medio del segundo espejo (espejo analizador) hacemos que las vibraciones de las direcciones OX y OY sean coplanares en el plano mn $\perp$ al OA entonces podremos apreciar todos los puntos del medio en que estas vibraciones se sumen dando zonas de colores brillantes y donde se anulen, dando zonas oscuras. (Fig.16).

Evidentemente, el fenómeno lumínico en el plano mn es también un movimiento vibratorio armónico simple, teóricamente no amortiguado, de ley

$$S' = \frac{a}{2}\operatorname{sen} 2\alpha \left[\cos p(t-t_1) - \cos p(t-t_2)\right]$$

$$= \left(a \operatorname{sen} 2\alpha \operatorname{sen} p \frac{t_1-t_2}{2}\right) \operatorname{sen} p\left(t - \frac{t_1+t_2}{2}\right)$$

De donde se deduce que su amplitud es proporcional a

$$\operatorname{sen} p\left(t - \frac{t_1+t_2}{2}\right)$$

o de otra manera; la intensidad de la luz en los diversos puntos del medio elástico observados en el segundo espejo es proporcional a la diferencia de fase p $(t_1 - t_2)$ y también esta intensidad es proporcional a la diferencia

$$\sigma_x - \sigma_y$$

por lo anteriormente expuesto.

De ésto se deduce que en los puntos del medio elástico que caen en las líneas isoclínicas, la diferencia de esfuerzos principales es constante e igual a

$$\sigma_x - \sigma_y = -n \frac{2}{pK} \pi \left\{ n = 1, 2, 3, \ldots \right\}$$

para los puntos que no caigan en estas líneas obscuras sino que caigan en puntos de máxima intensidad es necesaria la condición

$$p \frac{t_1 - t_2}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2}$$

Es por lo tanto posible determinar en un momento dado cuanto vale la diferencia de esfuerzos principales en un punto dado del medio elástico, contando simplemente el número de veces que ha habido obscuridad en este punto al ir aplicando la carga.

Si por otro medio; por ejemplo por el extensómetro de Coker determinamos el valor de la suma de estos mismos esfuerzos en este punto, podremos evidentemente valuar los esfuerzos principales en dos dimensiones para cada punto del medio elástico.

Este es en resumen el procedimiento fotoelástico para medir los esfuerzos principales dentro de medios elásticos.

Una vista general del aparato que usé para visualizar la distribución de fatigas y las deformaciones de las capas de arena al estar sometidas éstas a sobrecargas, puede verse en la (Fig. 17). Tiene un principio semejante pero no igual al usado para el mismo objeto por el Ing. Charles Fischer de Viena, Austria.

En él usé, como puede verse en dicha figura, un recipiente reforzado de madera con cristales gruesos para evitar cual quier deformación del mismo. En el vidrio frontal se extendió por medio de un rodillo una capa gruesa de una mezcla de vaselina, petróleo y alcohol, a ésto se le unió un polvo fino de una materia coloreada de azul.

En estas condiciones se colocó la arena con sumo cuidado por medio de un cernidor, teniendo cuidado que las capas que se fueran depositando horizontalmente no fueran perturbadas por otra causa que cambiara el estado de fatigas de ellas.

El mecanismo por el cual se visualizan las deformaciones que sufren las capas de las arenas es el siguiente.

La arena contigua a la mezcla pegada al vidrio se adhiere fuertemente a ella y cuando los granitos de ésta sufren desalojamientos, arrastran consigo a los granos coloreados de la mezcla.

Estos granos del colorante de la mezcla insolubles en ella y lubricados por la vaselina están en las mejores condiciones de seguir fielmente los movimientos propios de los granos de arena, de tal modo que cualquier línea por finamente dibujada que esté en la mezcla, sufre deformaciones muy parecidas a las de las partículas de arena distribuidas semejantemente en su masa.

En las fotografías de detalle(Fig. 18) puede notarse perfectamente las deformaciones progresivas sufridas en la arena y la distribución de presiones en capas horizontales y en planos verticales bajo la acción de una carga vertical repartida en una superficie dada.

En el centro de la carga, las deformaciones de las líneas fué máxima alcanzando allí las mayores deformaciones, siendo éstas mínimas a la derecha e izquierda, alejándonos del eje de la carga. En cambio en las líneas verticales la que representa el eje vertical de la carga casi no sufrió alteración lateral y las otras a derecha e izquierda sufrieron progresivamente deformaciones exac

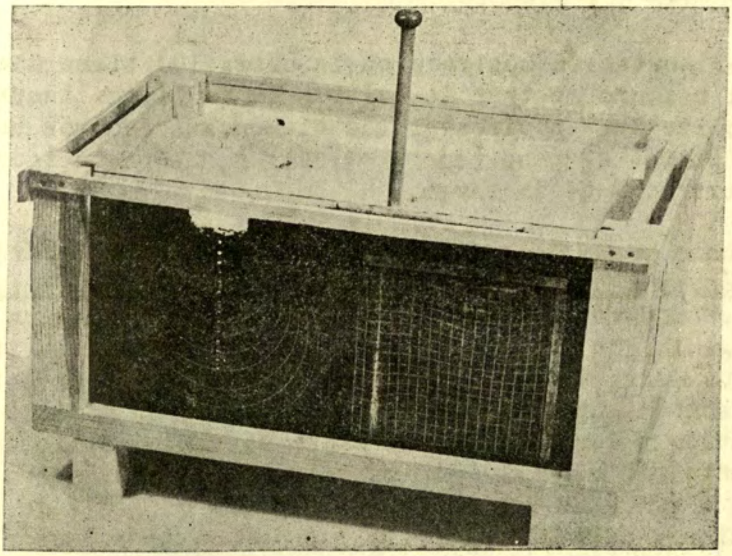


FIG. 17

tas a las descritas por Terzaghi en su trabajo F-16 de los anales de la Conferencia Internacional de Mecánica de los-Suelos.

En esta misma figura (parte izquierda) puede verse perfectamente la deformación que han sufrido capas horizontales a causa de un supuesto pilote y las líneas de influencia en el caso del mismo.

La experimentación mostrada en la (Fig. 19) tiene dos objetos, el primero mostrar la existencia de líneas isocromáticas localizadas en círculos que tienen sus centros en los pequeños puntos blancos (eje vertical) y que pasan todos - por los extremos de la carga.

El segundo y más importante objeto fué el de dar idea en que región, y hasta donde, ejerce su influencia la carga - pudiéndose comprobar tanto en este experimento como en el de la (Fig. 18) la afirmación que hace Terzaghi en su trabajo antes mencionado de que prácticamente la mayor parte de los asentamientos tienen lugar dentro de un círculo -- isocromático y que el cociente de la distancia de la carga al punto más bajo de este círculo entre el diámetro - del area cargada es constante (para areas cargadas de formas iguales). Este círculo está fijado por la relación - $\frac{1}{n}$ que hay entre el valor de la fatiga unitaria p aplicada en el área cargada y el valor de la fatiga constante - que hay en los puntos de este círculo.

En otras palabras que si llamamos T_n y t_n las profundidades de los bulbos (fijado cada uno por la relación $\frac{1}{n}$) correspondientes a dos diámetros B y b de areas cargadas, entonces

$$\frac{T_n}{B} = \frac{t_n}{b} = \text{constante.}$$

Para muchos casos prácticos Terzaghi afirma que el --- círculo dentro del cual están comprendidas todas las in--

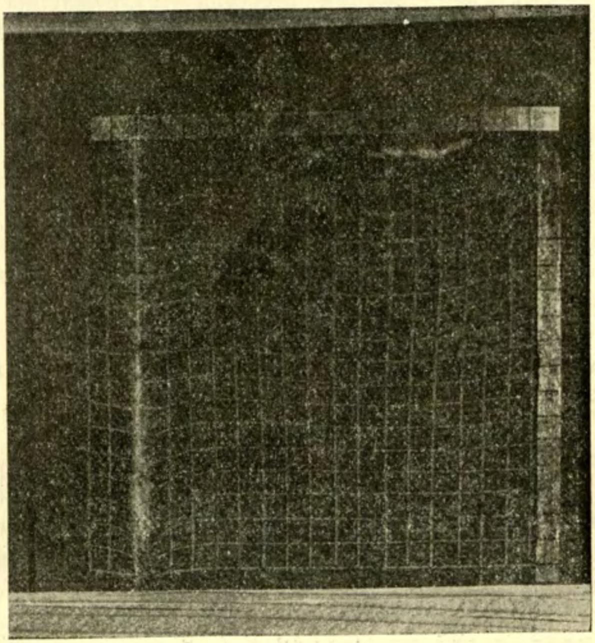


FIG. 18

fluencias de las cargas es el definido por $\frac{1}{n} \doteq \frac{1}{5}$ ésto quiere decir:

Que prácticamente todos los efectos de una sobrecarga - se dejan sentir dentro del "bulbo de presiones" para el - cual la fatiga constante en sus puntos vale la quinta parte de la fatiga unitaria bajo la construcción.

Sigue afirmando Terzaghi que para este círculo su pro-- fundidad $T_{n=5}$ vale 80% del asentamiento total y que la relación

$$\frac{T_{n=5}}{B}$$

vale

$$\frac{T_{n=5}}{B} \doteq 1.5$$

De estos hechos visualizados y comprobados en los experimentos de las (Figs. 17, 18, y 19) hago uso en el análisis que sigue de la distribución de fatigas sobre un ataguía.

Me dieron también gran información para este análisis - de los experimentos siguientes:

El primero consistió en colocar dentro de un recipiente resistente a las deformaciones, dos arenas de diferentes colores separadas por un cristal plano delgado perpendicular al cristal grueso frontal, una vez en estas condiciones se quitó con cuidado el cristal delgado y se fueron - uniendo sin mezclarse las dos arenas, dando por consiguiente una línea vertical de separación perfectamente definida; según esta línea se dibujó en el cristal la línea LK- que puede notarse en las (Figs. 22 y 23).

A continuación se colocaron dos taquetes de madera de 2.5 cm. de espesor y que presentaban un área en contacto con la arena de 25 cm^2. Estos dos taquetes, con una arista paralela y pegada al cristal frontal, distaban cada -

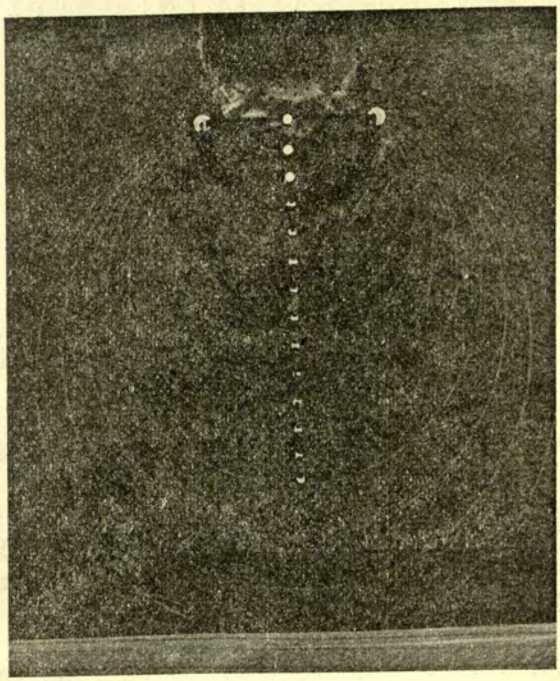


FIG. 19

uno 1 cm. del plano vertical de separación de las arenas.

Las deformaciones sufridas por este plano de contacto, al aplicar diferentes cargas sobre los taquetes, puede notarse en las figuras (22 y 23) ya mencionadas.

La curva (cóncava hacia la arena de color claro) de la - (Fig. 22) fué producida poniendo en el taquete colocado - arriba de la arena de color claro una presión de 12.5 Kg. y otra de 1 Kg. sobre el taquete de la arena de color obscuro. La primera presión produjo una fatiga de .5. Kg/cm^2 y la segunda otra de .04 Kg/cm^2.

En condiciones semejantes se cargaron respectivamente - los taquetes con 20 Kg. y 1 Kg. produciendo ahora fatigas de .8 Kg/cm^2 y .04 Kg/cm^2. y se produjo la curva de la - (Fig. 23).

Si hemos de suponer que a mayor presión lateral le co-- rresponde mayor desalojamiento de una arena sobre la otra, es evidente que estas curvas muestran mucho sobre la distribución de presiones, que ciertamente no es la hidrostática.

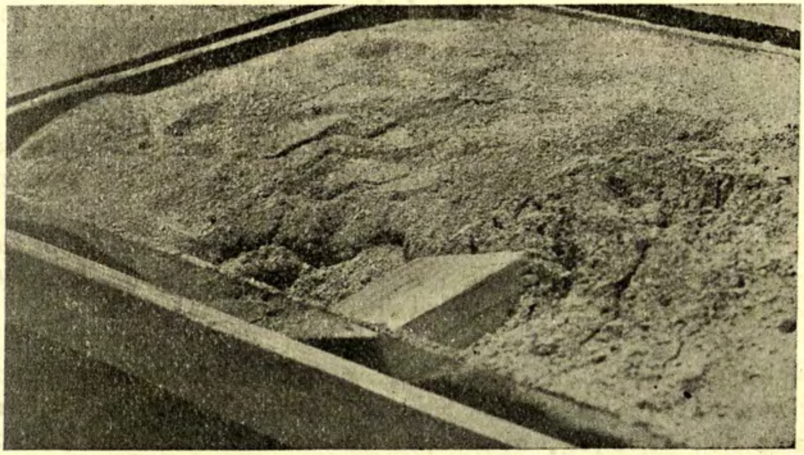
Curvas semejantes se efectuaron con otras condiciones - de carga repitiéndose varios experimentos.

El valor de las cargas aplicadas se midió con el aparato que se muestra en la(Fig. 21) hecho para este efecto - y graduado en Kg.

Un último experimento consistió en colocar un tabique - de caucho de 3 mm de espesor en posición vertical dentro de una masa de arena.

De este tabique se determinaron tanto el momento de inercia de la sección que quedaba pegada al vidrio frontal como el módulo de Young del material (caucho).

Al colocar dos areas, desigualmente cargadas, a uno y -



Aspecto de la arena y del taquete de la derecha después de efectuarse el experimento de la fig. 23.

FIG. 20

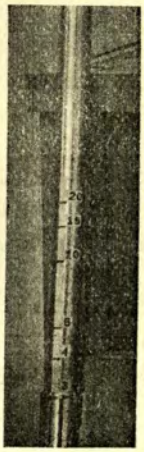


FIG. 21

otro lado del tabique sufrió éste deformaciones muy parecidas a las de las (Figs. 22 y 23); el estudio de estas deformaciones llevaron a tres principales conclusiones:

1a.-Que el tabique no sufre deformación o movimiento alguno en su porción contigua a la superficie de la arena.

El conocimiento de este hecho me puso en condiciones de determinar el valor de una de las constantes de la ecuación de la elástica de la ataguía.

2a.-Que a medida que crece la profundidad, las sobrecargas superficiales tienen menos influencia en las deformaciones del tabique, hecho por el cual también se pudieron determinar otras dos constantes de la ecuación a que ya hice referencia.

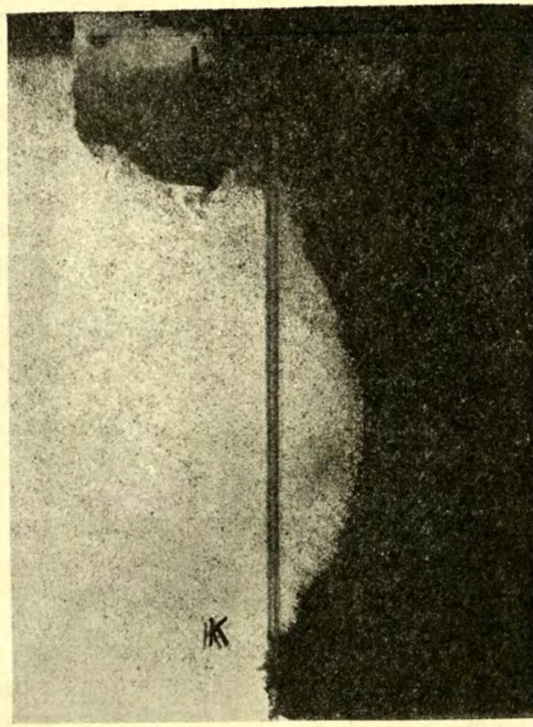
3a.-Que los fenómenos que ocurren dentro de la masa de arena, cualesquiera que ellos sean, son alterados en las proximidades del cristal, debido a la rigidez de él que viene a interrumpir la isotropía del material.

Como resultado de esta experimentación, presento el siguiente análisis de la distribución de fatigas sobre una ataguía.

Ya sea que consideremos un tablestacado con cubre-juntas para pequeñas profundidades, tablestacados con machihembrado para mayores profundidades, o tablestacados de cualquier otro tipo (hierro laminado tipo Ohlrogge, tipo Friestedt o cualquier otro) elijo para mis consideraciones la sección transversal de dimensiones mínimas y supongo que tanto su módulo de elasticidad como su momento de inercia son conocidos.

B).-<u>Análisis de la Distribución de Fatigas sobre una ataguía y determinación de los valores de la presión unitaria; del momento flexionante; y esfuerzo cortante, en cada punto de ella.</u>- La porción de ataguía analizada está en posición vertical y sus superficies laterales reciben las correspon-

FIG. 23



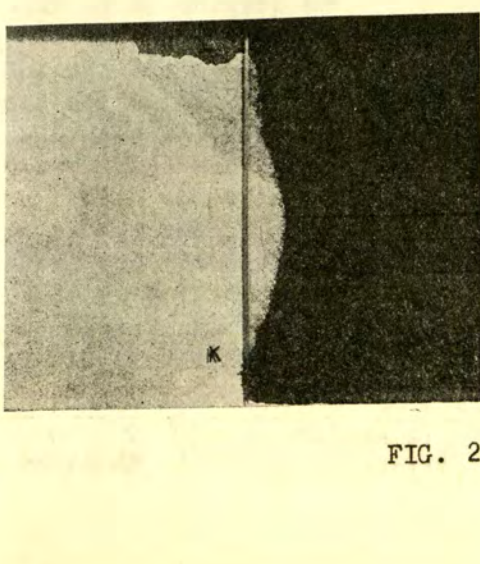


FIG. 22

dientes reacciones de las dos porciones de terreno que quedan a uno y otro lado.

La (Fig. 24) representa esta sección transversal ABCD que tiene perpendicularmente al plano de la figura una longitud relativamente corta comparada con su profundidad BC.

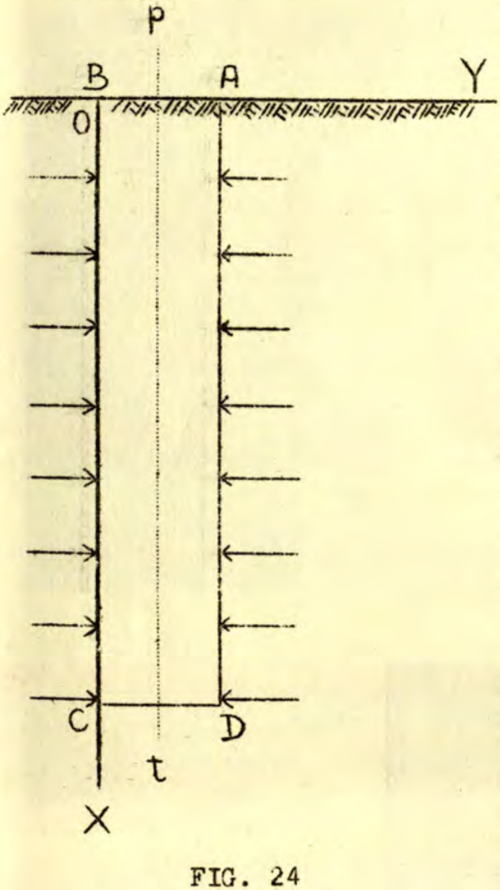


FIG. 24

Supongamos que las secciones perpendiculares al eje (línea que une a los centros de gravedad de todas las secciones) de esta porción de ataguía, son todas iguales, en estas condiciones por nó ser la ataguía absolutamente rígida sufrirá deformaciones bajo la influencia de las diferentes reacciones ya mencionadas; que obran a uno y otro lado. Basándonos en la hipótesis de Navier podemos afirmar que las secciones planas perpendiculares al eje antes de la deformación prosiguen siendo planas después de la deformación y que las fibras paralelas al eje antes de la deformación son después de ella normales a las secciones planas de que antes se habló, por lo tanto las fibras colocadas en la parte cóncava de la porción de ataguía deformada sufrirán compresiones y las colocadas en la porción convexa resultarán alargadas (Fig. 25).

Analicemos una porción MNSR de la ataguía, si gradual- --

mente pasamos por planos de fibras comprimidas a fibras alargadas es obvio que habrá un plano para el cual las fibras contenidas en él no sufren ni compresiones ni extensiones; la intersección de este plano con un plano vertical que contenga al eje de la porción de ataguía analizada origina la curva p't' que se llama ELASTICA.

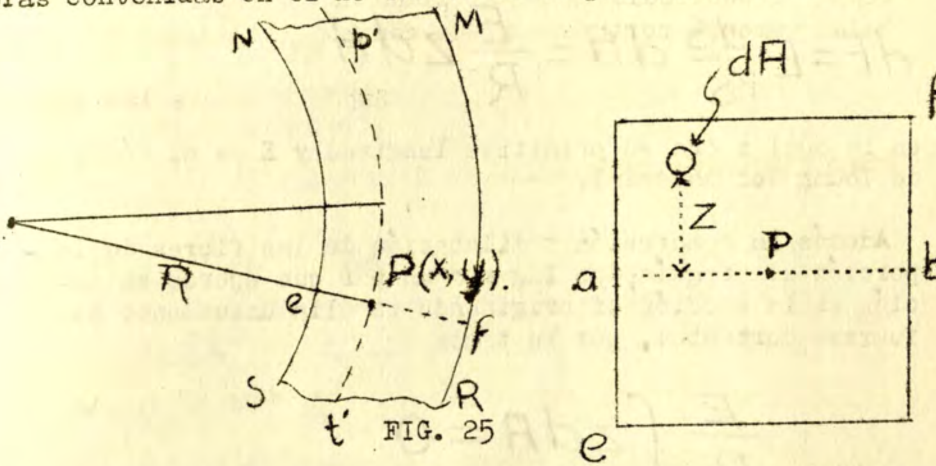


FIG. 25

Analicemos a esta curva:

Si referimos esta curva al marco XOY que guarda con la porción de ataguía la posición mostrada en la (Fig. 24), entonces podemos considerar el punto P(x,y) de la elástica y el radio de curvatura R de la misma en dicho punto (Fig. 25). Hagamos pasar por P la sección EF normal a la elástica que intersecta al plano neutro según la línea ab.

La fibra de área diferencial de A (dA) (Fig. 25) distante de ab la cantidad z ha sufrido un alargamiento

$$ds = S\frac{z}{R}$$

y por la ley de Hook, puesto que la ataguía está construida de un material elástico, la fuerza de tensión aplicada en esta fibra es

$$dF = E\frac{ds}{s}dA = \frac{E}{R}z\,dA$$

en la cual s era su primitiva longitud y E es el módulo de Young del material.

Además la compresión y dilatación de las fibras de la porción de ataguía, dan lugar a un par que ejerce su acción en la sección ef originando en ella unicamente esfuerzos cortantes, por lo tanto

$$\frac{E}{R}\int z\,dA = 0$$

ecuación que nos muestra que P coincide con el centro de gravedad de la sección ef, ésto nos lleva a la conclusión siguiente:

LA ELASTICA ES LA CURVA ORIGINADA POR LA FLEXION DEL EJE DE LA VIGA.

Una vez asentado ésto, deduzcamos la ecuación de la elástica de nuestra porción de ataguía.

El momento M con respecto a,ab,de los esfuerzos originados en la sección ef es

$$M = \frac{E}{R}\int z^2 dA = \frac{EI}{R}$$

en la cual $\frac{1}{R}$ tiene el valor

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

por ser muy pequeña la pendiente de la elástica en cualquiera de sus puntos, el valor de $\frac{1}{R}$ lo podemos expresar aproximadamente por

$$\frac{1}{R} \doteq \frac{d^2y}{dx^2}$$

que puesto en el valor de M nos da la ecuación diferencial de la elástica

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad \text{..............................} \quad (17)$$

en nuestra porción de ataguía.

Consideremos de ésta, la pequeña porción achurada en la (Fig. 26),

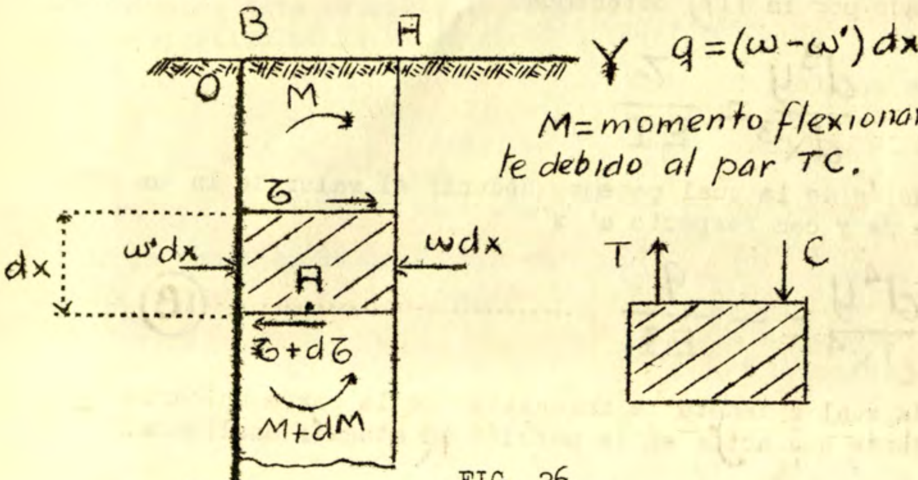


FIG. 26

por estar en equilibrio las fuerzas que sobre ella obran, tenemos tomando momentos con respecto al punto A

$$\tau\, dx + M - (M + dM) = 0 \therefore$$

$$\tau = \frac{dM}{dx}$$

y proyectando sobre el eje de las Y

$$\tau - (\tau + d\tau) + q\,dx = 0 \therefore$$

$$q = -\frac{d\tau}{dx}.$$

De lo anterior deducimos que si diferenciamos el valor de , y, dado por la (17) obtenemos

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{\tau}{EI}$$

ecuación de la cual podemos deducir el valor de la 4a derivada de y con respecto a x

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{q}{EI} \quad \text{.................................} \quad (18)$$

en la cual q denota la intensidad de la carga unitaria resultante que actúa en la porción de ataguía analizada.

Con respecto a esta reacción unitaria se supone que es directamente proporcional a la deformación que origina; - es decir

$$q = ky$$

en la cual, y, es la deformación en una sección considera da y, k, es la constante de proporcionalidad llamada MODULO DE CIMIENTO. Referente a esta hipótesis S. Timoshenko afirma lo siguiente: "La simple suposición que la reacción continua es proporcional a la deflexión, es satisfactoriamente aproximada en muchos casos prácticos" esta afirmación la apoya el propio Timoshenko con los trabajos de E. Winkler, A Zimmermann, Hayashi, Wieghardt, etc.

Si se adopta esta hipótesis es evidente que k (módulo de cimiento) es la reacción resultante del terreno sobre una area unidad de la ataguía cuando la deformación de ésta, vale la unidad. Es evidente también que la (18) toma la forma

$$\frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{k}{EI}\,y \quad \text{.........................} \quad (19)$$

Resolvamos esta ecuación diferencial considerándola como un caso particular de la de enésimo orden

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

Por lo tanto si le aplicamos el operador diferencial

$$D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \cdots, + a_{n-1} D + a_n$$

toma la forma

$$\left(D^4 + \frac{k}{EI}\right) y = 0 \quad \text{.........................} \quad (20)$$

haciendo uso de la ecuación auxiliar

$$r^4 + \frac{k}{EI} = 0$$

que tiene por raices según el teorema de Moivre las dos imaginarias

$$r = \sqrt{i\sqrt{\frac{k}{EI}}} = \pm\sqrt[4]{\frac{k}{EI}}\left[\cos\left(\frac{90}{2} + p\,\frac{360}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{90}{2} + p\,\frac{360}{2}\right)\right] \; ; \; p = 0, 1.$$

o sea

$$r_1 = \sqrt[4]{\frac{k}{EI}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

y

$$r_2 = \sqrt[4]{\frac{k}{EI}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

por las propiedades de las raíces complejas, tiene también las otras dos conjugadas

$$r_3 = \sqrt[4]{\frac{k}{EI}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$r_4 = \sqrt[4]{\frac{k}{EI}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Los valores $C_1 e^{r_1 x}$, $C_2 e^{r_2 x}$, $C_3 e^{r_3 x}$, y $C_4 e^{r_4 x}$

son raíces complejas de la ecuación (20), además (c_1, c_2, c_3, c_4 son coeficientes constantes y e es la base de los logaritmos naturales. Estas raíces pueden comprobarse aplicando a ellas el operador diferencial D.

Por medio de las ecuaciones de Euler podemos quitarles a estas raíces la apariencia de imaginarias, en efecto:

Si usamos

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{EI}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}$$

podemos escribir

$$e^{r_1 x} = e^{(\alpha + i\alpha)x} = e^{\alpha x}(\cos\alpha x + i\,\mathrm{sen}\,\alpha x).$$

$$e^{r_2 x} = e^{(-\alpha - i\alpha)x} = e^{-\alpha}(\cos\alpha x - i\,\mathrm{sen}\,\alpha x).$$

$$e^{r_3 x} = e^{(\alpha - i\alpha)x} = e^{\alpha x}(\cos\alpha x - i\,\mathrm{sen}\,\alpha x)$$

$$e^{r_4 x} = e^{(-\alpha + i\alpha)x} = e^{-\alpha x}(\cos\alpha x + i\,\mathrm{sen}\,\alpha x$$

sumando por una parte las raíces que contienen r_1 y r_3 y por otro las que contienen a r_2 y r_4 obtenemos

$$C_1 e^{r_1 x} + C_3 e^{r_3 x} = e^{\alpha x}\left[(C_1 + C_3)\cos\alpha x + i(C_1 - C_3)\,\mathrm{sen}\,\alpha x\right]$$

o bien

$$c_1e^{r_1x}+c_3e^{r_3x}=e^{\alpha x}\left[A\cos\alpha x+B\operatorname{sen}\alpha x\right]$$

por otro lado

$$c_2e^{r_2x}+c_4e^{r_4x}=e^{-\alpha x}\left[(c_2+c_4)\cos\alpha x+i(c_4-c_2)\operatorname{sen}\alpha x\right]$$

$$=e^{-\alpha x}\left[C\cos\alpha x+D\operatorname{sen}\alpha x\right]$$

Ahora bien si son soluciones de nuestra ecuación diferencial las cantidades

$$c_1e^{r_1x},\ r_2e^{r_2x},\ldots,\ \text{etc.}$$

la solución general es

$$y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}+c_3e^{r_3x}+c_4e^{r_4x}$$

lo cual puede comprobarse como ya se dijo, haciendo uso del operador D.

Esta última afirmación unida a lo anterior nos conduce a saber que la solución general de la ecuación diferencial - lineal de cuarto orden (19) es

$$y=e^{\alpha x}\left[A\cos\alpha x+B\operatorname{sen}\alpha x\right]$$
$$+e^{-\alpha x}\left[C\cos\alpha x+D\operatorname{sen}\alpha x\right]\ \cdots\cdots\ (21)$$

Estudiemos los valores de las constantes A, B, C y D.

A medida que en nuestra ataguía, aumentamos la pro--- fundidad, es evidente, que las deformaciones de ésta, debidas a las sobrecargas exteriores van teniendo cada vez menor y menor influencia; en otras palabras cuando

$$x \rightarrow \infty \qquad y \rightarrow 0$$

pero en la ecuación 21 el término que contiene a $e^{\alpha x}$ no permite que se realice esta evidencia por lo que queda la única posibilidad de que

$$A = B = 0$$

Con lo cual nuestra ecuación toma la forma

$$y = e^{-\alpha x}\left[C\cos\alpha x + D\operatorname{sen}\alpha x\right]$$

Del último experimento que realicé para analizar los - empujes de arena sobre un tabique elástico, como ya hice notar, pude concluir que los movimientos de la ataguía en la superficie del terreno son nulos o sea que en la ecuación anterior cuando

$$x = 0 \;;\; y = 0$$

Tomando ésto en cuenta para la última ecuación que da el valor de, y, obtenemos

$$C = 0$$

con lo cual podemos escribir, por último, la ecuación de la elástica de nuestra ataguía deformada:

$$\boxed{y = D e^{-\alpha x} \operatorname{sen}\alpha x} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (22)$$

Es ahora oportuna la pregunta:

¿Si la ecuación anterior es la ecuación de la ataguía deformada, como quedan expresadas en ella los importantes -- factores (naturaleza del subsuelo; fatiga unitaria en la - base de la construcción; área cargada; posición de las --- construcciones con respecto a la ataguía, etc. etc.) que de manera muy evidente influyen en la forma de la elástica?

Para dar una respuesta satisfactoria a esta pregunta, interpretaré los fenómenos de acuerdo con la hipótesis de -- Terzaghi que se ha presentado objetivamente en los experimentos arriba expuestos.

Esta hipótesis puede enunciarse así:

LA RELACION ENTRE LA PROFUNDIDAD PRACTICA EN QUE SE DEJAN SENTIR LOS EFECTOS DEL AREA CARGADA DIVIDIDA ENTRE - EL DIAMETRO DE ESTA, ES CONSTANTE Y EN GENERAL VALE 1.5

Admitiendo este resultado experimental de Terzaghi podemos asentar que

$$(\alpha)(R\delta)=\pi$$

en la cual

$$\alpha=\sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}$$

$$R = \text{constante} = \frac{\text{profundidad de la ataguía influenciada}}{\text{diámetro del area cargada}}$$

$\delta =$ diámetro del área (A) cargada $=\sqrt{A}$

puesto que la función, y, de la (22) es oscilante y corta al eje neutro de la ataguía en los puntos $\alpha x = 0$ y $\alpha X = \pi$

Por lo tanto

$$\alpha=\frac{\pi}{R\delta}$$

que puesta en la (22) nos conduce a

$$\boxed{y = De^{-\frac{\pi}{R\delta}x}\ \mathrm{sen}\,\frac{\pi}{R\delta}\,x} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (23)$$

la cual expresa la deformación de la ataguía a la profundidad x, en función de las constantes D, R, y del diámetro del área cargada δ.

Siendo tan complejas y diversas las causas de las cuales dependen las constantes D y R, me ha parecido que lo más acertado para estar de acuerdo con los fenómenos reales, es la determinación experimental de D y R en las condiciones propias donde se va a construir la ataguía y no una discusión teórica acerca de los mismos, por lo que propongo el siguiente método práctico para su determinación.

Primeramente se construiría un tabique portatil de madera machihembrada de 8 cm a 10 cm de espesor y de 3 m x 3 m.

En cada cara de este tabique se pondrían a cierta distancia (por ejemplo cada decímetro) tubos de goma paralelos y de una longitud de 3 m, con una extremidad cerrada y la otra unida a un tubo de vidrio, de tal modo que al colocar este tabique en una zanja hecha al efecto, los tubos de goma quedaran horizontales a profundidades que variaran 10 cm. En cambio los tubos de vidrio quedarían verticales y con su extremo libre sobresaliendo del nivel del suelo.

Una vez llenos los tubos con agua coloreada hasta un mismo nivel se rellenaría la zanja angosta, con tierra, cuidando que no hubiera impacto de la tierra contra los tubos al llenar la zanja. A continuación se pondrían condiciones de carga, con respecto a este tablestacado, semejantes a las que van a existir en la obra.

Ahora bien, las constantes propias de los tubos de goma, de la diferencia en altura de los tubos de vidrio y de la diferencia de altura en las superficies libres de líquido coloreado al sufrir los tubos diferentes deformaciones(de acuerdo con sus profundidades); de todos estos datos se puede calcular por medio de una ecuación empírica la distribución aproximada de las presiones como funciones de la profundidad.

En esta forma es fácil comprobar si el valor de R es de 1.5 y valuar a la constante D.

Con lo cual, si las hipótesis en que me he basado son aceptables con la aproximación conveniente, la fórmula (23) deducida, puede servir para proyectar los elementos de la ataguía, pues de esta ecuación que nos liga las deformaciones de la ataguía con las profundidades, podemos deducir por simples diferenciaciones sucesivas el valor del momento flexionante; el valor del esfuerzo cortante y el valor de la presión resultante unitaria en cada punto de la ataguía. Esto es lo que se expresa a continuación:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M \therefore$$

$$\boxed{M = -2EIDK^2 e^{-Kx} \cos Kx} \quad \cdots\cdots\cdots (24)$$

en la cual

$$K = \frac{\pi}{R\delta}$$

el significado de las otras literales ya quedó definido.

Para el esfuerzo cortante

$$\boxed{\tau = 2EIDK^3 e^{-Kx}(\operatorname{sen} Kx + \cos Kx)} \cdots (25)$$

y por último para el valor de la presión unitaria tenemos

$$\boxed{q = 4EIDK^4 e^{-Kx} \operatorname{sen} Kx} \qquad (26)$$

RESUMEN

Los experimentos aquí presentados muestran:

a) Los planos de fractura que se originan al fallar un muro por deslizamiento o por rotación, condiciones necesarias - aunque no suficientes para que tengan validez las teorías respectivas de Rankine y Coulomb (Fig. 14)

b) El fenómeno de hundimiento de la superficie superior del prisma de resbalamiento; fenómeno de gran importancia para el "efecto de arqueo" (Fig. 14).

c) El encorvamiento que sufre la parte inferior del prisma de empuje cuando el muro falla por translación (Fig. 15 - parte izquierda).

d) El fenómeno fotoelástico del bulbo de presiones, en el - cual en dos dimensiones pueden notarse las líneas para las cuales en cualquiera de sus puntos son tangentes y normales respectivamente los dos esfuerzos principales. En cada curva, además, la diferencia de estos esfuerzos es constante - como ya se demostró (Figs. 16 superior y 16 inferior).

e) Los fenómenos de las deformaciones de capas horizontales y planos verticales así como la distribución de fatigas en el seno de masas de arenas (Figs. 17, 18 y 19).

f) La distribución de fatigas (en dos dimensiones) sobre un plano vertical al aplicarse cargas de muy diferente valor - a uno y otro lado de dicho plano (Figs. 22 y 23). En la --

(Fig. 20) puede notarse las grietas casi circulares que se originaron en la superficie de la arena, así como la posición en que quedó el taquete de menor carga al ser arrastrado por el de mayor carga colocado a su izquierda.

g) Las deformaciones sufridas por un tabique elástico colocado verticalmente y con cargas verticales desiguales puestas sobre la superficie de la arena muy próximas a él y a uno y otro lado.

De las investigaciones presentadas en la última parte de este tercer Capítulo puede concluirse:

1° Que la ecuación de la elástica de una ataguía intermedia entre dos construcciones próximas, dada en función del diámetro δ del área cargada es

$$y = D e^{-\frac{\pi}{R\delta}x} \operatorname{sen} \frac{\pi}{R\delta} x$$

en la cual, y, es la deformación de la ataguía en un punto de abcisa x según el sistema de referencia de la (Fig. 24) D y R son constantes que pueden determinarse experimentalmente por el método descrito en este Capítulo; δ el diámetro del área cargada.

2° La fatiga unitaria en un punto de la ataguía de profundidad x vale

$$q = K_1 K^4 e^{-Kx} \operatorname{sen} Kx$$

el significado de las literales queda explicado en el texto.

3° El valor del momento flexionante en un punto de la ataguía, está dado por la ecuación (23) y el valor del esfuerzo cortante por la (24).

4° Todos los resultados anteriormente obtenidos son váli--

dos siempre que las hipótesis fundamentales sobre las que -- baso este análisis sean satisfactoriamente aproximadas para el caso particular en que las aplico.

El grado de aproximación necesario que deban tener estas-hipótesis, en el caso particular en que están aplicadas, sólo puede ser verificado por experiencias que no están a mi-alcance.

Estas hipótesis fundamentales pueden reducirse a tres, -- que son las siguientes:

1a.-La hipótesis de las secciones planas debida a Navier. - Esta hipótesis es utilizada para establecer la ecuación de-la elástica.

2a.-La hipótesis de la proporcionalidad entre las deformaciones de la ataguía y las reacciones unitarias aplicadas a ella. Esta hipótesis, según afirma Timoshenko ha sido ampliamente verificada en otros casos, así como también ha sido determinada la "constante de cimiento".

3a.-La hipótesis sostenida por Terzaghi y que se refiere a la relación constante entre el diámetro del área cargada y la profundidad práctica a que se dejan sentir los efectos - de la sobrecarga.
