Telegrama á México.
Al Mayor Angel Garcia Peña.
Palacio N.^l = Depar.^to del Gpo. Espe-
cial de Estado Mayor.

Los Beltran, Huerta, Alvarado,
Duclaud, Gonzalez, ~~Simon~~.
Quisieran de corazon
Que pasára el dia á su lado
En muy amena reunion.
Armendáriz, Mondragon,
El Sordo, Maass y Corral;
Marquétis el garrafal
Y el loco Aguirre en su union,
Le desean dicha cabal.

J. Alvarado

Agosto 2 de 1883.

Nota relativa al Capítulo VII

Nivelacion barométrica

(Tomada de un opúsculo publicado por el Ingen.º Vicente Reyes en 1878 y titulado "Datos altimétricos")

Cuando en una estacion barométrica cuya altitud se tiene calculada por ciertas séries de observaciones, de presion y temperatura, se hacen nuevas séries cuyos promedios difieren de los adoptados antes, puede hacerse la correccion correspondiente á la altitud determinada sin emprender de nuevo todos los cálculos.

La influencia relativa que tienen en la resolucion los errores hallados en los datos, puede determinarse diferenciando la ecuacion

$$n = AD\,(\log.B - \log.b)\left(1 + \frac{2r+n}{R}\right)$$

en la que $A = 18370\,(1 + 0.0033 \cos 2\varphi)$

$$D = 1 + \frac{2\,(T+t)}{1000}$$

Haciendo abstraccion del factor $\left(1 + \frac{2r+n}{R}\right)$ que difiere muy poco de la unidad, se tiene:

$$n = 18370\,(1 + 0.0033 \cos 2\varphi)(\log B - \log.b)\left(1 + \frac{2\,(T+t)}{1000}\right)$$

Y la correccion de la funcion n respecto á las correcciones que haya que hacer á las variables φ, B, b, $(T+t)$, quedará representada por la expresion:

$$\Delta n = \frac{dn}{d\varphi}\Delta\varphi + \frac{dn}{dB}\Delta B + \frac{dn}{db}\Delta b + \frac{dn}{d(T+t)}\Delta(T+t) \ldots$$

~~[illegible]~~

Pero,

$$\frac{dn}{d\varphi} = \frac{-0.0066 \operatorname{sen} 2\varphi}{1 + 0.0033 \cos 2\varphi}\, n \ldots\ldots (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dn}{dB} &= \frac{1}{B}\cdot\frac{M}{\log B - \log.b}\, n \ldots \\ \frac{dn}{db} &= \frac{1}{b}\cdot\frac{M}{\log.B - \log b}\, n \ldots \end{aligned}\right\} (2)$$

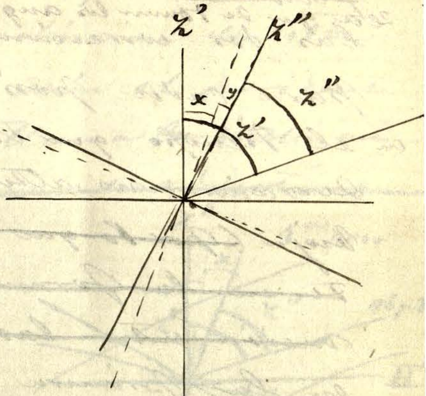
$$\frac{dn}{d(T+t)} = \frac{n}{500+T+t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

y de consiguiente:

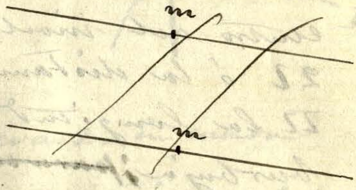
$$\Delta n = n \left[\frac{-0.0066 \operatorname{sen} 2\varphi}{1+0.0033 \cos 2\varphi} \Delta\varphi + \frac{M}{\log.B - \log.b} \times \left(\frac{\Delta B}{B} - \frac{\Delta b}{b} \right) + \frac{\Delta(T+t)}{500+T+t} \right] \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Sobre la medida de distancias zenitales-

~~Nota relativa á los niveles~~ Cap. II (P4



Suponiendo: Z', el zenit aparente; Z'' el que produce el eje óptico verdadero del telescopio, el cual para este caso lo supondremos coincidir con el eje óptico aparente, que produce la retícula del telescopio; x la correccion que debe hacerse á la distancia zenital que dá el instrumento, debida á la inclinacion del nivel y de del, respecto de la plataforma de giracion ~~base de los ejes o sea~~ del instrumento



~~en el caso en que el nivel no está fijo al circulo vertical sino unido al telescopio, la correccion que debe aumentarse á la distancia zenit por la falta de paralelismo del nivel cuando el eje esta puesto de la linea de los ejes que de la ... del eje ó sea optico f y vertical ...~~; y la inclinacion de la dicha plataforma ó sea la del ~~x ó sea tambien la de la dicha platafor~~ árbol vertical del instrumento á cuyo derredor gira ~~esta~~. Ambas correcciones ó inclinaciones x del nivel y la y del eje ~~de rotacion~~ las supondremos positivas de manera que tienden á disminuir la distancia zenital, tendremos:

Para todos los casos $Z' = Z'' + x + y$ . . . (1)

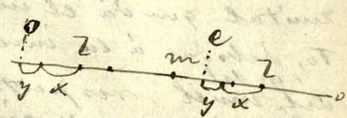
~~I Medida en las dos posiciones directa é invertida del instrum~~

Si se miden los angulos en las dos posiciones ~~directa é invertida~~ del instrumento, como el nivel permanece fijo al circulo vertical y en tal caso al anteojo, y la inclinacion del eje debe suponerse tambien invariable ~~res~~

Correcciones instrumentales por nivel é inclinacion del eje vertical del instrumento en el plano vertical del objeto, durante la observacion, y siempre en el mismo sentido ~~fuera de la direccion del mismo objeto~~ sea que se tomen los angulos en una posicion ó otra invertida, entonces las dos correcciones x é y serán idénticas para cada posicion; y como ademas ~~debe~~ en el tiempo que trascurre de una á otra observacion, no altera la dimension de la burbuja ~~(por lo que digo se verá que realmente en la formula entra la indicacion media entre las estremas)~~; se tiene en la primera posicion ~~que el ocular directa~~, siendo m el ~~indicador~~ lugar del centro del nivel y

$2l$ ó la distancia oe

$2l$ la longitud de la burbuja ~~; para el caso en que~~



1ª posicion { lect. ocular ... $o = mo = l + x + y$

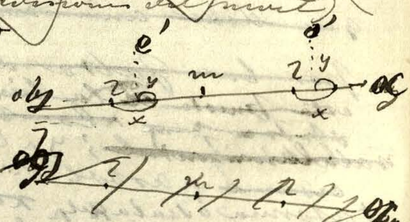
~~directa~~ { lect. objetiva ... $e = me = l - (x + y)$

{ para los niveles cuya division indice está en el centro

~~de las cuales se obtiene (siendo v el valor angular de cada una de las divisiones del nivel)~~

$$x = \frac{1}{4}\left((o+o') - (e+e')\right)v$$

$$y =$$



2ª posicion { lect. oc ... $o' = l + (x - y)$

~~invertida~~ { " obj ... $e' = l - (x - y)$

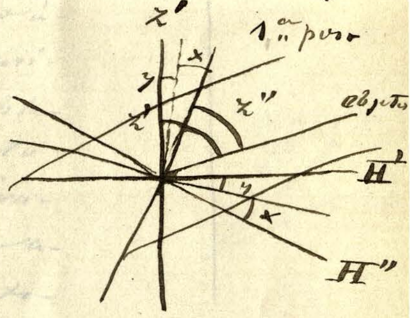
de las que se obtiene, siendo v el valor angular ~~correspondiente~~ equivalente á una division del nivel:

$$x = \frac{1}{4}\left((o+o') - (e+e')\right)v \; \ldots\ldots \; (2)$$

$$y = \frac{1}{4}\left((o-o') - (e-e')\right)v \; \ldots\ldots \; (3)$$

Estas formulas como hemos dicho, ~~producen~~ miden independientemente una de otra, ~~las correcciones que deben hacerse á las distancias~~ inclinaciones del nivel respecto ~~del horizonte aparente, que en los alteraciones~~

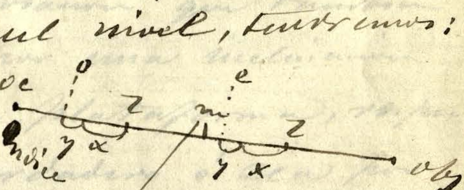
~~es la línea~~ del plano de la plataforma ~~del instrumento~~, y la inclinación de esta misma plataforma sobre el horizonte verdadero ó lo que se llama ~~la~~ inclinación del eje de rotación; ~~Pero es de advertir que~~



de manera que sirven para ~~corregir una ú otra~~ averiguar sus valores y ~~corregir el nivel y la línea~~ ~~posición de los diámetro respecto de la plataforma y la posición~~ y corregirlos ó llevarlos en cuenta

Cuando ~~el índice de~~ la graduación del nivel es corrida y el cero ó índice de ella está en uno de los extremos, que por lo general es hacia el ocular del telescopio, para la posición que se llama directa, entonces ~~llamando~~ siendo m la división que marca el centro del nivel, tendremos:

1ª pos $\left\{ \begin{array}{l} \cancel{\text{lect. oc.}\dots o = m-(x+y)} \\ \cancel{\text{,, obj.}\dots e = m} \end{array} \right.$

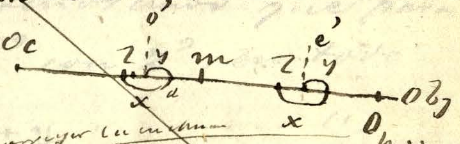


1ª pos. $\left\{ \begin{array}{l} \text{lect. ocular } Oo \dots o = m - z - (x+y) \\ \text{,, obj} \dots Oe \dots e = m + z - (x+y) \end{array} \right.$

2ª pos $\left\{ \begin{array}{l} \text{lect. oc} \dots Oo' \dots o' = m + z - (x-y) \\ \text{,, obj} \dots Oe' \dots e' = m - z - (x-y) \end{array} \right.$

Vale

de las que, siendo como antes v el valor angular de las divisiones:



corregir la misma

$$x = \left[m - \tfrac{1}{4}\left((o+o') + (e+e')\right)\right] v \dots\dots (2')$$

$$y = \tfrac{1}{4}\left((o'-o) + (e'-e)\right) v \dots\dots\dots\dots (3')$$

nota á la pag. 403.

Medida de distancias zenitales.

Correcciones instrumentales

Correccion por nivel é inclinacion del eje vertical de rotacion.

Suponiendo z' el zenit aparente, z'' el que produce el eje óptico aparente, que por ahora lo consideraremos coincidir con el plano paralelo al de la plataforma horizontal ó de giracion del instrumento, y en aquellos ~~los instrumentos~~ en que el telescopio da vuelta al rededor de su eje de figura, con este eje; x la desviacion que sufre la direccion de z'' por la falta de paralelismo del eje del nivel sobre dicha plataforma, y en su caso respecto al eje de figura del telescopio, é y la desviacion que tambien puede sufrir z'' por una inclinacion de la mencionada plataforma, respecto del horizonte verdadero ó sea por la inclinacion del eje vertical de rotacion del instrumento, que está fijo en la plataforma; tendremos que para hacer coincidir z'' con z', en todo caso:

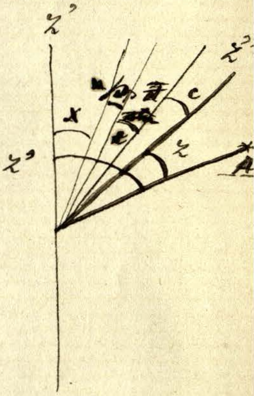
$$z' = z'' + x + y \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

En cuya ecuacion hemos considerado á x é y tendiendo á disminuir la distancia zenital, para que ambas tengan el caracter de correccion, que siempre será aditivo algebraicamente, esto es, con el signo que les resulte -

Correcciones instrumentales — pag. 409

Medida de distancias zenitales, con un altaz.

Inclinacion del eje vertical del instrumento y de el del nivel, respecto de la plataforma horizontal ó plano perpendicular á dicho eje vertical —



~~Para que las correcciones que producen la falta de igualdad de los apoyos del nivel en los telescopios de transito, respecto del nivel montante, ó sea la falta de paralelismo del eje del nivel respecto á la linea de los ceros, cuya desviacion llamaremos y sean todas aditivas~~

Para que sean aditivas ~~á la distancia zenital~~ ó lo que es lo mismo positivas en la formula general, todas las correcciones que se deben hacer á las distancias ~~zenitales marcadas señaladas por las~~ lecturas del circulo vertical en un altazimut para tener la distancia zenital aparente de una visual, en la posicion en que ~~cuando~~ el instrumento señala las distancias zenitales á que comunmente se denomina por la letra b sean:

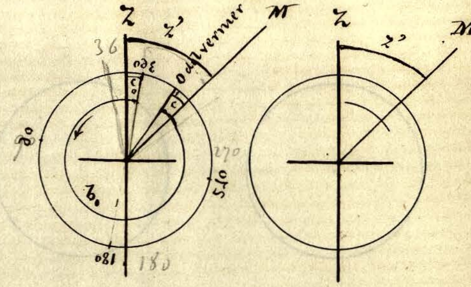
x = á la inclinacion del eje vertical ó arbol de giracion del instrumento, hacia el objeto

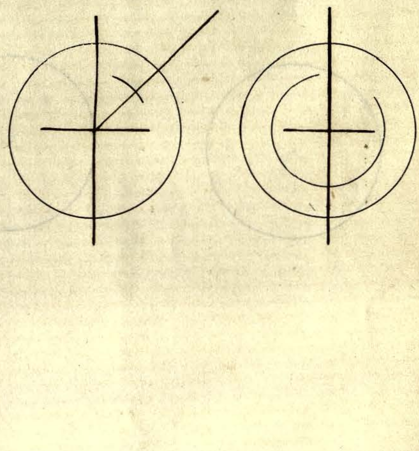
p_1 = á la que ~~tiene el nivel~~ produce la ~~falta~~ desigualdad de los apoyos del nivel, ó inclinacion del eje del mismo respecto de la linea de los ceros del circulo vertical —

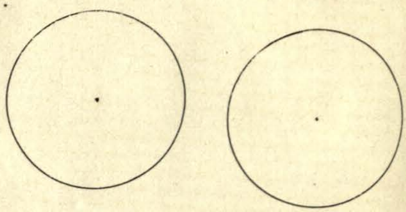
i = á la que corresponde á la mala situacion del indice de la lectura de las divisiones del nivel, ~~respecto~~

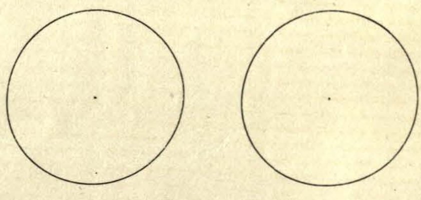
c = á la colimacion ~~de~~ vertical de la reti-

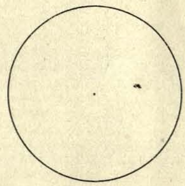
Circ. à la ~~itep.~~ du art observ.

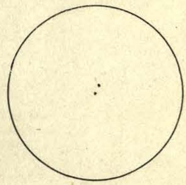


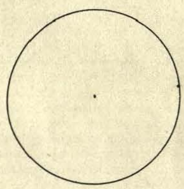


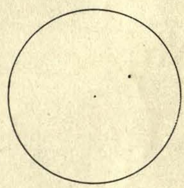












TRATADO

DE

TOPOGRAFIA

Y DE GEODESIA

CON LOS PRIMEROS ELEMENTOS DE ASTRONOMIA PRÁCTICA,

POR

FRANCISCO DIAZ COVARRUBIAS,

INGENIERO-GEOGRAFO
Y PROFESOR DE GEODESIA Y ASTRONOMIA PRACTICA
EN LA ESCUELA ESPECIAL DE INGENIEROS.

TOMO I.

TOPOGRAFIA.

Al Sr. D.ⁿ Agustin Diaz
Su afmo. am.º y S.
F. Díaz C.

MEXICO.
IMPRENTA DEL GOBIERNO, EN PALACIO,
Á CARGO DE JOSÉ MARIA SANDOVAL.

1868.

PRÓLOGO.

Esta obra, comenzada hace mucho tiempo, es natural que se resienta de las dilatadas interrupciones que ha sufrido. Algunas de las teorías desarrolladas en ella, consideradas hoy por mí bajo un punto de vista mas práctico, demandarian acaso la revision y reforma de capítulos enteros; trabajo que no puedo emprender en la actualidad, á causa de mis ocupaciones oficiales, y del mucho tiempo que tendria que demorar la publicacion de este libro, no correspondiendo inmediatamente, como es mi deber, á la ilustrada y patriótica cooperacion del Gobierno que se ha servido ordenar que se publique en sus prensas. Por otra parte, entre los inconvenientes de dar á luz una obra ménos acabada, pero publicada con oportunidad, y los que resultan de retardar acaso indefinidamente su publicacion, con el fin de tratar de darle mas perfeccion, no he vacilado ni he debido vacilar. Los primeros pueden serme desfavorables como autor, sobre todo, habiendo las circunstancias de que mi libro se espera hace años, y de que pocas personas saben que no me ha sido posible retocarlo; pero los segundos afectarian directamente á multitud de jóvenes estudiantes que han carecido por mucho tiempo de una obra propia para texto, y vístose por tanto en la necesidad de acudir á libros extrangeros, algunos plagados de errores, y todos inadecuados á las necesidades de nuestro país.

En efecto, la inmensa desproporcion que existe todavía en México entre la extension territorial y la poblacion, dá por resultado necesario la aglomeracion de la propiedad en pocas manos, y por consiguiente la considerable extension de las fincas rústicas, cuya medicion constituye ordinariamente el principal objeto y la mas frecuente aplicacion de las operaciones topográficas. De este hecho se deduce que la Topografía en la República no debe tener límites tan reducidos como en Europa, donde la propiedad territorial está muy dividida á causa de la pequeñez del suelo respecto de la poblacion; y por eso en nuestro país cuando un ingeniero desea operar con toda la exactitud debida, halla insuficientes en muchos casos los procedimientos puramente topográficos consignados en las obras europeas. En ellas, por ejemplo, se admite invariablemente la hipótesis fundamental de la Topografía, á saber: que una pequeña porcion de la superficie de la tierra puede considerarse como sensiblemente plana, y que todos los meridianos terrestres comprendidos en ella son paralelos; pero sin negar que esta hipótesis produce en muchísimos casos la exactitud suficiente, se comprende sin esfuerzo alguno que hay otros en que origina errores de consideracion, superiores en magnitud á los errores posibles de la observacion directa. Así, por ejemplo, si se orientase una linea, y por medio de la cadena trigonométrica se dedujese la orientacion de otra linea situada á mucha distancia al Oriente ó al Occidente de la primera, es evidente que el paralelismo hipotético de los meridianos produciria un error de mucha importancia y de no menor trascendencia, pues en nuestras latitudes una distancia de 30 leguas seria bastante para originar mas de medio grado de error en la orientacion deducida, y es bien sabido que hay muchas propiedades en la República en las cuales pueden contarse distancias comparables á aquella.

Errores análogos se originarian en las nivelaciones trigonométricas, si en una extension considerable de terreno se admitiese invariablemente la hipótesis de que son paralelas las lineas verticales de todos sus puntos, razon por la cual aun algunos tratados europeos al ocuparse de la Nivelacion, se apartan de la hipótesis fundamental de la Topografía. Estos ejemplos me parecen suficientes para probar la necesidad que tenemos en México de dar mas amplitud á la Topografía, haciéndole participar algo de los procedimientos geodésicos, si no con toda la rigurosa exactitud que corresponde á un tratado especial de Geodesia, al ménos con el grado de precision que sea necesario para que en ciertos casos especiales se pueda evitar la acumulacion de los errores originados por las causas ántes mencionadas. Por eso sin perder de vista esa idea, y por otra parte, evitando cuidadosamente el caer en el extremo contrario, cual es el de exagerar demasiado la necesidad de una exactitud verdaderamente pueril, he procurado trazar la marcha mas conveniente para que el lector se halle en aptitud de apreciar por sí mismo el grado de precision que debe emplear en determinadas circunstancias. En las aplicaciones de la ciencia, el verdadero saber consiste, mas bien que en el uso ciego y sistemático de vastos conocimientos teóricos, en la calificacion del grado de exactitud práctica que en cada caso se necesita.

El tomo I de mi obra está dividido en cuatro partes. La primera trata de la Planometría ó levantamiento de planos; la segunda de la Agrimensura; la tercera de la Agrodesia ó division de los terrenos; y la cuarta de la Nivelacion.

La parte primera está subdividida en dos secciones, destinada la una á las operaciones generales que abrazan el conjunto del terreno, y que por esta razon llamo *Planometría general ó Triangulacion*, y la otra á las operaciones de detalle que designo con el nombre de *Planometría parcial.* Como el órden con que trato cada una de estas operaciones, que es el mismo en que se han mencionado, es enteramente contrario al que siguen cuantos autores han llegado á mis manos, me creo obligado á exponer las razones que me han inducido á proceder así. En primer lugar, juzgo que las operaciones fundamentales que constituyen lo que comunmente se llama *Triangulacion,* teniendo por objeto suministrar la posicion de cierto número de puntos que sirvan de apoyo á las operaciones secundarias, deben ser expuestas ántes que estas últimas. En segundo lugar, en la práctica del levantamiento de planos, casi invariablemente se sigue el mismo órden, fijándose la posicion de algunos puntos trigonométricos ántes de dar principio á las operaciones que sirven para configurar los diversos accidentes y las divisiones naturales ó artificiales del terreno. En tercer lugar, las operaciones trigonométricas, sujetas solo á un corto número de sencillísimas reglas, permiten una marcha mas sistemática, mas general, y por tanto mas fácil que los procedimientos de la planometría parcial, los cuales dependen en mas alto grado de las condiciones del terreno. Ademas de todas estas razones, es un hecho que una vez familiarizado el operador con los procedimientos trigonométricos, y con el uso de los instrumentos mas perfectos que se emplean en la triangulacion, no encuentra dificultad alguna en los métodos é instrumentos aplicables á la planometría parcial, lo cual evita multitud de repeticiones al exponer la parte teórica de los primeros y las rectificaciones de los segundos.

Despues de la Agrimensura, y como una aplicacion de esta y de la Planometría, expongo con el nombre de *Agrodesia* el conjunto de procedimientos que se aplican á la division ó fraccionamiento de los terrenos. Esta aplicacion de la Geometría se designaba antiguamente con el nombre de *Geodesia;* pero desde que esta última voz se ha consagrado á la denominacion de la ciencia vastísima que abraza el conjunto de las teorías concernientes á la forma y magnitud del globo terrestre y de sus grandes divisiones, los geómetras franceses han hecho uso de la palabra *Poligonometría,* que literalmente significa *medicion de polígonos,* y que por tanto no indica la idea de *division de terrenos,* objeto único de la parte de la ciencia que con ella se intentaba designar. La palabra *Agrodesia,* introducida por mí, está derivada de dos voces griegas que significan, la primera *campo, heredad,* y la segunda *division, distribucion,* por lo cual me parece mas propia para el objeto.

La Geodesia, contenida en el Tomo II, está dividida en tres partes, destinada la primera á enseñar las aplicaciones mas usuales de la ciencia, partiendo de la forma y dimensiones de la tierra, tales como se conocen hoy; la segunda á la exposicion de los métodos de investigacion que se han aplicado y se aplican para llegar á aquellos resultados, y la tercera á establecer los principios mas esenciales de la Astronomía práctica, complemento indispensable de la Geodesia.

Para concluir solo me resta manifestar el sincero deseo que me anima de que mis esfuerzos produzcan algun resultado, y de que la juventud mexicana, á quien especialmente dedico este libro, vea en él una prueba del ardiente interes que siempre me han inspirado sus adelantos, que son los de la patria.

México, Agosto 3 de 1868.

F. Diaz C.

INTRODUCCION.

1º La *Topografía* tiene por objeto la descripcion geométrica de una porcion cualquiera de la superficie de la tierra.

Para que esta descripcion sea perfecta, es necesario que dé á conocer la forma general del terreno, su extension y divisiones, la situacion relativa de los objetos, y finalmente, las alturas de unos puntos respecto de otros.

Segun esto, la Topografía abraza diversos ramos que definiré separadamente, y son:

I. La *Planometría* ó el *Levantamiento de planos*, cuyo objeto es la adquisicion de todos los datos necesarios para poder trazar en el papel una figura semejante á la del terreno, suponiéndolo proyectado en un plano horizontal.

II. La *Agrimensura*, que se ocupa de la medida de la superficie de los terrenos.

III. La *Nivelacion*, que trata de la valuacion de las alturas relativas de los puntos.

2º En el curso de esta obra me propongo dar á conocer los métodos geométricos mas usados en cada una de las partes que comprende la Topografía, debiendo ántes advertir que en ellos se admite la hipótesis de que es sensiblemente plana la porcion de la superficie de la tierra en que se opera; mas perteneciendo aquella en realidad á la de un esferóide que difiere poco de una esfera de 6366738 metros de radio, las operaciones puramente topográficas no deben extenderse mas que á una parte de la superficie bastante pequeña para poder suponer sin error sensible que el casco esférico correspondiente es plano, ó lo que es lo mismo, que se confunde con el plano *tangente* en su parte media, que es en el que se suponen proyectados ortogonalmente los puntos del terreno. Es claro que investigando el error que ocasiona esta hipótesis, podrémos, hasta cierto punto, fijar los límites de la extension que debe darse á las operaciones únicamente topográficas.

Para conseguirlo sea R el radio de la tierra, y supongamos que un casco esférico y su plano tangente son engendrados respectivamente por el movimiento del arco $a\ b$ (Fig. 1ª) y la tangente $A\ B$ al derredor de $O\ C = R$. Propongámonos determinar la diferencia d entre la extension de la tangente y la del arco, esto es: $d = A\ B - a\ b$.

Con un radio igual á la unidad tracemos el arco $a'\ b'$ y su tangente $A'\ B'$, y en virtud de la semejanza de los triángulos y sectores, se tendrá: $A\ B = A'\ B' \times R$, y $a\ b = a'\ b' \times R$ con lo que la ecuacion anterior se trasforma en $d = (A'\ B' - a'\ b')\ R$. Mas si designamos por c el ángulo central formado por los dos radios, se tiene: $a'\ b' = c$, $A'\ B' = 2$ tan. $\frac{1}{2}\ c$ y nuestra ecuacion vendrá á ser: $d = R\ (2 \text{ tan. } \frac{1}{2}\ c - c)$.................................. (1)

Para determinar el factor de R, harémos uso de la serie que dá la tangente en funcion del arco, á saber:

$$\text{tan. } m = m + \tfrac{1}{3}\ m^3 + \tfrac{2}{15}\ m^5 + \&c.$$

Aplicándola al ángulo $\frac{1}{2}\ c$ y tomando solo dos términos, se tiene: tan. $\frac{1}{2}\ c = \frac{1}{2}\ c + \frac{1}{24}\ c^3$ de donde 2 tan. $\frac{1}{2}\ c - c = \frac{1}{12}\ c^3$. Sustituyendo este valor en la ecuacion (1) resultará finalmente.

$$d = \tfrac{1}{12}\ R\ c^3 \text{ .... } (2)$$

En esta fórmula, c está expresado en partes del radio; si se quisiera introducir por su número de minutos, bastaria multiplicarlo por sen. $1'$ (*), y entónces haciendo la constante $\frac{1}{12} R$ sen.^{3} $1' = a$, se tendrá:

$$d = a\, c^3 \text{..................} \log. a = 5.11592$$

log. R.... 6.80392
log. sen^3 1'... $\bar{9}$.39118
$\bar{4}$.19510
−log. 12...− 1.07918
$\bar{5}$.11592

Para aplicar nuestra fórmula, veamos qué error resulta de suponer plano un casco esférico de medio grado de amplitud. Se tiene, pues: $c = 30'$

log. a....................	5.11592
log. $(30')^3$............	4.43136
log. d....................	9.54728...... $d = 0^m35$

Si por el contrario, se desea saber cuál debe ser el valor de c para que en la misma hipótesis el error no exceda de 2 metros, la fórmula dará: $c = \left(\frac{d}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$ en la que $d = 2^m$

log. 2....................	0.30103
log. a....................	5.11592
	5.18511
log. $\sqrt[3]{}$....................	$\bar{1}$.72837 ..... $c = 53'5$

Así, pues, la diferencia entre un arco de 53.'5 que corresponde próximamente á 24 leguas mexicanas, y su tangente, no es mas que de 2^m, de manera que una extension de 10 á 12 leguas de radio, puede suponerse plana sin gran error, ó por lo ménos el que resulta entra en el órden de los inherentes á las observaciones mismas.

3º A pesar de lo que llevamos dicho, las operaciones topográficas pueden extenderse casi indefinidamente apoyadas en otras de un órden superior de que tratarémos en la *Geodesia*, las cuales, suministrando de trecho en trecho puntos fijos perfectamente determina-

(*) Si m es la longitud de un arco pequeño expresada en partes del radio y m' el número de minutos que contiene, se tendrá: $m = m' \times$ arco $1'$. Como la extension del arco de $1'$ es sensiblemente igual á la de su seno, la ecuacion anterior será: $m = m'$ sen. $1'$. De la misma manera si quisiéramos representar á m por su número de segundos m'', se multiplicaria esta última cantidad por sen. $1''$ y se tendria: $m = m''$ sen. $1''$.

dos, sirven á la vez de base y de comprobacion á las operaciones topográficas, dividiendo, por decirlo así, su marcha, á fin de que los pequeños errores inevitables de observacion no se propaguen. De este modo puede formarse la topografía de una nacion entera, pues si suponemos que por trabajos geodésicos se han situado de diez en diez leguas, por ejemplo, puntos de rectificacion, las operaciones topográficas no salen verdaderamente de los límites que les hemos fijado, terminándose en realidad en cada punto geodésico para continuarlas hasta el mas inmediato independientemente de las que se practicaron ántes, y así, procediendo por partes, se evita la acumulacion de errores.

Vamos, pues, á ocuparnos de los métodos que se siguen para la descripcion de terrenos que no excedan de 1° de amplitud, quiere decir, de unas 26 leguas de diámetro, ó cosa de 500 leguas cuadradas de superficie.

PARTE PRIMERA.

PLANOMETRIA O LEVANTAMIENTO DE PLANOS.

CAPITULO I.

DE LA TRIANGUACION EN GENERAL.

4º Esta parte de la Topografía se divide en dos clases de operaciones de distinta naturaleza. La primera, que designarémos con el nombre de *triangulacion* ó planometría general, tiene por objeto determinar la posicion de cierto número de puntos enlazados entre sí, y escogidos entre los mas notables que ofrece el terreno. La segunda, llamada *levantamiento de detalles*, ó mejor planometría parcial, se ocupa de fijar, con relacion á los puntos suministrados por la triangulacion, todos los demas para completar la configuracion y situacion relativa de los objetos. La diferencia entre estas dos partes del levantamiento, es análoga á la que hemos establecido entre las operaciones geodésicas y las topográficas, pues así como estas últimas deben subordinarse á las primeras, así la planometría parcial que desciende á los pormenores, se sujeta á las rectificaciones y bases que le proporciona la triangulacion, la cual solo abraza el conjunto del terreno.

5º Cuando la porcion de superficie, cuyo plano se trata de levantar, es muy pequeña, la triangulacion no es absolutamente indispensable, lo mismo que con respecto á la Topografía, no lo son las operaciones geodésicas, si el terreno no excede á 15 ó 20 leguas de extension; pero en general, la armonía que debe existir entre los resultados, aumenta en proporcion de la division de los errores que se consigue apoyándose en los puntos fijados por una triangulacion previa del terreno, y por eso me parece conveniente asentar que, cuando se desea proceder con la posible exactitud, no deben suprimirse las operaciones trigonométricas, aun en superficies de una ó dos leguas cuadradas, mas que en casos verdaderamente excepcionales. Por otra parte, la determinacion de algunos puntos trigonométricos no es operacion ni larga ni complicada, y facilita de una manera notable los trabajos posteriores.

Para adoptar la marcha que se sigue en la práctica, tratarémos primero de la triangulacion, para ocuparnos despues del levantamiento de los detalles.

6º La determinacion de los principales puntos del terreno se consigue suponiéndolos enlazados por medio de figuras geométricas cuyos elementos sean fáciles de conocer, ya sea por la observacion directa, ó bien por los métodos que proporciona la trigonometría, y siendo el triángulo la mas sencilla de estas figuras, es la que se ha adoptado de preferencia y á la que debe su nombre esta parte de la planometría.

Para comprender el espíritu de la triangulacion imaginémonos ligados por lineas rectas los puntos mas importantes de un terreno, de tal modo que quede cubierto por una red de triángulos, y supongamos que se ha medido por lo ménos uno de los lados y todos los ángulos de la red. Con estos elementos y el auxilio de la trigonometría, se puede determinar la magnitud de los otros lados, y si ademas se observa el ángulo que uno de ellos forma con una direccion fija, tal como la del polo del mundo, tendrémos todos los datos necesarios, no solo para trazar en el papel la situacion respectiva de todos los vértices, con arreglo á una escala, sino aun para *orientar* la cadena trigonométrica, esto es, para colocarla en la verdadera posicion que ocupa en la superficie de la tierra relativamente á los puntos cardinales.

7º A la verdad, los triángulos así formados están en distintos planos, á causa de la diferente altura de los vértices; pero por lo que sigue, verémos que los instrumentos ó el cálculo proporcionan los medios de *reducirlos al horizonte*, esto es, de determinar las proyecciones horizontales de los lados y los ángulos que estas forman entre sí.

8º No basta por lo comun el establecimiento de una sola cadena trigonométrica, puesto que sus vértices distan demasiado unos de otros para servir inmediatamente de base á las operaciones de los detalles, sino que apoyándose en los puntos de la triangulacion *primaria*, se establece otra de *segundo órden*, cuyos lados sean menores, y aun muchas veces otras de *tercero y cuarto órden*, hasta que los lados no excedan de 1000 ó 2000 metros.

9º Fácil es comprender que no puede darse una regla segura sobre la magnitud que deben tener los lados de una cadena primaria, puesto que en general depende de las localidades, de la mayor ó menor perfeccion de los instrumentos que se usen, del alcance de los anteojos, &c., y así, bástenos por ahora decir que debe procurarse que los triángulos sean en el menor número posible. Por otra parte, las denominaciones de *primaria, secundaria*, &c., son enteramente relativas, tanto entre sí como á la extension del terreno en que se trabaja.

10º Las operaciones que comprende la triangulacion pueden reducirse á las siguientes, de las que las dos últimas deben considerarse como trabajos de gabinete.

I. La medida de uno ó varios lados que se toman por bases de las operaciones.

II. La eleccion de los vértices trigonométricos para que los triángulos que resulten satisfagan á las mejores condiciones posibles.

III. La observacion de los ángulos y la orientacion de la cadena trigonométrica.

IV. El cálculo de los triángulos y de las coordenadas de sus vértices.

V. La construccion sobre el papel de la cadena trigonométrica con arreglo á la escala que se adopte.

Vamos á ocuparnos en particular de cada una de estas operaciones.

CAPITULO II.

DE LAS BASES.

11º Para llegar al conocimiento de los lados de una triangulacion, es necesario que la medida de uno de ellos, por lo ménos, se reuna á la de los ángulos, sin lo cual el problema seria indeterminado. La medida de este lado ó de la *base* es una de las operaciones trigonométricas que demandan mas exactitud, porque sirviendo de fundamento á todas las demas, un error, aunque sea pequeño, que se cometa en ella, puede tener mucha influencia en los resultados, como verémos despues.

12º Las llanuras extensas que no presenten desigualdades ni interrupciones bruscas y que sean sensiblemente horizontales, son los terrenos mas á propósito para medir una base, la que debe proporcionarse á la magnitud de los lados de la triangulacion, á fin de evitar el incremento demasiado rápido de los primeros triángulos que se apoyan en ella.

Hecha la eleccion de los puntos que la terminan, véamos cómo se traza la base en el terreno para proceder á medirla.

13º En uno de sus extremos se pone una señal que consiste generalmente en una bandera cuya asta, que se sitúa verticalmente, tiene dos ó tres metros de largo, y un grueso proporcionado á la distancia desde la cual se debe observar, siendo por lo comun suficiente de ocho á diez centímetros. En el otro extremo de la base se coloca un instrumento llamado *teodolito*, que describirémos despues, bastándonos por ahora decir que consta esencialmente de un círculo graduado y de un anteojo cuyo eje óptico tiene movimiento en un plano perpendicular al del círculo. Establecido este instrumento de manera que el plano de su círculo sea horizontal, y su centro corresponda verticalmente al extremo de la base, si se dirige el anteojo á la señal situada en el otro extremo hasta lograr la coincidencia perfecta entre su eje óptico, representado por la interseccion de dos hilos muy delgados que se encuentran en el interior del tubo, y el asta de la bandera, entónces el anteojo describe en su movimiento el plano vertical que pasa por la base, y pertenecerán á ella todos los puntos del terreno que vayan coincidiendo con la interseccion de los hilos, de tal manera, que no faltará otra cosa mas que demarcarlos de trecho en trecho para poder ejecutar la medida.

Así, miéntras un observador en B (Fig. 2ª) despues de establecida la coincidencia entre el asta de la señal A y el eje del anteojo, fija el instrumento de modo que no pueda desviarse lateralmente, otro se coloca en c á 50^{m} poco mas ó ménos de B, y fija en tierra verticalmente una estaca de madera, llamada *jalon*, de un metro de largo y tres ó cuatro centímetros de grueso próximamente, guiado siempre por las señales que le haga el observador en B, hasta conseguir que la estaca quede cortada, al ménos en su pié, por la interseccion de los hilos. Despues pasa á c', c'', &c., donde practica lo mismo, y si se ha procedido con cuidado, todas las estacas vistas desde el anteojo no parecerán formar mas que una sola con la señal A.

La extension de la base no siempre permite trazarla como hemos dicho desde una sola estacion, pues los jalones situados á mayor distancia de B se ven con poca claridad, y entónces es mejor proceder por partes de este modo. Despues de determinar los puntos c, c' c'' &c., se trasporta el teodolito al último c'', de manera que su centro coincida con este punto, y despues de establecida la horizontalidad de su círculo y la coincidencia de su anteojo con B, se moverá este, 180° contados en el círculo, ó mejor solo se dirigirá el anteojo á la señal A en virtud de su movimiento vertical, debiendo encontrar el asta de la bandera en la interseccion de los hilos, y se procede á situar los demas jalones de 50^{m} en 50^{m} próximamente hasta el término de la base. Debe procurarse que las estacas queden verticales y que penetren en la tierra lo suficiente para ofrecer estabilidad y resistir la tension que se ejerce en su parte inferior con el cordel que se fija entre cada dos de ellas sucesivamente al practicar la medida para no desviarse de su direccion.

14º La medida se ejecuta con una cadena de metal, generalmente dividida segun el sistema decimal, y de un *decámetro* ó diez metros de longitud. Las cadenas comunes de hierro ó de laton constan de 50 eslabones de $0^{m}.2$ cada uno, unidos por pequeñas argollas del mismo metal, y al fin de cada cinco eslabones, de otro metal diferente para indicar los metros enteros. Los extremos del decámetro están formados por dos asas para facilitar su manejo. Este instru-

Las fichas que se usan deben tener el mismo diámetro para no tener que contar distinta longitud por cada cadenada

mento se usa en union de unos alambres de hierro de dos ó tres milímetros de grueso y de $0^{m}2$ de largo, llamados *fichas*, que sirven para señalar los puntos en donde comienza ó termina la longitud del decámetro al practicar la medida

En estos últimos años* se ha introducido el uso de otros decámetros formados de un resorte de acero análogo al que sirve de motor en los relojes, y la exactitud de los resultados que suministra, unida á su poco peso, han hecho que se adopte generalmente para medidas que exigen alguna precision. La anchura del resorte es de $0^{m}01$ próximamente, y está terminado tambien por dos asas de laton con una ranura en su espesor, de un diámetro igual al grueso de las fichas, para no tener que llevarlo en cuenta en la medida. En este instrumento los metros están señalados por pequeñas láminas circulares de laton, y los decímetros por agujeros tambien muy pequeños practicados en el resorte.

* Hace mas de veinte años que se usan, pues que desde el año de 1849. se introdujeron en el pais por la Comision de límites entre Mexico y los Estados Unidos.

15º Dos personas, por lo ménos, deben ejecutar la medida de la manera siguiente: miéntras una de ellas mantiene una de las asas del decámetro en el punto que representa el término de la base, la otra, siguiendo la direccion del cordel asegurado entre este extremo y la primera estaca, clava una de las fichas de que está provista, en contacto con la otra asa del decámetro. En seguida, continuando en la misma linea señalada por el cordel, la primera pasa á colocar su asa en contacto con la ficha, y la segunda clava otra en el extremo del decámetro que tiene, visto lo cual por la primera, recoge la ficha que estaba clavada y se trasporta al punto donde acaba de colocarse la nueva ficha, desde la cual prosigue de la misma manera, teniendo cuidado de tomar siempre la ficha luego que la persona que va adelante ha clavado otra, pues es evidente que, en cualquiera punto de la medida, el número de fichas que haya recogido la persona que va atras, más la que esté clavada, representan el número de decámetros medidos. Como las fichas que tiene la persona que va adelante son generalmente 10 al comenzar la medida, luego que la que va atras las ha recogido todas, se han medido 100^{m}, pero debe tenerse cuidado de no tomar la última hasta no haber devuelto las nueve que se han recogido á la persona que va adelante, á fin de que pueda señalar el primer decámetro de la segunda centena de metros. Ademas de la frecuente rectificacion que proporciona el número de fichas, debe irse formando un apunte del número de decámetros, al paso que se van midiendo, para evitar equivocaciones.

Llegados al término de la medida, para apreciar la fraccion de decámetro que ordinariamente resulta, se tiende la cadena entre la última ficha y la señal que fija el extremo de la base, y se cuentan los metros y decímetros: en cuanto á los centímetros y milímetros, se aprecian con un doble–decímetro comun de madera ó de marfil dividido.

16º En toda esta operacion debe tenerse el mayor cuidado de no dar demasiada tension á la cadena, por temor de que abriéndose los eslabones aumente notablemente su longitud, ni tampoco debe llevarse demasiado floja, porque la curvatura que resulta de su peso la disminuye, y cuando el terreno no presenta tropiezos es mejor dejarla arrastrar libremente. En todos casos es indispensable comparar la cadena ántes y despues de usarla, con un metro–modelo, y si los dos resultados no son iguales, el término medio representará su verdadera longitud, al ménos si al hacer las comparaciones se le ha dado la misma tension que durante la medida. Sea l la longitud de la cadena, n el número de veces que cupo en la medida, b el número de metros de la base, y g el grueso de las fichas. Se tendrá: $b = n\,l + n\,g$. Mas si por la comparacion se ha encontrado que $l = 10^{m} \pm \varepsilon$, resultará sustituyendo:

$$b = 10\,n \pm n\,\varepsilon + n\,g$$

siendo ε el error de la cadena, esto es, su diferencia á 10^{m}. Si el decámetro tiene asas con ranuras para alojar la ficha, el último término es nulo.

~~Cuando las fichas tienen el mismo~~ El grueso no tiene este que llevarse en cuenta si para la medida se disponen de este modo ; y así, tambien se evita el riesgo de jalar la ficha origen de cada cadenada.

17º Por lo general las bases no se miden una sola vez, sino que se repite la medida en sentido inverso, y si los dos resultados difieren poco, como por ejemplo, una cantidad que no exceda de cosa de $\frac{1}{5000}$ á $\frac{1}{10000}$ de su longitud, segun la importancia de los trabajos, se toma el término medio de ambos para su valor definitivo. En el caso contrario, habrá necesidad de repetir las operaciones hasta conseguir mayor concordancia. *

18º El modo de medir que he explicado es defectuoso, especialmente si se opera con decámetros de eslabones, pues es claro que variando á cada paso la tension que se les dá, se altera tambien su

* En la práctica sucede que por lo regular la segunda medida es mas precisa que la primera, pues que en ésta aquella el terreno se halla mas limpio y digámoslo así, mejor preparado por las desigualdades que se han allanado desde la primera y se acaban de destruir en la segunda, y tambien los hombres estan mas expeditos. Por estas razones yo corrijo la segunda medida por ~~los dos~~ quintos, ó el tercio de la diferencia segun la naturaleza del terreno y otras circunstancias.

(A D)

tamaño, y los eslabones y argollas están muy expuestos á abrirse y enredarse. Por otra parte, cuando no se tiene el mayor cuidado de ir situando verticalmente las fichas, hay que temer el error que resulta de su inclinacion, y como presentan muy poca resistencia por su poco espesor, es sumamente fácil inclinarlas al ponerlas en contacto con el extremo de la cadena. Todos estos inconvenientes, y otros que seria inútil enumerar, hacen que este método solo se emplee cuando no se desea obtener la posible exactitud. Voy á indicar el que se ha seguido al medir las bases en que se apoya la triangulacion topográfica del Distrito, practicada por los ingenieros de la comision del Valle de México.

19º En esta medida se han usado decámetros de resorte mantenidos siempre á la tension de 12 libras, y cuya longitud se ha determinado cuidadosamente ántes y despues de la medida comparándolos con un metro–modelo de laton. Para dar á los resortes la misma tension durante toda la medida, se han empleado para cada uno dos dinamómetros *A* *B* (Fig. 3ª), compuestos de un tubo metálico en cuyo interior hay un fuerte resorte formado de una espiral de acero, y provistos de un indice *D*, que recorre una escala grabada en el mismo tubo, á la orilla de una ranura en donde se mueve el índice. Miéntras en la argolla *B* no se ejerce ninguna fuerza, el índice *D* señala la primera division *0* que es el *cero* de la escala; mas luego que se suspende en ella un cuerpo pesado, ó que se ejerce alguna traccion, la espiral interior del tubo se desarrolla, hasta que la resistencia que opone, equilibre el peso suspendido en *B*, y entónces el índice *D* señala el guarismo de la escala que marca el peso.

Para aplicar este instrumento al objeto que nos ocupa se han unido las asas *C* del decámetro á la argolla *B*, y en la otra *A* se ha ejercido la traccion hasta que el índice de cada uno de los dinamómetros señale la cifra que se desea, siendo evidente que la tension que sufre el decámetro es la misma que demarcan los índices.

20º Las fichas se han sustituido por estacas cónicas de encino de 0ᵐ35 de altura y 0ᵐ08 de diámetro en su base. En ellas se señalaban tanto los extremos de la linea por medir, como los de los decámetros por medio de rectas finas, trazadas en la cara superior despues de fijadas fuertemente en tierra con ayuda de un mazo. El modo de proceder en la medida es el que voy á explicar.

Dos criados cadeneros llevaban el decámetro *D* (Fig. 4ª) unido por sus extremos á los dinamómetros B, los cuales estaban á su vez ligados á otra estaca C, que apoyada en el suelo permitia dar la tension. Para comenzar se ponia una de las asas del resorte en coincidencia con la linea $a\ b$ marcada en la cabeza de la estaca A, y que designaba el límite de la base. Entretanto otro criado fijaba otra de las estacas próximamente á 10^m de la primera, dejándola fuera de tierra una parte tal, que su cara superior se encontrára á la misma altura que A, á fin de que el decámetro permaneciera horizontal, y en seguida, bajo la vigilancia inmediata de los ingenieros, luego que por ambas partes se daba la tension convenida, y el criado de atras mantenia su asa en coincidencia con $a\ b$, se señalaba en la cabeza de la otra estaca una linea delgada para indicar el término de la segunda asa del resorte. Esta última linea servia á su vez para continuar la medida hácia adelante, sin desviarse del cordel, que fuertemente tendido señalaba la direccion de la base, y llevando cada ingeniero separadamente un apunte del número de resortes al paso que se iba practicando la operacion. Por lo comun bastan diez ó doce estacas de encino, debiendo, sin embargo borrar con frecuencia las lineas trazadas en su cara superior para evitar equivocaciones. Este método, ejecutado con esmero, proporciona resultados muy exactos y permite trabajar con bastante rapidez, pues en nuestras bases se median generalmente cosa de 400^m por hora.

21º Hasta ahora he supuesto que el resorte tiene exactamente 10^m, y no queda otra cosa mas que explicar el método que he seguido para determinar su verdadero tamaño. Para esto se media con el resorte una longitud cualquiera L con la misma tension que se usó en la base, y con todas las precauciones que hemos indicado, trazando con rectas finas los extremos en las cabezas de las estacas. En seguida en la misma direccion de L marcada por un cordel, se situaban de metro en metro próximamente, otras estacas á la misma altura que las dos últimas, y se repetia la medida de L con un metro–modelo de laton señalando sus extremos en cada estaca con el mayor cuidado y apreciando las pequeñas fracciones con una regla de marfil finamente dividida en $0^m.0005$. Esta operacion se repetia varias veces ántes y despues de la medida de la base, procurando practicarla á la misma temperatura, para disminuir el error producido por la diferencia de dilataciones del metal. Sea ahora l la verdadera longitud del resorte á la tension á que se ha sujetado, m el número de metros y fracciones que dió el metro modelo en la longitud L, y n el número de veces que cupo el resorte. Entónces se tendrá: $l=\frac{m}{n}$. Cuando los diversos valores obtenidos para l ántes de la medida de la base, diferian algo de los que se encontraban despues, se adoptaba el medio aritmético entre todos los resultados.

Como ejemplo, pondré á la vista los datos de una de las bases en que se apoya nuestra triangulacion topográfica del Distrito de México.

Por la primera medida se encontró el número de
resortes .... $n = 299.560$
Por la segunda .... $n = 299.568$

Término medio......... $n = 299.564$

Luego tomando por unidad la longitud l del resorte, la de la base será:

$$b = 299.564 \times l$$

Para determinar l se hicieron, ántes y despues de la medida de la base, varias comparaciones, de las que resultó:

Antes de la medida .... $l = 9^{m}9910$
Despues „ „ .... $l = 9.9920$

Término medio .... $l = 9^{m}9915$

Sustituyendo este valor de l en el de b se obtiene:

$$b = 299.564 \times 9^{m}9915 = 2993^{m}094$$

que es la magnitud adoptada. Si con el valor medio de l se avalúa separadamente el resultado de cada medida, se tendrán los números $2993^{ms}054$ y $2993^{ms}133$ cuya diferencia $0^{m}08$ no es mas que cosa de $\frac{1}{37400}$ de la longitud de la base.

Haciendo uso de la fórmula del núm. 16, se tomará $\mathcal{E} = -0^{m}0085$ y entónces:

$10n$ .... $2995^{m}640$
$\mathcal{E}n$ .... -2.546

b .... $2993^{m}094$

22? Se obtienen muy buenos resultados y se evita mucho trabajo operando con medidas de longitud de mas de 10 metros. Ultimamente hice construir una medida de 25 metros próximamente, formada de resorte de acero muy delgado y de $0^{m}.006$ de ancho. El peso del instrumento, incluyendo el de las asas que lo terminan, no llega á dos libras, y es muy inferior al del resorte comun de 10 metros. Las asas están terminadas por caras planas, de modo que es preciso llevar en cuenta el grueso de las fichas, lo que siempre me parece preferible, pues es muy difícil que el diámetro de las ranuras sea exactamente igual al de las fichas.

Por varias comparaciones con un metro-modelo, hallé que la longitud del resorte, ó la distancia entre las caras extremas de sus asas, es: $l = 24^{m}.9825$. Para medir el grueso de las fichas, encontré que puestas todas ellas en contacto, abrazaban una extension de $0^{m}.032$, por lo cual se tiene para cada una $g = 0^{m}.0032$, ó bien:............. $l + g = 24^{m}.9857$. Pondré á la vista los datos y resultados relativos á la última base que medí con esta cinta de acero, advirtiendo que establecidas en sus extremos dos banderas, cuyas astas tenian $0^{m}.102$ de diámetro, debe añadirse esta cantidad al resultado de la medida, para obtener la distancia exacta entre los centros de las señales.

	1ª medida.	2ª medida.
$l + g$	$24^{m}.9857$	$24^{m}.9857$
Número de resortes enteros	88	88
Producto	2198.742	2198.742
Fracciones del resorte	+ 21 826	+ 21.712
Radios de las señales	+ 0.102	+ 0.102
Base	$2220^{m}.67$	$2220^{m}.56$

Aunque en estas medidas no usé dinamómetros, sino que se llevaba el resorte con la ligera tension puramente necesaria para que quedara recto sobre el suelo, se ve que los resultados difieren muy poco, y su promedio $2220^{m}.61$ representa la base adoptada. Las fracciones del resorte se midieron con otro de los comunes de 10 metros.

23? No siempre se encuentra un terreno horizontal de suficiente extension para medir una base, y en este caso se elige de un declive suave y uniforme. Entónces, ó se mantiene el decámetro horizontal colocando convenientemente las estacas, ó se determina, de la manera que dirémos al tratar de la nivelacion, el ángulo que la direccion elegida forma con su proyeccion, y despues de medida la base, segun el desarrollo del terreno, se reduce al horizonte. Sea $B\ C = B$ la linea medida segun el declive, (Fig. 5ª) $A\ B = b$ su proyeccian horizontal, y $A\ B\ C = a$ el ángulo de inclinacion. En el triángulo $A\ B\ C$, rectángulo en A, se tiene:

$$b = B \cos. a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Mas si el ángulo a es muy pequeño, como sucede ordinariamente, el cálculo de esta fórmula no dá b con toda la exactitud que se desea, por lo ménos usando los logaritmos comunes de siete decimales, * y es mucho mas conveniente calcular la diferencia x entre el desarrollo B y la proyeccion b, esto es:

$$x = B - b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Sustituyendo en esta última ecuacion el valor de b, se obtendrá:

$$x = B - B \cos. a = B\,(1 - \cos. a)$$

Pero en virtud de la relacion: $\cos. a = 1 - 2 \text{ sen.}^2 \tfrac{1}{2} a$, se cambiará esta ecuacion en: $x = 2\ B \text{ sen.}^2 \tfrac{1}{2} a$ y sustituyendo en la (1) resultará finalmente:

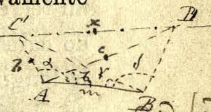
$$b = B - 2\ B \text{ sen.}^2 \tfrac{1}{2} a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Para el cálculo de esta fórmula bastan logaritmos de cinco cifras. Supongamos que la base del núm. 21º se haya medido en un terreno inclinado, formando con el horizonte un ángulo $a = 1° 31' 40''$, y tendrémos:

B = 2993ᵐ094....... log.... = 3.47612		$B =$	2993ᵐ094
log. 2.....	0.30103	$x =$	1. 064
$\tfrac{1}{2} a = 0° 45' 50''$...... log. sen.	8.12489	$b =$	2992ᵐ030
,, ,,	8.12489		
log. x.....	0.02693		

* Recordarémos que los *cosenos* de los ángulos muy pequeños varian con mucha lentitud, y es preferible entónces valerse de los *senos* ó *tangentes*.

24º Hay tambien casos en que se encuentra algun obstáculo en la direccion de la base que impide medir una parte de ella, tal como $C\,D$, (Fig. 6ª) y entónces se mide otra pequeña linea auxiliar...... $A\,B = m$, y los ángulos $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, que forman con $A\,B$ las visuales dirigidas á C y D. Hagamos para abreviar $A\,C = b$, $A\,D = c$, y $C\,D = x$. Los triángulos $C\,A\,B$ y $A\,D\,B$ dan respectivamente:



$$b = m\,\frac{\text{sen. }\gamma}{\text{sen. }(\alpha+\gamma)} \qquad\qquad c = m\,\frac{\text{sen. }\delta}{\text{sen. }(\beta+\delta)}$$

y el triángulo $C\,A\,D$ en el que se conocen dos lados b y c y el ángulo comprendido $= \alpha - \beta$, dará aplicándole las fórmulas usuales de la trigonometría: haciendo $\varphi = \frac12(D-C') = 90 - \varphi$

$$\tan.\,\phi = \frac{b+c}{b-c}\tan.\,\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta) \qquad\qquad x = (b-c)\,\frac{\cos.\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos.\,\phi}$$

Se pueden determinar igualmente los lados $B\,C$ y $B\,D$ para aplicar las últimas fórmulas al triángulo $C\,B\,D$, lo que proporciona comprobacion.

Esta resolucion, como se ve, es la misma que se emplea cuando se quiere calcular la distancia entre dos puntos inaccesibles.

25º Otras veces sucede que las localidades no permiten la medida directa de una base que tenga la longitud necesaria, bien por la naturaleza del terreno, ó bien porque se tenga interes en que sus extremos se encuentren en puntos determinados de antemano, ó en eminencias, con el objeto de descubrir desde ellas otros puntos importantes. Entónces puede resolverse el problema lo mismo que el anterior, suponiendo que $A\,B$ es la base que se mide, y $C\,D$ la que se desea conocer. Sin embargo, debo advertir que como en estos casos la linea medida es generalmente menor que la distancia incógnita, es difícil evitar que los ángulos observados sean muy agudos, circunstancia que, como verémos despues, conduce á resultados poco exactos.

26º Este mismo problema puede tambien resolverse así. Sea $C\,D$ (Fig 7ª) la base que se quiere adoptar y $A\,B$ la que se mide, y que designarémos igualmente por m. Conservando las anotaciones anteriores, los ángulos α, β, γ y δ tendrán la colocacion que indica la figura, y las fórmulas que dán los lados $A\,C = b$, y $A\,D = c$, serán absolutamente la smismas que en el caso anterior; pero atendiendo á

$\frac{b+c}{b-c} = \frac{\tan\frac12(D+C)}{\tan\frac12(D-C)} = \frac{\cot\frac12(D-C)}{\cot\frac12(D+C)}$ y como $\frac12(D+C) = \frac{180}{2} - \frac12(\alpha-\beta)$

$\frac{b+c}{b-c}\tan\frac12(\alpha-\beta) = \cot\frac12(D-C) = \tan\varphi$ haciendo $\varphi = 90^\circ - \frac12(D-C)$

$CD = x = \sqrt{b^2+c^2-2bc\cos(\alpha-\beta)}$ y como $\sin^2\frac12(\alpha-\beta)+\cos^2\frac12(\alpha-\beta) = 1$ y $\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\frac12(\alpha-\beta) - \sin^2\frac12(\alpha-\beta)$

$x = \sqrt{(b^2+c^2)(\sin^2\frac12(\alpha-\beta)+\cos^2\frac12(\alpha-\beta)) - 2bc(\cos^2\frac12(\alpha-\beta)-\sin^2\frac12(\alpha-\beta))}$

$x = \sqrt{(b-c)^2\cos^2\frac12(\alpha-\beta)+(b+c)^2\sin^2\frac12(\alpha-\beta)} = (b-c)\cos\frac12(\alpha-\beta)\sqrt{1+\frac{(b+c)^2}{(b-c)^2}\tan^2\frac12(\alpha-\beta)}$

y haciendo $\tan\varphi = \frac{b+c}{b-c}\tan\frac12(\alpha-\beta)$ $x = (b-c)\cos\frac12(\alpha-\beta)\sqrt{1+\tan^2\varphi} = (b-c)\ldots$

la situacion relativa de los ángulos α y β, las dos últimas ecuaciones del núm. 24º se cambiarán en:

$$\tan.\ \phi = \frac{b+c}{b-c}\tan.\ \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta) \qquad x = (b-c)\frac{\cos.\ \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos.\ \phi}$$

Presentemos un ejemplo de la aplicacion de estas fórmulas. En un terreno muy montañoso que tenia yo que triangular, no pudiendo hallar una extension plana para medir directamente una base de la longitud que la necesitaba, medí la linea cuyos elementos constan en el párrafo 22º y determiné la distancia entre las señales colocadas en dos cerros C y D, con los datos:

$A\ B = m = 2220^{m}61$	
$A\ C = b = 4902.83$	$\alpha = 55°\ 45'\ 6''$
$A\ D = c = 6763.72$	$\beta = 102\ \ 12\ \ 42$
$B\ C = e = 4088.34$	$\gamma = 97\ \ 34\ \ 13$
$B\ D = d = 7552.02$	$\delta = 61\ \ 5\ \ 12$

Apliquemos las fórmulas al triángulo $D\ A\ C$.

$b + c =$	11666.55..........	4.0669426	$\cos.\ \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$......	9.2813132
$b - c = -$	1860.89..........	—3.2697207—	....	3.2697207—
$\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = 78°\ 58'\ 54.''0$	tan....	0.7106064	$\cos.\ \phi$..........	—8.491~~9962~~— 9617
$\phi =$ ~~91 46 44 5~~ 88 13 15.9	tan....	1.507~~8049~~— 8283	x..........	4.059~~0051~~ 0722

$$C\ D = x = 11457^{m}0$$

La resolucion del triángulo $D\ B\ C$, para el que se tienen los datos necesarios, dá el mismo resultado.

Si se miden los ángulos que tienen su vértice en C y D podrá aplicarse el método del núm. 23, proyectando los lados $A\ D$ y $A\ C$, así como $B\ C$ y $B\ D$ sobre la distancia incógnita $C\ D$, por medio de las perpendiculares bajadas de los puntos A y B. En nuestro caso, se encontró:

$ACD = 12°47'22''$;	$CDA = 9°14'38''$	$BCD = 13°53'40''$;	$BDC = 7°27'5''$
b......... 3.6904465	c......... 3.8301858	e......... 3.6115470	d......... 3.8780634
cos. ACD 9.9890893	cos. CDA 9.9943231	cos. BCD 9.9871028	cos. BDC 9,9963169
$C\ O$...... 3.6795358	$D\ O$...... 3.8245089	$C\ P$...... 3.5986498	$D\ P$...... 3.8743803
$C\ O = 4781^{m}2$		$C\ P = 3968^{m}7$	
$D\ O = 6675.9$		$D\ P = 7488.2$	
$C\ D = 11457^{m}1$		$C\ D = 11456^{m}9$	

El término medio entre ambos resultados es precisamente 11457.m0 como ántes. Seria tambien fácil calcular $C\ Q$ y $Q\ D$, ó bien tratar separadamente cada uno de los triángulos $D\ B\ C$ y $D\ A\ C$ en los que se conocen dos lados y los tres ángulos. De todas estas resoluciones se elige la que sea mas breve, ó mas favorable al problema en cuestion.

27º Hay casos en que las bases se establecen á lo largo de las calzadas, ó en general, en lugares en que se dificulta la medida de una linea recta suficientemente extensa, y entónces se miden $A\ B$, $B\ C$ y el ángulo $A\ B\ C$ que forman (Fig. 8ª), con cuyos datos se aplica la resolucion del núm. 26. Pero si el ángulo B es muy obtuso, que es lo que por lo comun sucede, es preferible proceder de este modo. Designemos por A, B, C, los ángulos, y por a, b, c, los lados opuestos, con lo que tendrémos:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\ a\ c \cos. B$$

Llamando B' el suplemento de B, esta ecuacion se trasforma en:

$$b^2 = a^2 + c^2 + 2\ a\ c \cos. B'$$

Como por la hipótesis B' es pequeño, podrémos sustituir por cos. B' su desarrollo tomando solo los dos primeros términos $1 - \frac{1}{2} B'^2$ con lo que resulta:

$$b^2 = (a + c)^2 - a\ c\ B'^2 = (a + c)^2 \left(1 - \frac{a\ c\ B'^2}{(a + c)^2}\right)$$

Extrayendo la raiz y tomando dos términos de la serie solamente, se tiene:

$$b = a + c - \frac{a\ c\ B'^2}{2\ (a + c)}$$

y expresando á B' por su número de minutos se obtiene finalmente:

$$b = a + c - \frac{a\ c\ B'^2 \operatorname{sen.}^2 1'}{2\ (a + c)} \qquad \log. \frac{\operatorname{sen.}^2 1'}{2} = 2.6264222$$

Sean $a = 1937.^{m}49$; $c = 2124.^{m}35$; $B = 176°\ 27'\ 45''$ de donde $B' = 212.'25$.

log. a........	3.28724		
,, c..........	3.32723		
,, B'^2.......	4.65370		
,, sen.^{2} 1'..	2.92745	$a+c$..............	4061^{m}84
,, 0.5.......	9.69897	Correccion........	—1.93
	3.89459	b.................	4059^{m}91
,, $(a+c)$	—3.60872		
	0.28587		

28º En todos los casos que hemos considerado desde el número 24 hasta el 26 subsiste por lo comun el mismo inconveniente de que hablamos en el número 25, por lo que aconsejamos que se recurra á esta clase de procedimientos con la mayor moderacion, ó cuando sea absolutamente indispensable, procurando siempre servirse de ángulos que no sean muy agudos. En general debe tenerse presente que las condiciones que se han asentado en el número 12 son las que proporcionan los mejores resultados, especialmente si el terreno que se elige presenta un horizonte despejado que permita configurar á satisfaccion los primeros triángulos.

29º Aunque en teoría basta el conocimiento de un solo lado para calcular todos los de la cadena, como en la práctica es indudable que siempre se cometen pequeños errores, por mas exactos que sean los instrumentos y los métodos empleados, es preciso medir al fin de las operaciones otra base, distante de la primera lo mas que sea posible, la cual no solo sirve de comprobacion, sino que proporciona los medios de dividir los errores de la manera mas ventajosa, segun verémos en la parte relativa al cálculo de los triángulos.

30º Para concluir lo tocante á las bases, advertirémos que todo lo que se diga en la Geodesia con respecto á esta, como á las demas partes de la triangulacion, es tambien aplicable á la Topografía; pues aunque lo que se ha explicado es suficiente para los casos comunes, hay muchas veces necesidad de recurrir á métodos geodésicos en los vastos terrenos de la República cuando se desea proceder con toda exactitud.

CAPITULO III.

DE LA ELECCION DE LOS VÉRTICES.

31º Un reconocimiento previo del terreno, y el estudio detenido de las localidades dán mucha luz sobre la eleccion de los puntos que bien por su situacion en alturas, ó por su importancia como monumentos, edificios públicos, límites, &c., merezcan la atencion del ingeniero. No puedo ménos de recomendar estos reconocimientos, ejecutados, si es posible, con algun instrumento de fácil trasporte, y teniendo presentes todas las consideraciones de que trataré en este capítulo, persuadido dé que el tiempo que se emplea en ellos queda ampliamente recompensado con la seguridad de poderse trazar un plan fijo de operaciones, evitándose con él las vacilaciones consiguientes de trabajar al acaso, y por tanto con mucha ménos rapidez. Pero no basta estar convencido de la importancia de ciertos puntos bajo el aspecto que hemos considerado, sino que ademas es preciso ver si los triángulos establecidos en ellos satisfacen á las mejores condiciones para que los errores de observacion tengan la menor influencia posible en los resultados. Investiguemos, pues, cuáles son estas condiciones.

32º Para conseguirlo, supongamos que siendo A, B y C los ángulos de un triángulo, y a, b, c los lados opuestos sean α y β los pequeños errores cometidos al medir los ángulos A y B, y x el que resulta en el lado a en virtud de ellos. Supongámos tambien que b es la base medida ó un lado conocido por las resoluciones anteriores, cuyo valor consideraré por ahora como exacto, y consultemos al análisis sobre la forma que conviene dar al triángulo para que x sea el menor posible.

Tenemos que la ecuacion que dá el lado a si A y B fueran correctos, es:

$$a = b\,\frac{\text{sen. } A}{\text{sen. } B} \qquad\qquad (1)$$

Mas en virtud de los errores, se convertirá en esta otra:

$$a + x = b\frac{\text{sen.}\ (A + \alpha)}{\text{sen.}\ (B + \beta)} \text{..........................} (2)$$

Desarrollando tendrémos:

$$a \text{ sen. } B \cos.\ \beta + a \cos.\ B \text{ sen. } \beta + x \text{ sen. } B \cos.\ \beta + x \cos.\ B \text{ sen. } \beta$$
$$= b \text{ sen. } A \cos.\ \alpha + b \cos.\ A \text{ sen. } \alpha$$

Pero reflexionando que α y β son siempre muy pequeños, podrémos tomar los arcos por sus senos y la unidad por sus cosenos, y desechando ademas el producto $x\ \beta$, que es de segundo órden, resulta:

$$a \text{ sen. } B + a\beta \cos.\ B + x \text{ sen. } B = b \text{ sen. } A + \alpha b \cos.\ A$$

Abreviando con ayuda de la ecuacion (1), sustituyendo el valor de b sacado de la misma, y despejando se tiene:

$$x = a\ (\alpha \cot.\ A - \beta \cot.\ B)$$

Los pequeños errores α y β son siempre debidos á las mismas causas, tales como la imperfeccion de los instrumentos, de la vista del observador, &c., y por tanto son independientes del valor de los ángulos, de modo que pueden suponerse iguales, y entónces la fórmula anterior viene á ser:

$$x = a\ \alpha\ (\cot.\ A - \cot.\ B) \text{..................................} (3)$$

Este resultado indica que el error que resulta en el lado a será tanto menor cuanto ménos difieran A y B y llegará á ser nulo cuando $A = B$. De la misma manera, el error y del tercer lado c tendria por expresion:

$$y = c\ \alpha\ (\cot.\ C - \cot.\ B)$$

y seria $= 0$, si $C = B$. De modo que la condicion mas ventajosa se tiene cuando $A = B = C$, ó lo que es lo mismo, cuando el triángulo es equilátero.

En el cálculo que precede hemos supuesto que α y β son del mismo signo. Analicemos el caso contrario, suponiendo que β se convierte en $-\beta$, y la ecuacion (2) será:

$$a + x = b \frac{\text{sen.}\ (A + \alpha)}{\text{sen.}\ (B - \beta)}$$

Haciendo en esta última las mismas consideraciones que anteriormente, llegarémos á obtener:

$$x = a.\alpha\ (\text{cot.}\ A + \text{cot.}\ B)$$

Sustituyendo en lugar de las cotangentes sus equivalentes $\frac{\text{cos.}}{\text{sen.}}$, se tendrá despues de reducir al mismo denominador:

$$x = a.\alpha \frac{\text{sen.}\ (A + B)}{\text{sen.}\ A\ \text{sen.}\ B} = a.\alpha \frac{\text{sen.}\ C}{\text{sen.}\ A\ \text{sen.}\ B}$$

Si restamos la fórmula que dá cos. $(A + B)$, de la que dá...... cos. $(A - B)$ obtendrémos:

$$\text{sen.}\ A\ \text{sen.}\ B = \frac{\text{cos.}\ (A - B) - \text{cos.}\ (A + B)}{2}$$

y sustituyendo en la anterior, resulta:

$$x = a.\alpha \frac{2\ \text{sen.}\ C}{\text{cos.}\ (A - B) + \text{cos.}\ C} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Por esta expresion se ve igualmente que el factor de $a.\alpha$ será tanto mas pequeño, cuanto ménos difieran A y B, y el caso mas favorable se tiene cuando $A = B$. El valor de y seria:

$$y = c.\alpha \frac{2\ \text{sen.}\ A}{\text{cos.}\ (B - C) + \text{cos.}\ A}$$

el cual llegaria á su *mínimum* cuando $B = C$

Ambas hipótesis nos han conducido, pues, á admitir como principio, que *en la triangulacion, la forma equilátera es la mas favorable para disminuir el efecto de los errores angulares.*

33º A la verdad, este precepto no es aplicable extrictamente en la práctica, aunque debe procurarse en cuanto sea posible acercarse á su cumplimiento, evitando el uso de ángulos muy agudos: en las operaciones delicadas se desechan, por lo comun, los ángulos menores que 30° y mayores que ~~150°~~ 120°. A pesar de esto, como en general un punto queda mejor situado por triangulacion que de cualquiera otra manera, especialmente cuando sirve de vértice á varios triángulos, creo que sin perder de vista el principio enunciado, puede el ingeniero, en algunos casos excepcionales, valerse de ángulos agudos.

34º Busquemos ahora el error que resulta en uno de los lados, originado por el que se supone cometido en b que sirve de base para el cálculo, y el que llamarémos δ suponiendo los ángulos exactos. La ecuacion (1) se convertirá en:

$$a + z = (b + \delta)\frac{\text{sen. } A}{\text{sen. } B}$$

Haciendo la multiplicacion y reduciendo, se encuentra:

$$z = \delta\frac{\text{sen. } A}{\text{sen. } B}$$

El ángulo B es el opuesto á la base b, y si es muy agudo ó muy obtuso el multiplicador de δ será mayor que la unidad y de consiguiente $z > \delta$. *

Cuando B = 90 z es el mínimo é inferior á δ

* Aunque este principio se comprende fácilmente, como es de una grande importancia en la práctica, me parece oportuno darle mas desarrollo.

Si una variable y depende de un coeficiente a y de otra variable x, cuyo valor se deduce de la observacion, y en el que se comete un error $d\,x$, el error que resulta para y será mayor ó menor que $d\,x$ segun que a sea mayor ó menor que la unidad.

En efecto, el enlace de estas tres cantidades puede representarse por la ecuacion:

$$y = a\,x$$

Diferenciando se tendrá: $d\,y = a\,d\,x$. Hagamos la constante $a = 1 + m$, y sustituyendo en la diferencial y trasportando, se obtendrá:

$$d\,y - d\,x = m\,d\,x$$

El signo de $d\,y - d\,x$ dependerá del de m. Si m es positivo en cuyo caso $a > 1$, se tendrá: $d\,y > d\,x$

Si m es negativo en cuyo caso $a < 1$, se tendrá: $d\,y < d\,x$

Luego cuando a es una fraccion, el error de la variable dependiente y es *menor* que el que se comete en la variable independiente x.

Supongamos, por ejemplo, que se quiera determinar una distancia contando el número de segundos que trascurren entre las percepciones de la luz y de la detonacion que produce un cañonazo, sabiendo que el sonido recorre un espacio de 341^{m} próximamente por segundo. Nuestra ecuacion aplicada á este caso seria $y = 341\,x$, y si quisiéramos valuar el error que puede cometerse, tendriamos: $d\,y = 341\,d\,x$ En esta ecuacion $d\,x$ representa el error cometido en la valuacion del tiempo, y para esto son tan limitados nuestros medios de observacion, que ape-

Para no salir de los límites, supongamos $B = 30°$, y entónces el valor medio de A y C será:

$$\frac{150°}{2} = 75°$$

Haciendo las sustituciones, el coeficiente de δ resulta:

$$\frac{\text{sen. } 75°}{\text{sen. } 30°} = 1.9$$

lo que indica que el error z viene á ser casi doble de δ.

---

nas puede responderse de la apreciacion de $0^s 2$, y así es que considerando á esta pequeña cantidad como el error *posible* de observacion, resultará:

$$d\,y = 341^m \times 0.2 = 68^m 2$$

Así, pues, habria una incertidumbre de $68^m 2$ en la distancia, y seria necesario repetir las pruebas multitud de veces para llegar á un resultado medianamente aproximado, pudiendo asegurar que jamas se conoceria la distancia con precision.

Si por el contrario, se desea saber el número de segundos que emplea el sonido en recorrer una distancia dada, se tendrá: $y = \frac{1}{341}\,x$, y aun suponiendo un gran error tal como de 20^m en la apreciacion de la distancia, el que resultaria para y seria solo: $d\,y = \frac{1}{341} \times 20 = 0^s 059$, cantidad casi inapreciable.

El método de *aproximaciones sucesivas*, tan usado especialmente en los cálculos astronómicos, para corregir una cantidad que se conoce aproximativamente, se deriva inmediatamente del principio que acado de demostrar.

Sea, en efecto, L la magnitud que se busca, l su valor aproximativo, y designemos por y la correccion que se desea encontrar, de manera que se tenga:

$$L = l + y$$

Mas si al investigar el valor de y, se halla que esta cantidad es precisamente una funcion de la incógnita L, que en general podemos representar por $y = a\,L$, es claro que, en todo rigor, esta correccion no deberia emplearse, puesto que es indeterminada por contener la incógnita: mas si el coeficiente a es pequeño, no hay inconveniente en la práctica, en sustituir el valor aproximativo en lugar del valor real, esto es, tomar $y = a\,l$. Si esta correccion fuese muy pequeña, la sustitucion no alteraria su verdadero valor, ó por lo ménos el error resultante seria del todo despreciable; mas admitamos que introducida en la ecuacion de arriba, diese una cantidad L' diferente de L, aunque mas aproximada que l: en tal caso repetiriamos el cálculo de y usando el nuevo valor encontrado, esto es: $y = a\,L'$, y proseguiriamos así, hasta que resultara para L, una cantidad igual á la última que se habia empleado en el cálculo de la correccion. En los problemas de la astronomía práctica, esta clase de correcciones son siempre muy pequeñas, de manera que por lo comun, basta la primera aproximacion, ó á lo mas, la segunda, para obtener el resultado que se desea.

No deben perderse de vista estas consideraciones, siempre que se proponga alguna nueva fórmula ó procedimiento para deducir por medio de ciertos datos, el

Este resultado recomienda de nuevo el medir las bases con extremo cuidado, á fin de que δ tenga el menor valor posible, y darles una extension poco diferente de los demas lados, con el objeto de que no se aumenten los errores de observacion.

35º La longitud de los lados de una cadena primaria ó fundamental, depende tanto de la extension de terreno que abrazan las operaciones y del alcance de los anteojos de los instrumentos, como de los errores que necesariamente resultan en los mismos lados á consecuencia de los que puedan cometerse en la medida de los ángulos. Estableciendo una relacion entre los elementos de los triángulos

---

valor de una incógnita. Un ejemplo hará conocer la importancia práctica del método de aproximaciones sucesivas.

Supongamos que no se conociera medio alguno sencillo y directo para extraer la raiz cuadrada de un número N, que supondré compuesto de dos factores a y b, ó lo que es lo mismo: $N = a\,b$. Sea x la raiz incógnita, y puesto que en un producto cualquiera la suma de los factores es tanto menor cuanto mas se acercan estos á ser iguales, inferimos que x debe ser menor que $\frac{1}{2}(a+b)$. Llamemos u la diferencia, y tendrémos la ecuacion de condicion:

$$x = \sqrt{a\,b} = \tfrac{1}{2}(a+b) - u$$

que elevada al cuadrado, desarrollada y reducida, produce:

$$4\,(a+b)\,u - 4\,u^2 = (a-b)^2$$

En lugar de resolver esta ecuacion de segundo grado, notemos que si se escogen los factores a y b de modo que su diferencia sea pequeña respecto de su suma, el valor de u será muy poco considerable, y con mas razon lo será su segunda potencia. La ecuacion anterior dá:

$$u = \frac{(a-b)^2}{4\,(a+b)} + \frac{u^2}{a+b} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

y en el supuesto de ser a y b muy poco diferentes, el segundo término puede omitirse por muy pequeño, y el primero dará la primera aproximacion u', á saber:

$$u' = \frac{(a-b)^2}{4\,(a+b)}$$

Poniendo este valor aproximativo en el término que contiene u^2, se obtendrá la segunda aproximacion:

$$u'' = \frac{(a-b)^2}{4\,(a+b)} + \frac{(a-b)^4}{16\,(a+b)^3}$$

Este nuevo valor, mas exacto que el primero, puede sustituirse por u^2 en la ecuacion (A), con lo que se obtendrá la tercera aproximacion:

$$u''' = \frac{(a-b)^2}{4\,(a+b)} + \frac{(a-b)^4}{16\,(a+b)^3} + \frac{(a-b)^6}{32\,(a+b)^5} + \frac{(a-b)^8}{256\,(a+b)^7}$$

y los errores que los afecten en los casos mas desfavorables, y poniendo por condicion que estos errores no sean apreciables en la escala que se adopte para construir el plano, nos será fácil determinar con bastante aproximacion el mayor valor que puede darse á los lados para diversos errores angulares y empleando distintas escalas, sin temer diferencias notables en las circunstancias ordinarias.

La ecuacion (4) del número 32 es muy propia para el problema que nos ocupa; pero tratándose de fijar un límite á la magnitud de las distancias entre los vértices, preferiré establecer esta relacion

---

Prosiguiendo así, puede llevarse la aproximacion hasta donde se quiera; pero como es evidente que el calculador es dueño de elegir los factores muy poco diferentes, la serie anterior será muy convergente, y entónces bastarán uno ó dos términos para obtener la raiz exacta hasta la tercera ó la cuarta decimal. Por la sustitucion se obtendrá:

$$\sqrt{ab} = \tfrac{1}{2}(a+b) - \frac{(a-b)^2}{4(a+b)} - \frac{(a-b)^4}{16(a+b)^3} - \&c. \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

Propongámonos, por ejemplo, extraer la raiz del número 8200, descomponiéndolo en los factores: $a = 100$ y $b = 82$. Tendrémos $a + b = 182$; $a - b = 18$.

$$x = 91 - \tfrac{324}{728} - \tfrac{104976}{964570 88} = 90.5539$$

Este resultado es sensiblemente exacto no obstante la diferencia considerable de los factores, que hizo necesario el cálculo del tercer término de la fórmula (B) para llevar la aproximacion hasta la cuarta decimal. Tomemos por nuevo factor $a = 91$, de donde resulta $b = 90.11$, y tendrémos:

$$\begin{array}{rl} a = & 91.00 \\ b = & 90.11 \\ \hline a + b = & 181.11 \\ a - b = & 0.89 \end{array} \qquad x = 90.555 - \tfrac{0.7921}{724.44} - \tfrac{0.6174}{95048939.23}$$

La eleccion de los factores ha sido tal, que el último término no llega á *un cienmillonésimo*, y los dos primeros darán: $x = 90.5539$ como ántes.

En resúmen, eligiendo convenientemente los factores, puede decirse que *la raiz cuadrada de un número compuesto de dos factores muy poco diferentes, es igual al término medio aritmético de los factores, ménos el cuadrado de su diferencia dividido por el cuádruplo de su suma.*

La eleccion misma de los factores se facilita por la aplicacion de los primeros términos de la fórmula (B), y se evitan tentativas inútiles, y á veces laboriosas, cuando el número dado es muy grande. Extraigamos, por ejemplo, la raiz de 6377397 aproximada hasta la cuarta decimal. A primera vista se nota que los factores convenientes deben ser poco mayores que 2500, puesto que $(2500)^2 = 6250000$. Tomemos, pues, 2500 por uno de los factores, y el otro será $\frac{6377397}{2500} = 2551$ próximamente. Tendrémos:

analizando el caso mas desventajoso, para lo cual es necesario entrar en algunas consideraciones.

Como en cada triángulo se conoce un lado por lo ménos, ya sea medido directamente, ó ya por el cálculo de los que preceden, no seria necesario, en rigor, mas que medir dos de sus ángulos con lo que se tiene lo bastante para determinar sus otros elementos. Sin embargo de esto, se toman siempre los tres ángulos, tanto por comprobacion, cuanto para distribuir el error final entre todos por partes iguales, fundados, segun hemos dicho, en que los errores angulares, debidos siempre á las mismas causas, son independientes de la amplitud de los ángulos. Segun esto, la diferencia que existe entre 180° y la suma de los ángulos medidos, se considera como la suma algebráica de los errores de observacion, y su tercera parte se aplica á cada uno con el signo que corresponda, para reducirlos á valer exactamente 180°. Esta manera de corregir los ángulos es ciertamente la mas razonable; pero no carece de arbitrariedad, pues es claro que no conociendo mas que el error total, no se tiene dato alguno sobre el signo del que afecta á cada ángulo individualmente, quiere decir, si aumenta ó disminuye su verdadero valor, y muy

---

$$\begin{aligned} a &= 2551 \\ b &= 2500 \\ \hline a + b &= 5051 \\ a - b &= 51 \end{aligned} \qquad x = 2525.5 - \frac{2601}{20204}$$

Sin necesidad de ejecutar la operacion, vemos que el segundo término solo haria variar la parte decimal del primero, de donde inferimos que la parte entera de este debe acercarse mucho á la raiz que se busca, y así tomarémos 2525 por uno de los factores. El otro resultará de 2525.7018 y se tiene:

$$\begin{aligned} a &= 2525.7018 \\ b &= 2525.0000 \\ \hline a + b &= 5050.7018 \\ a - b &= 0.7018 \end{aligned} \qquad x = 2525.3509 - \frac{0.49}{20202.8}$$

y como el último término solo influirá en la quinta decimal, deducimos que la raiz del número propuesto es 2525.3509 exacta hasta la cuarta decimal.

Estos ejemplos manifiestan la inmensa utilidad del método de aproximaciones, que muchas veces conduce á resoluciones mas breves que los procedimientos directos y tan exactos como se quiera. La extraccion de una raiz reducida á una simple cuestion de division, ha dado en el último ejemplo y con la mayor facilidad, un resultado acaso mas exacto que el que se hubiera obtenido aun por medio de los logaritmos comunes de siete cifras decimales.

bien puede suceder que despues de hecha la correccion, queden los ángulos mas erróneos de lo que estaban ántes.

Admitiendo siempre la hipótesis de que los errores de observacion sean numéricamente iguales, y designándolos por e, siendo A, B y C los verdaderos valores de los ángulos, consideremos los casos que pueden presentarse.

I. Si todos los errores tienen el mismo signo, los ángulos observados serán respectivamente: $(A \pm e)$, $(B \pm e)$ y $(C \pm e)$; de modo que designando por s la diferencia final, se tiene:.................. $s = 180° - (A + B + C \pm 3\,e) = \mp 3\,e$. La tercera parte de esta cantidad añadida á cada ángulo, reproduce los verdaderos valores; de consiguiente, este caso es el mas favorable.

II. Pero puede suceder que e sea de un signo en uno de los ángulos, y de signo contrario en los otros dos, y entónces los observados serán: $(A \pm e)$, $(B \mp e)$ y $(C \mp e)$, de donde resulta:.......... $s = 180° - (A + B + C \mp e) = \pm e$. Distribuyendo por tercios el error total, los valores adoptados vendrán á ser: $(A \pm \frac{4}{3}\,e)$, $(B \mp \frac{2}{3}\,e)$ y $(C \mp \frac{2}{3}\,e)$, lo que indica que en este caso, que es el mas desventajoso, el error de uno de los ángulos definitivos es numéricamente doble del de los otros, y de signo contrario.

36º Es ciertamente posible, aunque muy poco probable, que todos los ángulos de una cadena resulten incorrectos del modo que hemos visto en este último caso; pero aun cuando así sea, como el ángulo que lleva el mayor error, puede ser unas veces el opuesto, y otras alguno de los adyacentes al lado que se vaya á calcular, habrá fundamento para esperar, si no la entera compensacion, por lo ménos una diminucion notable en los errores de los lados, de tal suerte que no se altere sensiblemente su valor. Pero admitamos todavía, lo cual es ya extremadamente improbable, que el ángulo mas incorrecto de cada triángulo sea el opuesto al lado que debe servir de base para calcular el que sigue, de manera que el efecto de los errores sea constantemente el de aumentar ó disminuir las distancias, y en esta hipótesis busquemos la relacion que existe, despues de un número cualquiera de triángulos, entre sus elementos y sus errores.

Llamemos a la base medida, a_1, a_2...... a_n los lados que van sirviendo de bases para calcular los n triángulos de una cadena (Figura 9ª) A_1, A_2...... A_n los ángulos opuestos, y B_1, B_2...... B_n

los adyacentes á los lados ó bases en el 1°, 2°,...... n° triángulos respectivamente, suponiendo que todos estos ángulos son los adoptados definitivamente despues de hecha la correccion, y propongámonos investigar cuál es el error x_n que resulta en el último lado cuando se ha cometido uno de $\pm \frac{2}{3}\, e$ segundos en A_1, A_2 &c. y de $\mp \frac{4}{3}\, e$ en B_1, B_2 &c.

La resolucion de los triángulos dá:

$$a_1 = a \frac{\text{sen. } B_1}{\text{sen. } A_1} \qquad a_2 = a_1 \frac{\text{sen. } B_2}{\text{sen. } A_2} \qquad a_3 = a_2 \frac{\text{sen. } B_3}{\text{sen. } A_3}$$

Sustituyendo en la última el valor de a_2 y en este el de a_1 se obtiene:

$$a_3 = a \frac{\text{sen. } B_1 \text{ sen. } B_2 \text{ sen. } B_3}{\text{sen. } A_1 \text{ sen. } A_2 \text{ sen. } A_3}$$

Prosiguiendo así, el último lado tendrá por expresion:

$$a_n = a \frac{\text{sen. } B_1 \text{ sen. } B_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ sen. } B_n}{\text{sen. } A_1 \text{ sen. } A_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ sen. } A_n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Como suponemos que los ángulos incluyen los errores, este valor que es el que resulta del cálculo, contiene x_n, de modo que el lado correcto será:

$$a_n \pm x_n = a \frac{\text{sen. } (B_1 \pm \frac{4}{3} e) \text{ sen. } (B_2 \pm \frac{4}{3} e) \ldots\ldots\ldots \text{ sen. } (B_n \pm \frac{4}{3} e)}{\text{sen. } (A_1 \mp \frac{2}{3} e) \text{ sen. } (A_2 \mp \frac{2}{3} e) \ldots\ldots\ldots \text{ sen. } (A_n \mp \frac{2}{3} e)}$$

en el cual he tomado para e el término medio de las diferencias que resultan en cada triángulo, respecto de 180°.

Tomando los logaritmos de esta ecuacion y representando por α_1, α_2 .... α_n y β_1, β_2 .... β_n para los ángulos A y B respectivamente, las diferencias logarítmicas por 1″ tales como se encuentran en las tablas de los senos, se obtendrá fácilmente: *

$$\log a_n + \log\left(1 \pm \frac{x_n}{a_n}\right) = \log a + \begin{bmatrix} \log \text{sen } B_1 + \log \text{sen } B_2 \ldots\ldots + \log \text{sen } B_n \\ -\log \text{sen } A_1 - \log \text{sen } A_2 \ldots\ldots - \log \text{sen } A_n \end{bmatrix}$$

$$\pm \tfrac{2}{3} e \begin{bmatrix} 2(\beta_1 + \beta_2 \ldots\ldots\ldots + \beta_n) \\ + \alpha_1 + \alpha_2 \ldots\ldots\ldots + \alpha_n \end{bmatrix} \qquad \times\times$$

* $\log.\text{sen}(B \pm \frac{4}{3} e) = \log.\text{sen}\, B \pm \beta \frac{4}{3} e$

×× Debe advertirse que e es diferente para cada triangulo, pero el autor toma para e el promedio de todos para sus trasform.s Conservando á e su verdadero valor en cada triang. seria:

$$a_n + x_n = a \frac{\text{sen}(B_1 \pm \frac{4}{3} e_1)\ \text{sen}(B_2 \pm \frac{4}{3} e_2) \ldots \text{sen}(B_n \pm \frac{4}{3} e_n)}{\text{sen}(A_1 \mp \frac{2}{3} e_1)\ \text{sen}(A_2 \mp \frac{2}{3} e_2) \ldots \text{sen}(A_n \mp \frac{2}{3} e_n)}$$ Y haciendo las mis-

mas consideramos que el autor:

$$\log a_n + \log\left(1 \pm \frac{x_n}{a_n}\right) = \log a + \begin{bmatrix} \log \operatorname{sen} B_1 + \log \operatorname{sen} B_2 \ldots\ldots + \log \operatorname{sen} B_n \\ - \log \operatorname{sen} A_1 - \log \operatorname{sen} A_2 \ldots - \log \operatorname{sen} A_n \end{bmatrix}$$

$$\pm \frac{2}{3}\left((2\beta_1+\alpha_1)e_1 + (2\beta_2+\alpha_2)e_2 \ldots + (2\beta_n+\alpha_n)e_n\right)$$ y así continuaríamos; pero como se trata de fijar un límite á los tamaños de los lados, de una manera gral, y e no excede de cierto límite debemos seguir el procedim.to del autor — En justicia cada e debería tomarse teniendo en cuenta el exceso esférico.

Si la ecuacion (1) se expresa tambien bajo la forma logarítmica, y se combina con la anterior, resulta:

$$\log.\left(1 \pm \frac{x_n}{a_n}\right) = \pm \tfrac{2}{3}\, e \begin{pmatrix} 2\,(\beta_1 + \beta_2 \ldots\ldots\ldots + \beta_n) \\ + a_1 + a_2 \ldots\ldots\ldots + a_n \end{pmatrix} \ast$$

Desarrollando el binomio logarítmico hasta el segundo término solamente, puesto que $\frac{x_n}{a_n}$ es siempre muy pequeño, se tendrá por último, representando por M el módulo 0.4342945....... de las tablas:

$$M\frac{x_n}{a_n} = \tfrac{2}{3}\, e \begin{pmatrix} 2\,(\beta_1 + \beta_2 \ldots\ldots\ldots + \beta_n) \\ + a_1 + a_2 \ldots\ldots\ldots + a_n \end{pmatrix}$$

Como los logaritmos de que se hace uso comunmente tienen siete decimales, los valores de $\beta_1, \beta_2, a_1, a_2$, &c., deben expresar *diez millonésimos*, de suerte que dividiendo el segundo miembro por......... 10 000 000, se tiene despues de hechas las operaciones: ∗∗

$$\frac{x_n}{a_n} = 0.00000015\, e \begin{pmatrix} 2\,(\beta_1 + \beta_2 \ldots\ldots\ldots + \beta_n) \\ + a_1 + a_2 \ldots\ldots\ldots + a_n \end{pmatrix} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

que es la relacion buscada para calcular el error x_n de un lado cualquiera en la hipótesis mas desfavorable.

He tratado la cuestion en general, porque siempre es conveniente formarse una idea del error final que puede cometerse en una operacion; pero siendo mi principal objeto asignar un límite á la magnitud de un triángulo para que sus lados calculados no presenten en el plano diferencia apreciable respecto de sus valores exactos, supondré $n = 1$, y si admitimos ademas que el triángulo sea equilátero, tendrémos que las diferencias logarítmicas serán iguales entre sí, esto es $\alpha = \beta$ y su valor medio de 12.15. Entónces nuestra fórmula se convierte en:

$$a_1 = \frac{x_1}{0.00000547\, e} = 182\,815\,\frac{x_1}{e} \text{ en número entero}$$

ó con la aproximacion necesaria para el caso, en esta otra:

$$a_1 = 180000\,\frac{x_1}{e} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Vamos á establecer ahora la condicion de que x_1 sea inapreciable en el plano.

∗ (Algebra de Bourdon, 10.a edicion n.o 224) La expresion general de la serie que dá el logaritmo de la unidad mas una cantidad cualquiera x es $\log.(1+x) = A\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \cdots\right)$ El número A es el módulo cuyo valor particular caracteriza el sistema de logaritmos que se quiere considerar.

∗∗ Por estas mismas razones, no debe olvidarse que al aplicar la fórmula las diferencias que dan las tablas para α y β, se introduciran como # números enteros

37º Se llama *escala* la relacion que existe entre las lineas del plano y las que estas representan sobre el terreno, y así se dice que un plano está construido en la escala de *uno á diez mil*, ó de $\frac{1}{10000}$, cuando 10000 metros ú otras unidades cualesquiera del terreno, están representadas por una en el papel. Generalmente se acostumbra á designar las escalas por fracciones cuyo numerador es la unidad y cuyos denominadores indican el número de unidades del terreno que equivalen á una sobre el plano. Es claro que esta relacion nos permite determinar la longitud que debe tener una linea en el papel cuando se conoce su valor en el terreno: por ejemplo, en la escala de $\frac{1}{15000}$ quiere saberse cuál debe ser el tamaño de una linea que representa una distancia de 4780^{m}. Se pondrá esta proporcion:

$$15000 : 1 :: 4780 : y = \frac{478}{1500} = 0^{m}3187$$

Si, por el contrario, se ha medido en el plano una linea de $0^{m}672$ y se quiere saber cuánto representa, en la escala de $\frac{1}{20000}$, se tendrá:

$$1 : 20000 :: 0^{m}672 : y = 20000 \times 0^{m}672 = 13440 \text{ metros.}$$

Segun esto, es fácil comprender que una misma longitud l se representa en el plano por una recta tanto mas pequeña cuanto menor es la escala, y para cada escala habrá ciertas distancias que sean absolutamente inapreciables en el plano: por ejemplo, una extension de 5^{m} se representa por $0^{m}001$ en la escala de $\frac{1}{5000}$; por $0^{m}0005$ en la de $\frac{1}{10000}$; y por $0^{m}000125$ en la de $\frac{1}{40000}$. En los dos primeros casos los 5^{m} pueden apreciarse perfectámente, pero en el último son del todo insensibles perdiéndose en el pequeño espesor de las lineas mas finas que puedan trazarse con los instrumentos mas delicados. En el papel se estima cómodamente la tercera, y con bastante aproximacion la cuarta parte de un milímetro; pero es casi imposible responder de su quinta parte ó de $0^{m}0002$, que es la cantidad que se considera como *el límite de la extension apreciable*. A pesar de esto, tomarémos como límite la mitad de esta cantidad ó $0^{m}0001$ (un diezmilímetro); y como este número equivale á una longitud tanto mayor cuanto menor es la escala, resulta que á cada valor de esta, corresponderá cierta extension que no puede figurar sobre el papel.

38º Volviendo al asunto que nos ocupa, establecerémos la condicion de que el error x_1 corresponda á esta pequeñísima fraccion, designando por $\frac{1}{r}$ la escala que se ha creido conveniente adoptar para la construccion, y entónces se tendrá esta proporcion: si una en el plano equivale á r unidades sobre el terreno, la fraccion $0^{m}0001$ equivaldrá á x_1; de la que se obtiene: $x_1 = 0^{m}0001 \times r$. Sustituyendo este valor en la ecuacion (3) tendrémos:

$$a_1 = 18\,\frac{r}{e} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

que es la que dá el mayor valor de los lados en funcion de la escala y de los errores angulares: como la hemos deducido de la suposicion mas desventajosa, estarémos seguros de que no será posible apreciar en el plano las diferencias aun en el caso de que nuestra hipótesis llegue á verificarse. La cantidad e que principalmente depende del instrumento que debe usarse, se puede determinar experimentalmente tomando varias veces los tres ángulos de un triángulo, de la manera que enseñarémos en el lugar correspondiente, y comparando la suma de ellos con 180°. La diferencia e que se encuentre será el error medio posible de un triángulo. En cuanto á la escala, se fija por la extension del terreno comparada con la que se quiere dar al plano.

no me parece conveniente, sino tomar de la tabla de la aproximacion como maximo de error angular

Para aplicar nuestra fórmula, supongamos que se haya adoptado la escala de $\frac{1}{20000}$, y que midiendo los tres ángulos de un triángulo, se haya encontrado en término medio $s = 179°\ 59'\ 45''$. Se tendrá: $r = 20000$ y $e = 15''$. La máxima longitud es por consiguiente:

En cuanto a la escala se fija por el objeto principalmente

$$a_1 = \frac{18 \times 20000}{15} = 24000 \text{ metros.}$$

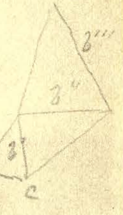
De este modo he calculado la siguiente tabla para las diversas escalas de la primera columna, que son las mas usadas, y para diferentes valores de e desde $1'$ hasta $10''$. La última columna contiene los distintos valores de x_1 en el terreno, que equivalen á $0^{m}0001$ en el plano.

TABLA DE LA MAYOR LONGITUD DE LOS LADOS.							
ESCALA $=\frac{1}{r}$	$10''$	$20''$	$30''$	$40''$	$50''$	$60''$	x_1
$\frac{1}{5000}$	9000^m	4500^m	3000^m	2250^m	1800^m	1500^m	0^{m}5
$\frac{1}{10000}$	18000	9000	6000	4500	3600	3000	1.0
$\frac{1}{15000}$	27000	13500	9000	6750	5400	4500	1.5
$\frac{1}{20000}$	36000	18000	12000	9000	7200	6000	2.0
$\frac{1}{25000}$	45000	22500	15000	11250	9000	7500	2.5
$\frac{1}{30000}$	54000	27000	18000	13500	10800	9000	3.0
$\frac{1}{35000}$	63000	31500	21000	15750	12600	10500	3.5
$\frac{1}{40000}$	72000	36000	24000	18000	14400	12000	4.0
$\frac{1}{45000}$	81000	40500	27000	20250	16200	13500	4.5
$\frac{1}{50000}$	90000	45000	30000	22500	18000	15000	5.0

Repito que los números de esta tabla no deben considerarse mas que como el límite que jamas será prudente traspasar; porque es claro que aunque no sean perceptibles los errores de los primeros lados, siempre influyen en la posicion de los vértices, y pueden ocasionar en los últimos diferencias sensibles, especialmente cuando el número de los triángulos es considerable. Tambien debemos advertir que para fijar la extension de los lados se atiende siempre al poder de los anteojos: los de los instrumentos comunes que se usan en la Topografía alcanzan con bastante claridad hasta quince ó veinte mil metros, y por otra parte, cuando los triángulos adquieren mayores dimensiones entran ya en el dominio de la Geodesia, y si se quiere proceder con exactitud, deben guiarse las operaciones segun los métodos que prescribe esta ciencia.

39º Cuando sucede que porque no se encuentre terreno á propósito, ó por cualquiera otra circunstancia, la base medida sea notablemente menor que la extension media que se ha juzgado conveniente adoptar para los lados de la cadena, en virtud de las consideraciones que preceden, se hacen crecer lentamente las distancias procurando formar triángulos isósceles hasta que adquieran las dimensiones que se desea. Estableceré con este motivo una fórmula que puede ser útil en muchos casos para regular el incremento de los lados.

Sea $A\ B = b$, la base, (fig. 10ª) y designemos por b', b''...... b_n los lados del primero, segundo, &c., triángulos que supondrémos isósceles y semejantes, siendo el último lado b_n el que representa la longitud que se ha adoptado, y A los ángulos iguales adyacentes á b, b', b'', &c. Si desde el ángulo opuesto á b se considera bajada una perpendicular á este lado, los triángulos rectángulos que resultan darán:



$$b' = \frac{0.5\ b}{\cos.\ A}$$

Haciendo la misma operacion en los otros triángulos, se tiene:

$$b'' = \frac{0.5\ b'}{\cos.\ A}; \qquad b''' = \frac{0.5\ b''}{\cos.\ A} : \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ b_n = \frac{0.5\ b_{n-1}}{\cos.\ A}$$

Sustituyendo en la última ecuacion los valores de todas las que preceden, se obtendrá sin dificultad:

$$b_n = b\,\frac{(0.5)^n}{\cos.^n A}$$

de la que resulta:

$$\cos.\ A = 0.5\ \sqrt[n]{\frac{b}{b_n}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Supongamos que habiendo medido una base de 2500ᵐ se quiera saber el valor que se debe dar á los ángulos adyacentes á las bases para que á los 4 triángulos adquieran los lados una longitud media de 8000ᵐ.

$b = 2500$	log......	3.39794	+4. 3.39794
$b_n = 8000$	,, ...	—3.90309	−3.90309
			3.49485
$n = 4$		9.49485	$\sqrt[4]{}$ 0.87371
			−1.
	,, $\sqrt[4]{}$	9.87371	9.87371
	,, 0.5	9.69897	que es = $\bar{1}$.87371
$A = 68°\ 3'$	,, cos. A....	9.57268	

aumentando 4 á la característica del logaritmo $\bar{1}$.49485, queda 3.49485, y al tomar la cuarta parte solo quitamos 1 para que no se altere el cociente.

Será necesario, pues, que los ángulos iguales de cada triángulo sean de cosa de 68°.

Si se desea saber despues de qué número de triángulos llegarán los lados á 10000^m siendo la base de 3000^m, y en el supuesto de que los ángulos adyacentes sean de 67°, se despejará á n tomando los logaritmos en la ecuacion (1), con lo que resulta:

$$n = \frac{\log. \frac{b_n}{b}}{\log. \frac{0.5}{\cos. A}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

log. b_n	4.00000	log. 0.5..........	9.69897	
„ b..........	—3.47712	„ cos. A........	—9.59188	$n = \frac{523}{107} = 5$
„ $\frac{b_n}{b}$........	0.52288	„ $\frac{0.5}{\cos. A}$........	0.10709	

40º Todo lo que se ha dicho con respecto á las triangulaciones fundamentales, se aplica tambien á las cadenas secundarias, aunque teniendo presente que como éstas son de menor importancia, no es necesario ser tan estricto en el cumplimiento de las reglas que preceden; así es que en los últimos triángulos cuyos lados son ya muy pequeños, se omite á veces la observacion del tercer ángulo, el cual se deduce restando de 180° la suma de los dos observados. Con este modo de proceder no se puede saber ni aun el efecto final de los errores de observacion, de manera que admitiendo la igualdad numérica de estos vamos á examinar los dos casos que se presentan.

Sea $A\ C = b$ el lado conocido desde cuyos extremos se observan los ángulos A y C (Fig. 11ª) para situar el punto B por la interseccion de ambas visuales. Los lados a y c se calcularán por las ecuaciones:

$$a = b\,\frac{\text{sen. } A}{\text{sen. } (A + C)} \qquad\qquad c = b\,\frac{\text{sen. } C}{\text{sen. } (A + C)}$$

Si los errores de observaciones tienen distintos signos en A y C las anteriorcs vendrán á ser:

$$a \pm x = b\,\frac{\text{sen. } (A \pm \alpha)}{\text{sen. } (A + C)} \qquad\qquad c \mp y = b\,\frac{\text{sen. } (C \mp \alpha)}{\text{sen. } (A + C)} \quad *$$

las cuales dán respectivamente:

$$x = \alpha\, a \text{ cot. } A \qquad\qquad y = \alpha\, c \text{ cot. } C$$

* desarrollando los senos de $(A \pm \alpha)$ y de $(C \mp \alpha)$, sustituyendo en vez de a y c sus valores que nos dan las primeras fórmulas, teniendo en consideracion al reducir que por ser α muy pequeño el coseno es igual al ~~radio~~ y el seno igual al arco, y poniendo finalmente en vez de b sus valores obtenidos de las mismas primeras formulas.

Sustituyendo en ellas los valores de a y c, se cambian en

$$x = a\,b\,\frac{\cos. A}{\text{sen.}\,(A + C)} \qquad y = a\,b\,\frac{\cos. C}{\text{sen.}\,(A + C)}$$

Estos resultados demuestran que el caso mas favorable se tiene cuando $A + C = 90°$, ó lo que es lo mismo, cuando las visuales dirigidas á B se cortan en ángulo recto. En esta circunstancia, x disminuye al paso que crece A; pero como esto no puede suceder sino á costa de C que al decrecer aumenta el valor de y, resulta que para que las diferencias de a y c sean las mismas, se debe tener $A = C = 45°$

Si α es del mismo signo en A y C, las ecuaciones serán:

$$a \pm x = b\,\frac{\text{sen.}\,(A \pm \alpha)}{\text{sen.}\,(A + C \pm 2\,\alpha)} \qquad c \pm y = b\,\frac{(\text{sen.}\ C \pm \alpha)}{\text{sen.}\,(A + C \pm 2\,\alpha)}$$

las que tratadas como en el núm. 32, darán por resultado: *

$$x = \alpha\, a\,(\cot. A - 2 \cot. (A + C)) \qquad y = \alpha\, c\,(\cot\, C - 2 \cot. (A + C))$$

Si en estas ecuaciones se sustituyen los valores de a y c se obtiene sin dificultad:

$$x = b\,\alpha\left(\frac{\cos. A}{\text{sen.}\,(A + C)} - \frac{2\,\text{sen.}\,A \cos.\,(A + C)}{\text{sen.}^2\,(A + C)}\right)$$

$$y = b\,\alpha\left(\frac{\cos. C}{\text{sen.}\,(A + C)} - \frac{2\,\text{sen.}\,C \cos.\,(A + C)}{\text{sen.}^2\,(A + C)}\right)$$

Hagamos notar que el signo de los segundos términos no es mas que aparente, á ménos que se tenga: $A + C < 90°$. Si $A + C = 90°$, sacarémos la misma consecuencia que en el caso anterior, esto es, que para que los errores de ambos lados sean numéricamente iguales, el triángulo debe ser isósceles–rectángulo, siendo de 45° los ángulos observados. (mejor dicho, los ángulos adyacentes al lado que sirve de base)

41º De todas las consideraciones que preceden se deduce que en los reconocimientos que se practican para formarse un plan de triangulacion, debe tenerse presente para la eleccion de los vértices: 1º que los triángulos se acerquen lo mas que sea posible á la forma equilátera, cuidando de aumentar poco á poco los lados cuando la

* desarrollando el valor de $a \pm x = \frac{b\,\text{sen}A \cos\alpha \pm b \cos A\,\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}(A+C)\cos 2\alpha \pm \cos(A+C)\,\text{sen}\,2\alpha}$; por ser α muy pequeño $\cos\alpha = 1$, $\cos 2\alpha = 1$, $\text{sen}\,\alpha = \alpha$, $\text{sen}\,2\alpha = 2\alpha$, y $a \pm x = \frac{b\,\text{sen}A \pm b\alpha\cos A}{\text{sen}(A+C) \pm 2\alpha\cos(A+C)}$, quitando el denominador y reduciendo por $b\,\text{sen}A = a\,\text{sen}(A+C)$ ..... $\pm 2a\alpha\cos(A+C) \pm x\,\text{sen}(A+C) \pm 2\alpha x \cos(A+C) = \pm b\alpha\cos A$; despejando á x y como $b = \frac{a\,\text{sen}(A+C)}{\text{sen}A}$ y suprimiendo el doble signo y anulando el termino que contiene αx; $x = a\alpha(\cot. A - 2\cot.(A+C))$

base sea menor que la longitud media que se haya adoptado: 2º que los puntos elegidos sean notables, bien por su importancia como edificios públicos, cerros, límites de tierras, &c., ó bien por su situacion favorable para enlazarlos con las triangulaciones secundarias que sirven de apoyo inmediato á las demas operaciones del levantamiento: 3º que el número de los triángulos sea el menor posible, porque ademas de la economía de tiempo y de trabajo que de esto resulta, las probabilidades de error aumentan con el número de los triángulos; pero se combinará esta prescripcion con el poder de los anteojos y con la mayor longitud de los lados segun el error angular que se crea posible cometer y la escala que haya de emplearse.

Es conveniente en los reconocimientos para elegir los puntos trigonométricos, proceder por polígonos de este modo: Desde el punto *A*, (fig. 12ª) que supondrémos ser uno de los extremos de la base, se fija la atencion en *B*, *C*, *D*, *E* y *G* que se juzgan propios para vértices, tomando aproximadamente los ángulos que forman entre sí de dos en dos, para estar seguros de que no sean muy agudos ó muy obtusos. En seguida se pasa á cada uno de ellos, á *G* por ejemplo, para cerciorarse de si son ó no visibles *E* y *B* que desde él deben observarse, y satisfechos de esto, se eligen *F*, *H*, *J*, con el fin de cerrar el nuevo polígono *A B I H F E* al derredor de *G*, prosiguiendo de esta manera en toda la extension del terreno.

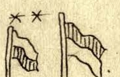
Una vez hecha la eleccion de los vértices de la cadena primaria, se hace tambien la de los puntos *a*, *b*, *c*, *d*, &c., que han de formar los triángulos secundarios, atendiendo, aunque en menor escala, á las mismas condiciones que para aquellos, y procurando, sobre todo, enlazarlos cuanto sea posible con los de primer órden. Si por ser muy pequeños, el ingeniero no cree necesario tomar mas que dos ángulos de cada uno, tratará de que las visuales que fijan el tercer punto sean perpendiculares entre sí, y si se puede, que sean mas de dos, pues es claro que si no hay error, todas deberán cortarse en el mismo punto, lo que proporciona comprobacion.

42º Para poder observar los ángulos se construyen en los vértices *señales* ó *monumentos* cuya duracion y tamaño dependen de la importancia y exactitud de las operaciones. En la mayor parte de los casos basta establecer estacas fijadas sólidamente en el suelo en posicion vertical para que sirvan de punto de mira, y provistas de una bandera para distinguirlas á lo léjos. A fin de no exponerse á perder los puntos porque el viento ú otra causa cualquiera derribe el asta, conviene señalarlos ademas con otra estaca pequeña cubierta enteramente por la tierra, (fig. 13ª) ó con un cerco de piedras colocado al derredor de la bandera, &c. *

* Esta manera es preferible, colocando la señal sobre la estaca

Cuando se desea proceder con mas exactitud, ó encontrar en cualquiera tiempo los puntos trigonométricos, se hace uso de trozos de madera ó de piedra A, (fig. 14ª) de cosa de 0ᵐ.3 de grueso, con una cavidad cilíndrica B en el centro, destinada á recibir la bandera, y cubierta del todo por la tierra que se aprieta fuertemente á su derredor. Si son de madera es conveniente rodearlos de una capa de carbon, con el objeto de que estén ménos expuestos á la accion de la humedad. Finalmente, se usan tambien pequeños trozos de pirámide ó de cono, (fig. 15ª) construidos de mampostería, cantería ó ladrillo. Señales de esta última clase son las que se han construido para la triangulacion del Distrito.

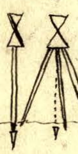
Las banderas deben tener un color que forme contraste con el objeto sobre el que se proyectan para poderlas distinguir con claridad. En nuestros trabajos hemos usado banderas cuadradas de 0ᵐ.5 de lado, con la mitad roja y la otra blanca, porque segun la hora del dia y el estado de la atmósfera, se ve mejor uno de estos colores que el otro.** Para distancias considerables, y sobre todo, cuando las señales están establecidas en alturas de manera que desde las otras estaciones se vean proyectadas sobre el fondo del cielo, es preferible usar ó un solo madero (fig. 16ª) en cuya parte superior se ata un haz de paja ó de cualquiera yerba que presente un punto de mira conveniente, ó bien se forma la señal con tres maderos atados por arriba formando una especie de tripié, en cuya extremidad superior se coloca un objeto del tamaño y color necesarios para que sirva de punto de mira. El centro C de la estacion se marca por medio de una plomada. Con señales de esta última clase he podido formar triángulos de mas de seis leguas de lado, haciendo uso de instrumentos topográficos comunes. ***

** 

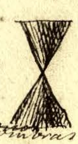
Los colores se disponen así con mas ventaja pues aun cuando no se pueda ver el asta no pueden desviarse tanto las visuales como cuando se ponen en la disposicion de las fig. 13, 14 y 15 – La situacion inferior ó superior del color blanco ó del rojo depende del fondo sobre que se ha de proyectar.

En cuanto á las dimensiones que conviene dar á las señales, tanto en altura como en espesor, se comprende desde luego que dependen en gran parte de la magnitud de los lados trigonométricos; pero trataré este punto despues de indicar el modo de medir los ángulos.

En general, las torres, cúpulas ú otros objetos terminados en punta que se vean desde léjos, suministran buenas señales, aunque



*** Dos conos de hoja de lata, unidos por su vertice forman una señal visible cualquiera que sea el fondo en que se proyecte particularmente cuando los rayos del sol de alguna suerte se reflejan hacia el observador – La visual se dirige al punto de encuentro de la parte luminosa ó union de las sombras



tienen el inconveniente de que no siempre es posible colocarse en la vertical del punto de mira cuando se miden los ángulos desde ellas, y por tanto exigen un método particular de observacion que pronto darémos á conocer.

CAPITULO IV.

OBSERVACION DE LOS ÁNGULOS.

43º Antes de explicar la manera de medir los ángulos de una cadena trigonométrica, describirémos los instrumentos que se emplean y el modo de rectificarlos. Los principales de ellos son el *círculo* y el *teodolito repetidores.*

El *círculo repetidor*, representado en la figura 17ª, descansa en una columna hueca de cobre *C* que se ajusta perfectamente y gira sobre otra de acero ligeramente cónica, la cual está unida á tres pies *P* provistos en sus extremos de tornillos *T* que permiten dar diversos grados de inclinacion á la columna. En la parte superior de esta, hay una pieza *A A'* que afecta, poco mas ó ménos, la forma de una Y, destinada á sostener el eje *E* en que gira la parte superior del instrumento, la que consiste en un círculo *B B'* llamado *limbo*, dividido de 0° á 360° en grados y fracciones, y en dos anteojos que se mueven paralelamente al plano del limbo; pero el uno *D D'*, llamado *superior*, gira en el centro de la cara graduada, y el otro, llamado *inferior*, en la parte posterior del círculo y á una pequeña distancia de su centro á causa del cilindro *L*, que sirve de eje de rotacion al limbo. Ambos anteojos son acromáticos: en el foco de sus objetivos, y á poca distancia del ocular, está un pequeño diafragma provisto de dos hilos muy delgados que se cortan en ángulo recto, debiendo corresponder su interseccion á un punto del eje óptico. Este aparato, llamado *retícula*, sirve para establecer la coincidencia entre el objeto que se observa y el eje óptico del anteojo. El tubo que lleva el ocular puede sacarse mas ó ménos, segun la vista del observador, hasta ver con perfecta claridad los hilos, y un tornillo situado en el tubo del anteojo puede hacer variar la distancia focal para distinguir con entera limpieza el objeto que se observa y establecer la coincidencia de que hemos hablado. La retícula es susceptible de un pequeño movimiento en un plano perpendicular al eje óptico, que tiende á acercar ó alejar la interseccion de los hilos y el plano del limbo: este movimiento sirve, como verémos, para establecer el paralelismo entre este último plano y los ejes de ambos telescopios.

Los anteojos pueden girar solos é independientemente uno del otro al derredor del centro del limbo, ó bien se unen al círculo, y entónces se mueven con él al derredor del eje *L*, que sostiene en su otro extremo la pieza *G*, destinada á hacer contrapeso al círculo y los anteojos, á fin de que la falta de equilibrio no incline irregularmente la columna *C*.

44º Es fácil ahora concebir cuáles son los diversos movimientos de que está dotado el círculo repetidor. El primero que afecta á todo el instrumento, se verifica al derredor de la columna *C*, la cual lleva consigo el círculo *H H'* llamado *azimutal*. El segundo, al derredor del cilindro *E*, permite al plano del limbo tomar todas las inclinaciones con respecto á la columna *C*. El tercero afecta solo á los anteojos y al limbo, el cual no sale de su plano, puesto que este movimiento se efectúa al derredor del eje *L*, que le es perpendicular y pasa por su centro. El cuarto es el de cada uno de los telescopios separadamente, en planos paralelos al del círculo. Es tambien fácil comprender que el segundo de estos movimientos, combinado con la inclinacion que se le dá á la columna *C* por medio de los tornillos *T*, permite situar el círculo en todas las direcciones posibles con relacion al horizonte.

Todos los movimientos pueden paralizarse voluntariamente por medio de tornillos llamados *de presion*. El primero se detiene con el tornillo *K*, que fija el círculo azimutal á uno de los pies del instrumento. El segundo con el tornillo *M*, que une la parte superior del aparato á sus apoyos *A A'*. El tercero, con un tornillo que fija el limbo á su eje *L*. Finalmente, los movimientos de los anteojos se detienen con los tornillos de presion que los reunen al plano del círculo.

Paralizados los movimientos generales, pueden comunicarse á las diversas partes del instrumento otros suaves, valiéndose de los tornillos llamados de *aproximacion* cuya disposicion es muy variada; pero que por lo comun van unidos á la pieza que lleva el tornillo de presion, y obran sobre un resorte fijado en la parte que se quiere mover.

45º El anteojo superior, al moverse, lleva consigo una ó varias reglas RR' llamadas *alidadas*, cuyos extremos recorren la graduacion del limbo, y están provistos de un aparato que se llama *vernier* ó *nonius*,* cuyo objeto es apreciar las pequeñas fracciones de la division. El *vernier* no es otra cosa mas que un arco igual en extension á otro correspondiente del limbo, pero dividido en un número de partes una unidad mayor que este, de tal modo, que n divisiones del nonius coincidan con $n - 1$ del círculo. Para comprender la utilidad de esta disposicion sea $a\ b$ (fig. 18ª) una parte de la regla graduada $A\ B$, y $a'\ b'$ otra regla del mismo tamaño que $a\ b$, pero dividida en n partes, suponiendo que $a\ b$ lo esté en $n - 1$. Imaginémonos ahora que estando numeradas las divisiones de $a'\ b'$ desde 0 hasta n, se mueva á lo largo de $A\ B$ hasta que el punto 0 coincida con cualquiera de sus divisiones, con a por ejemplo. Es claro que la distancia de la division inmediata c á la marcada 1, es igual á la diferencia entre la extension de las partes de $A\ B$ y de $a'\ b'$; y como estas extensiones están en razon inversa del número de partes, puesto que $a\ b = a'\ b'$, se tendrá:

$$a\,c : a'\,1 : : n : n - 1$$

de donde: $a\,c - a'\,1 : a\,c : : 1 : n$, y $a\,c - a'\,1 = \frac{1}{n}\, a\,c$. Por la misma razon la distancia de la division 2 á la d será $= \frac{2}{n}\, a\,c$, y así sucesivamente. Supongamos que se ha hecho coincidir la division 1 con c: es evidente que 0 se habrá alejado de a una cantidad precisamente igual á la diferencia de las divisiones. Del mismo modo, si se establece la coincidencia entre 3 y e, la distancia del 0 á a será: $\frac{3}{n}\, a\,c$, y así sucesivamente, de manera que si en general n' re-

* Aunque las voces *vernier* y *nonius* se usan casi como sinónimas, la de vernier es la mas propia, como derivada del nombre del geómetra frances Vernier, que inventó esta sencilla combinacion. Los españoles usan de preferencia la palabra nonius, atribuyendo su invencion á Pedro Nuñez; pero en rigor, aunque la invencion de Nuñez tuvo tambien por objeto aproximar las lecturas angulares, su combinacion era enteramente diversa de la de Vernier.

presenta la division del vernier que coincide con una de las del limbo, la distancia del *cero* de aquel á la division mas inmediata de este, que queda *atras* del *cero*, estará representada por $\frac{n'}{n}$ $a\ c$, tomando siempre por unidad la division $a\ c$ del limbo, y así es qne si se conoce el valor de esta unidad será fácil apreciar la fraccion que ha recorrido el *cero* del vernier.

Con lo que hemos explicado no habrá dificultad para comprender la aplicacion del vernier á la medida de las cantidades pequeñas, ya sea que se le suponga recto, como lo he hecho para mayor comodidad, ó bien curvo para adaptarlo á la graduacion de los instrumentos angulares. Sea $A\ B$ (fig. 19ª), como ántes, una regla, un arco, ó en general una escala dividida para medir una magnitud cualquiera, la cual supongamos que aplicada á la escala, abrace un número N de partes enteras, más la pequeña fraccion $a\ b$, de modo que su longitud sea $N + a\,b$. Para apreciar $a\ b$ se aplica el vernier $a'\ b'$ en el punto b donde termina la magnitud, y se observa la division n' que está en coincidencia con alguna de las de la escala, cuyo valor representarémos por D. Entónces la longitud que se busca será: $N + \frac{n'}{n}\ D$.

Por lo que precede se ve que el ~~nonius~~ vernier proporciona el modo de medir una cantidad igual á la diferencia entre sus divisiones y las del limbo, diferencia que constituye la *aproximacion* del instrumento. Si la designamos por a, por D y d el valor de cada division del limbo y del vernier respectivamente, siendo $n - 1$ y n su número, se tendrá:

$$a = D - d \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

La extension del arco del limbo que coincide con el nonius será: $D\ (n - 1)$, y la de este último $d\ n$. Como son iguales, se tiene la ecuacion: $D\ (n - 1) = d\ n$, de donde resulta: $D - d = \frac{D}{n}$, y sustituyendo en la (1) se obtiene finalmente:

$$a = \frac{D}{n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

lo que quiere decir que la aproximacion de un instrumento es igual al valor de una division del limbo, dividido por el número de divisiones del vernier.

Supongamos que en un círculo cada grado esté dividido en seis partes, y que el número de divisiones del nonius que coinciden con las del limbo sea 60. Se tendrá: $D = 10' = 600''$ y $a = \frac{600}{60} = 10''$ Luego con este instrumento podrémos apreciar 10.''

Si el grado está dividido en cuatro partes y el vernier en 30, se tendrá: $a = \frac{900}{30}'' = 30.''$ Igual aproximacion se obtendria si estando el grado dividido en 3 partes tuviera el vernier 40 divisiones; ó bien con 2 divisiones en cada grado y 60 en el nonius. Para $D = 20'$ y $n = 20$, y para $D = 15'$ y $n = 15$, la aproximacion seria solo de 1.'

Recíprocamente si se quiere saber el número de divisiones que debe tener el vernier para que estando el grado dividido en cuatro partes, se puedan apreciar $20''$, se tiene: $n = \frac{15'}{20''} = \frac{900''}{20''} = 45.$ Luego un arco del limbo de 44 divisiones $= 11° \ 00'$ se debe dividir en 45 partes. De igual manera pueden hacerse otras muchas combinaciones.

Como seria sumamente incómodo contar las divisiones del nonius desde el *cero* hasta la que coincida con una del limbo, están por lo comun numeradas aquellas que forman un número entero de minutos, así en el primero de nuestros ejemplos, como cada seis divisiones del vernier grabado en la alidada valen $1'$, se numeran desde $0'$ hasta $10'$ de seis en seis, ó bien las lineas que demarcan minutos enteros se hacen un poco mayores. En cuanto al limbo, está numerado de 10° en 10° ó de 5° en 5°, y los grados enteros intermedios están indicados por lineas mayores. Estas disposiciones facilitan la lectura del arco que señala el nonius en cualquiera posicion, como vamos á verlo.

Supongamos que por medio del movimiento del anteojo superior se haga coincidir el *cero* del limbo con el del vernier, y que en seguida se trasporte á otro punto cualquiera, pero en sentido de la numeracion, y se desee saber la amplitud de arco recorrido por el telescopio. Lo primero que debe hacerse es ver las decenas de grado comprendidas entre el punto de partida, que es el cero del limbo, y el del nonius, cosa muy fácil puesto que están indicadas por guarismos, y sea 50°. En seguida el número de grados enteros comprendidos entre la última decena y el cero del nonius, que como sabemos, están indicados por lineas mayores, y supongamos que se cuenten tres, con lo que ya tendrémos 53 grados enteros. Despues se ve cuántas partes de grado hay entre la última linea que señala grados enteros y el cero del vernier, y admitamos que se encuentren cuatro partes, las que representarán 40′ en el supuesto de que la disposicion del limbo sea la que supusimos en nuestro primer ejemplo. Segun esto, el arco seria de 53° 40′ si el cero del nonius coincidiese exactamente con la division cuarta; mas como por lo general no sucede esto, imaginémonos que el cero se encuentre entre la cuarta y la quinta, y entónces recurrirémos al vernier para apreciar el exceso sobre 53° 40′. Para conseguirlo, se busca cuál es aquella de sus divisiones que no parece formar mas que una sola con otra del limbo, y una vez que se encuentre se lee el guarismo que precede inmediatamente en el vernier. Supongamos que la coincidencia tenga lugar en la segunda division del nonius despues de la cifra que señala 7′, y se tendrá que la cantidad excedente á 53° 40′ es 7′ 20″, por lo que el arco recorrido por el cero del vernier será de 53° 47′ 20″.

Debemos advertir que tanto los nonius del círculo superior como los del azimutal están provistos de microscopios que amplifican las divisiones, sin lo cual seria imposible la lectura de los ángulos, y cuando la coincidencia parece existir en dos ó tres lineas consecutivas, se toma el término medio de las indicaciones que les corresponden.

46º Enseñemos ahora el modo de rectificar el círculo repetidor, para lo cual dirémos cómo se sitúa el limbo en un plano vertical. Esta operacion se efectúa por medio de dos niveles de que está provisto el instrumento, y que se componen de tubos de vidrio perfectamente cerrados y llenos casi en su totalidad de alcohol ó éter, dejando solo un pequeño espacio ó *burbuja* ocupado por el aire ó el vapor del mismo líquido. Esta burbuja, á causa de su peso específico menor que el del líquido, tiende siempre á ocupar la parte mas alta, cualquiera que sea la posicion del tubo, por lo que si se dá á este una ligera curvatura en el sentido de su longitud, la tangente en la parte media de la burbuja que es el punto culminante, será horizontal, y si se adapta al nivel una escala dividida desde su centro á uno y otro lado, se encontrará el tubo horizontal siempre que ambos extremos de la burbuja señalen divisiones iguales.

Uno de estos niveles está colocado á lo largo del anteojo inferior, é invariablemente unido á él, y el otro de menores dimensiones es paralelo al eje *L* (fig. 17ª) de rotacion del limbo, sirviendo el primero para establecer la verticalidad de la columna *C*, y el segundo para situar el cilindro *L* horizontalmente y por consecuencia el plano del limbo en posicion vertical. La operacion se practica así: por medio de los tornillos *T* del pié se pone la columna *C* de manera que se aproxime lo mas que se pueda á la verticalidad, y en seguida comunicando á la parte superior del instrumento el segundo movimiento de que hemos hablado, al derredor del eje *E*, se establece tambien á la vista la verticalidad del limbo, y se paraliza este movimiento. Practicada esta primera aproximacion, se hace girar todo el instrumento al derredor de la columna *C*, hasta que el limbo ocupe una posicion con poca diferencia paralela á la linea que une dos de los tornillos del pié, ó lo que es lo mismo, que el tercer pié se encuentre en una direccion perpendicular al plano del limbo. En esta posicion muévase el anteojo inferior hasta que la burbuja del nivel se halle en el medio del tubo, lo cual se consigue primero poco mas ó ménos con ayuda de su movimiento general, y en seguida con exactitud por medio de su tornillo de aproximacion, que segun hemos visto le comunica pequeños movimientos. Luego que la burbuja ocupa la parte central del tubo, se hace girar el instrumento al derredor de la columna hasta que el vernier del círculo azimutal señale una semicircunferencia, ocupando entónces el limbo una posicion paralela á la primera. Si la burbuja despues de restablecido el equilibrio se detiene en medio del tubo, es prueba de que la columna está situada en el plano vertical perpendicular al eje del nivel; mas si se inclina á uno de los extremos, se hace la correccion para volverla á conducir al centro del tubo, la mitad por medio de los dos tornillos del pié, cuya direccion es paralela á la del limbo, y la otra mitad con el tornillo de aproximacion del anteojo inferior. Conviene volver á la primera posicion para repetir la prueba, pues es raro que en la primera vez quede destruido todo el error. Luego que en ambas posiciones los extremos de la burbuja señalan los mismos guarismos de la escala, se coloca el limbo en un posicion perpendicular á aquellas, lo cual se consigue haciendo que el vernier del círculo azimutal indique haberse movido el instrumento un cuadrante. Es claro que en esta nueva situacion el limbo será paralelo á la direccion del tercer tornillo, y si la burbuja se detiene á la mitad del tubo, la columna *C* encontrándose á la vez en los dos planos verticales perpendiculares á ambas posiciones del nivel, será tambien vertical. En el caso contrario, se hará la correccion con el tercer tornillo del pié sin tocar los otros dos. Generalmente no se destruyen completamente los errores á la primera prueba, sino que hay necesidad de repetir varias veces estos procedimientos, haciendo poco á poco las correcciones, tanto con los tornillos del tripié como con los del anteojo, hasta conseguir que la burbuja ocupe el medio del tubo en cualquiera posicion que se le dé al limbo al derredor de la columna.

Una vez satisfechos de la verticalidad de la columna, se pasa á examinar la horizontalidad del eje *L*, que para el efecto lleva como he dicho, un pequeño nivel. En los mejores instrumentos, este nivel no está fijo al eje, sino que se apoya en él de manera que puede separarse voluntariamente, y en este caso se procede como voy á explicar. Se conduce la burbuja al medio del tubo valiéndose del tornillo de aproximacion que hace mover todo el limbo al derredor del cilindro *E*. En seguida se quita el nivel y se invierte de modo que el extremo que estaba, por ejemplo, á la derecha quede á la izquierda: si en esta segunda posicion vuelve la burbuja al centro, es prueba de que el eje *L* es horizontal, y en el caso contrario se hará la correccion la mitad por el tornillo de aproximacion, y la otra mitad alargando ó acortando uno de los apoyos del nivel por medio de los tornillos de que está provisto, repitiendo la operacion cuantas veces sea necesario hasta conseguir la rectificacion completa. *

Cuando el nivel por estar fijo no es susceptible de invertirse, solo se hará uso del tornillo de aproximacion, quedando en la incertidumbre del pequeño error ocasionado por la desigualdad que puede existir en los apoyos, aunque los fabricantes procuran que sea casi nula.

47º Luego que tanto la columna como el limbo se han establecido verticalmente, se procede á corregir el error de *colimacion*, que es la falta de paralelismo entre el plano del limbo y la linea que une la interseccion de los hilos de la retícula con el centro del lente objetivo, y que se llama *linea de colimacion.*

Para conseguirlo, se dirige uno de los anteojos, por ejemplo, el superior, á un objeto muy distante y que ofrezca un punto de mira

(*) El fundamento de este modo de proceder se verá en la teoría de los niveles.

claro y determinado, por medio de los movimientos generales del instrumento y del limbo, y luego que se establece bien la coincidencia entre dicho objeto y la interseccion de los hilos, se lee el ángulo que señala el vernier del círculo azimutal. En seguida se hace girar todo el instrumento al derredor de la columna hasta que el mismo vernier indique exactamente una semirevolucion ó 180° y se vuelve á dirigir el anteojo hácia la señal: si esta queda otra vez cortada por los hilos, el error es nulo, pudiendo considerarse paralelas las dos posiciones que ha tomado el anteojo, en atencion á que la pequeña distancia que las separa es insensible con respecto á la del punto de mira. Mas si este no queda cortado por los hilos, se hará la mitad de la correccion moviendo la retícula por medio de los pequeños tornillos que tiene al efecto y cuyas cabezas sobresalen un poco en el tubo del anteojo cerca del ocular. La otra mitad de la correccion se ejecuta con el movimiento del instrumento al derredor de la columna, y se repite la experiencia, pues casi nunca se destruye enteramente el error con una sola operacion. Una vez rectificado, no hay mas que hacer coincidir con el mismo punto la retícula del otro anteojo por medio del movimiento especial de que hemos hablado, y se tendrá establecido el paralelismo del limbo y las dos lineas de colimacion.

Como estas lineas pueden no coincidir con el eje de figura de los anteojos, esto es, desviarse un poco en el sentido vertical, los mejores instrumentos están dotados de un pequeño movimiento de la retícula al derredor del eje del tubo que les permite girar 90°, y entónces el desvío que obra en la vertical se reduce á la horizontal, y se procede como hemos explicado hasta que la señal no deje de ser cortada por los hilos al comunicarles este movimiento. Por otra parte, un desvío pequeño en el sentido vertical no tiene influencia alguna en la medida de los ángulos de altura, empleando el principio de la repeticion de que muy pronto hablaré.

48º Vamos á explicar ahora el procedimiento que se sigue para tomar el ángulo entre dos objetos. Se comienza por establecer el instrumento sobre su tripié *N* (fig. 17ª), de tal suerte que su centro corresponda verticalmente al punto que sirve de vértice al ángulo, para lo cual se usa una *plomada* *Q* suspendida en medio del tripié, y despues se sitúa el plano del limbo en el de los objetos. Aunque esta operacion no ofrece dificultad alguna, es cómodo proceder de este modo: al poner el instrumento se hace de manera que uno de los tres piés ó apoyos del círculo se encuentre en la direccion de uno de los objetos, del de la izquierda por ejemplo: en seguida, se hace girar todo el instrumento al derredor de la columna hasta que el cilindro *E* que sirve de eje de rotacion á la parte superior, se halle en la misma direccion, y entónces moviendo el tornillo del pié que se ha dirigido al objeto de la izquierda, se inclina la columna hasta que con el anteojo superior, que de antemano se ha colocado en una posicion conveniente, se pueda distinguir la señal. Es ahora claro que el movimiento de la parte superior del círculo al derredor del eje *E*, se efectúa tambien al derredor de la linea que une la señal de la izquierda al *centro de la estacion* ó vértice del ángulo, y si en virtud de este movimiento se hace coincidir el anteojo inferior con la señal de la derecha, se tendrá el limbo colocado en el plano que determinan ambas direcciones, que no es otro mas que el de los objetos. Si en esta posicion se paralizan todos los movimientos excepto el de los anteojos y el del limbo al derredor de su centro, es evidente que este plano en su rotacion no dejará de pasar por ambas señales. Por lo general, es preciso hacer pequeñas correcciones para conseguir la perfecta coincidencia de las retículas con los objetos.

Para proceder á la medida se pone en contacto el *cero* de uno de los nonius con el punto de partida, que comunmente es el *cero* de la graduacion, apretando el tornillo de presion y terminando cuidadosamente la coincidencia con el de aproximacion: en seguida se dirige el anteojo superior, sin tocarlo, sino valiéndose del movimiento general del limbo, á la señal de la izquierda *A*, (fig. 20ª) si las divisiones vistas desde el centro del círculo, están numeradas de la izquierda á la derecha, ó bien al contrario, si la numeracion va en sentido opuesto, y luego que se ha hecho convenir perfectamente la interseccion de los hilos con la señal, por medio del tornillo de aproximacion que mueve todo el círculo, el anteojo ocupará la posicion *C a*. Si el limbo inferior del instrumento estuviera graduado tambien, haciendo coincidir de la misma manera el anteojo inferior *C b* con la segunda señal *B*, el ángulo *a C b* de los anteojos seria el de los objetos, haciendo abstraccion del pequeño error que produciria la exentricidad del anteojo inferior; mas no estando dividido, lo que se hace es comunicar al anteojo superior *C a* su movimiento independiente del limbo, y hacerlo coincidir por medio de sus tornillos propios con la señal de la derecha *B*, de modo que ocupe la nueva posicien $C\,b$, siendo entónces evidente que el arco $a\,b$ recorrido por todo el sistema de los nonius es igual á $A\ C B$, de modo que no hay mas que leer la amplitud del ángulo que indique el vernier que al principio se puso en cero. En cuanto al anteojo inferior, no tiene mas uso en esta manera de proceder que el de testificar que durante la operacion no se ha movido el limbo, pues es claro que si hubiera sufrido alguna variacion con respecto á su posicion primitiva, no existiria ya la coincidencia entre el anteojo inferior y la señal B, en cuyo caso se deberia restablecer con el movimiento general del instrumento ántes de fijar el anteojo superior y leer el ángulo.

49º Veamos ahora de qué deriva el círculo su nombre de *repetidor*. Si el sistema de los nonius fuese exactamente concéntrico con la circunferencia graduada, y al mismo tiempo las divisiones estuviesen exentas de pequeños errores, el procedimiento que hemos explicado, daria á conocer con precision la amplitud del ángulo, por lo ménos hasta donde lo permite la aproximacion angular del instrumento; mas como estas circunstancias no existen sino con mas ó ménos imperfeccion en los mejores círculos, se ha ideado el método de reiterar las medidas del mismo ángulo con el objeto de disminuir el efecto de los pequeños defectos de construccion, procediendo de este modo: en la primera parte de la operacion quedó el anteojo superior en $C\,b$ miéntras que el *cero* ó en general el punto de partida ocupa la posicion $C\,a$; pues bien, si en virtud del movimiento general del limbo sin tocar los anteojos, se hace de nuevo coincidir el superior con A, el punto a se colocará en a' recorriendo un arco $a\,a' = a\,b$, y si despues de fijado el círculo en esta posicion se lleva solo el anteojo superior á la señal B, es claro que habrá vuelto á recorrer el arco $a\,b$, y la indicacion de los nonius será $a'\,a\,b$, el cual es doble del ángulo $A\ C B$ que se desea medir. Volviendo á dirigir el anteojo superior á la primera señal A, con el movimiento del círculo, el punto a' se trasladará á a'' siendo $a'\,a'' = a\,a' = a\,b$, y si se fija el limbo y se lleva el anteojo solo á B, el arco $a''\,a'\,a\,b$ será triple de $A\ C\ B$. De este modo se continúa repitiendo la medida cuantas veces se quiera para obtener el cuádruplo, el quíntuplo, &c., del ángulo, llevando el anteojo superior á las señales de la izquierda y la derecha, valiéndose alternativamente del movimiento general del instrumento y del particular del anteojo; pero teniendo presente para comenzar, la direccion de la numeracion, segun dijimos, á fin de que los nonius recorran las divisiones en el sentido de los números. Si se designa en general por g la indicacion del vernier al principio de la serie, por G la que señala al fin de ella, llevando en cuenta el número de circunferencias enteras recorridas, y por n el número de repeticiones, el ángulo final será:

$$a = \frac{G-g}{n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1)}$$

Supongamos que en lugar del *cero*, el vernier indicaba al principio: $g = 32° \, 19' \, 20''$, y que despues de 10 observaciones señale $219° \, 31' \, 50''$ habiendo recorrido una circunferencia, se tendrá:

$$a = \frac{579° \, 31' \, 50'' - 32° \, 19' \, 20''}{10} = \frac{547° \, 12' \, 30''}{10} = 54° \, 43° \, 15.''0$$

Para conocer el número de circunferencias enteras que ha recorrido la alidada, es conveniente leer el ángulo aproximativo al terminar la primera observacion, pues es claro que multiplicando su valor por el número de repeticiones se tendrá el arco total.

50º Hay otro modo de repetir los ángulos que se llama por *observaciones conjugadas*, y es este: puesto el instrumento en *cero*, ó en general en la graduacion g, se mueve toda su parte superior hasta que el anteojo coincida con la señal A (fig. 20ª), y se lleva el inferior á la otra B, donde se fija al limbo: en seguida se mueve todo el círculo hasta que el mismo anteojo inferior coincida con la primera señal A, siendo entónces evidente que el superior se trasportará al punto a', describiendo un arco $a\,a' = a\,b$, y si se lleva á B, despues de fijado el limbo, el arco que recorra será igual al doble del ángulo por medir. En esta primera parte de la operacion quedó el anteojo inferior en a y el superior en b; para proseguir se mueve todo el limbo sin tocar los anteojos hasta que el superior se coloque en a, con lo que el punto de partida que estaba en a' pasará á a''. Fijado el círculo, se lleva el anteojo inferior á coincidir con B, y se une al limbo: despues se vuelve á mover este hasta que el anteojo inferior coincida con A, con lo que el punto de partida se trasladará á a''' y el anteojo superior á a'. Por último, se lleva otra vez el anteojo superior solo á B y habrá vuelto á recorrer el arco $a'\,b$, que es doble del ángulo, y de consiguiente el ángulo total que señale el vernier será: $a''' \; a'' \; a' \; a \; b$, que es cuádruplo de $A\;C\;B$. Prosiguiendo así se tendrá el séxtuplo, el óctuplo, &c., del mismo ángulo, de manera que si en este método de repeticion se designa por n el número de veces que se dirige el anteojo superior á la segunda señal B, el ángulo final será: $a = \frac{G-g}{2n}$.

En este segundo método la exentricidad del anteojo inferior ocasiona un pequeño error, que disminuye al paso que crecen los lados de los triángulos, y tanto por este inconveniente, como por la complicacion de los movimientos del limbo y de los anteojos, darémos la preferencia al primero, puesto que en él no se emplea el anteojo inferior mas que para denunciar y corregir las pequeñas variaciones irregulares. #

51º La graduacion del punto de partida que he designado por g es enteramente arbitraria, aunque por lo comun se pone en *cero* uno de los ~~nonius~~ verniers; mas como raras veces están estos en una posicion exactamente rectangular, y se mueven precisamente en el centro del círculo, debe tomarse por g el término medio de las indicaciones de todos ellos, haciendo abstraccion del número de cuadrantes. Lo mismo decimos con respecto á G; pero teniendo presente que se deben tomar los *grados* que señala el vernier que se puso en *cero*. Para mayor claridad supongamos que estando numerados los nonius, se hizo coincidir el primero con el *cero* del limbo: que entónces el segundo indicaba 89° 59′ 50″: el tercero 180° 00′ 20″, y el cuarto 269° 59′ 40″. Se tendrán estas indicaciones:

Vernier núm. I	00″
„ „ II	— 10
„ „ III	+ 20
„ „ IV	— 20
Suma =	— 10″
g =	— 2.″5

Si despues de seis repeticiones se tuviese:

Núm. I	360° + 13° 27′ 10″
„ II	„ „ 10
„ III	„ „ 20
„ IV	„ „ 00
Resultaria G =	373° 27′ 10″

y el ángulo definitivo seria:

$$a = \frac{373^\circ\ 27'\ 10'' + 2.''5}{6} = 62^\circ\ 14'\ 32.''1$$

tambien en las observaciones conjugadas se pueden notar y corregir las desviaciones inusitadas de las visuales ~~que deten~~

Es claro que esto equivale á suponer un vernier medio cuyas indicaciones son los promedios de las de todos ellos. La cantidad g que designa el punto de partida se llama *error del cero ó error del índice.*

52º Hemos dicho al principio que en el levantamiento de planos se buscan las proyecciones de todos los puntos, y de consiguiente los ángulos que dá el círculo repetidor, estando situados en distintos planos, no son los que se emplean inmediatamente, sino que ántes es necesario reducirlos al horizonte, esto es, determinar el ángulo que forman entre sí las proyecciones horizontales de los lados. Para hacer estas reducciones es necesario conocer otro elemento que enseñarémos á obtener.

Se llama *distancia zenital* de un punto el ángulo que este forma con la *vertical* del lugar de observacion, que es la linea perpendicular al horizonte, y cuyo extremo superior se llama *zenit.* La distancia zenital es complemento de la *altura*, que es el ángulo que forma con el horizonte la visual dirigida á un objeto.

Para medir la distancia zenital de un punto se coloca verticalmente el limbo del instrumento con toda la precision que se indicó en el núm. 46, y se establecen los nonius en el punto de partida g. Para comenzar se lleva la cara graduada del instrumento á la izquierda si la numeracion va de izquierda á derecha, ó bien al contrario si va en sentido opuesto, y se establece el círculo poco mas ó ménos en el plano vertical que pasa por el objeto haciéndolo girar al derredor de la columna. En seguida se comunica al limbo su movimiento rotatorio al derredor de su centro, de manera que con el anteojo superior se descubra la señal A (fig. 21ª), y despues de establecida la coincidencia entre ella y la interseccion de los hilos, valiéndose del tornillo de aproximacion del limbo, se hace girar todo el instrumento $180°$ al derredor de la columna vertical, de suerte que el anteojo $C\,a$ describiendo una superficie cónica, cuyo eje es la vertical $C\,Z$, se vendrá á colocar en $C\,a'$, siendo $o\,a = o\,a'$; luego si se vuelve á dirigir el anteojo á la señal A en virtud de su movimiento independiente, el sistema de los nonius describirá un arco $a'\,C\,a$ que es doble de la distancia zenital $Z\,C\,A$. Para repetir las observaciones se vuelve á llevar la cara graduada á la izquierda, y sin tocar el anteojo se hace girar el círculo al derredor de su centro hasta volver á descubrir la señal: entónces el movimiento angular de todo el limbo es igual de nuevo al doble de la distancia zenital, de modo que el índice se trasportará á a'', y si se lleva otra vez la graduacion á la derecha y se dirige el anteojo solo á la señal, el arco $a\ o\ a'\ a''$ será cuádruplo de la distancia zenital que se busca. Se prosigue así cuantas veces se quiera, haciendo girar todo el instrumento al derredor de la columna en cada una de las observaciones, y llevando el anteojo á la señal, valiéndose alternativamente del movimiento del limbo y del particular del anteojo. Se debe comenzar por el primero de estos movimientos y terminar por el segundo. Por consiguiente si se designa por n el número de veces que se dirige el anteojo al objeto, ya sea solo, ya unido al limbo, y se conservan las anotaciones del núm. 49 se tendrá por último la distancia zenital:

$$z = \frac{G - g}{n}$$

Debemos advertir que el ángulo z, tal como resulta de la observacion, está afectado de un pequeño error de que hablarémos en la Nivelacion, y que se llama *error de refraccion.*

53º Sea ahora $C\ Z$ (fig. 22ª) la vertical de la estacion C desde donde se ha medido el ángulo $A\ C\ B = c$ que forman dos puntos A y B, y propongámonos determinar el ángulo horizontal $a\ C\ b$ que forman las proyecciones $C\ a$ y $C\ b$ de los lados. Si suponemos que C sea el centro de una esfera cuyo radio es la unidad, la interseccion de esta esfera con los planos verticales $Z\ C\ A$, $Z\ C\ B$ y con el de los objetos $A\ C\ B$, determinará un triángulo esférico $Z'\ A'\ B'$, cuyos lados $Z'\ A'$ y $Z'\ B'$ son respectivamente las distancias zenitales de los puntos A y B, y el tercero $A'\ B'$ es igual al ángulo medido c. Como el ángulo Z' es el mismo que forman los planos verticales que pasan por A y B, y que es igual á $a\ C\ b = C$, todo el problema queda reducido á calcular un ángulo conociendo los tres lados del triángulo esférico. Si designamos por z y z' las distancias zenitales de A y B, las fórmulas usuales para el caso son:

$$m = \frac{c + z + z'}{2} \qquad \text{sen. } \tfrac{1}{2}\ C = \sqrt{\frac{\text{sen. } (m - z) \text{ sen. } (m - z')}{\text{sen. } z \text{ sen. } z'}}$$

Supongamos que se tengan los datos siguientes:

$c = 61° 11' 20''$	sen. $(m - z)$.....	9.7272276		
$z = 88\ 19\ 10$	sen. $(m - z')$...	9.6847345		
$z' = 91\ 37\ 50$	sen. z..............	— 9.9998132		
$2\,m = 241\ 8\ 20$	sen. z'.............	— 9.9998241		
$m = 120° 34' 10''$	sen.$^2\ \frac{1}{2}\ C$.........	9.4123248	$\frac{1}{2}\ C = 30° 33' 14.''2$
$m - z = 32° 15' 00''$	sen. $\frac{1}{2}\ C$.........	9.7061624	$C = 61°\ 6' 28.''4$
$m - z' = 28\ 56\ 20$			

Como por lo regular las visuales dirigidas á los objetos están muy poco inclinadas respecto del horizonte, las distancias zenitales z y z' se aproximan mucho á 90°, y el cálculo de la fórmula no dá el ángulo reducido con toda la precision que es de desearse, por lo ménos cuando se emplean logaritmos de siete decimales. Vamos á dar otra fórmula que no presenta este inconveniente.

El triángulo $A'\ B'\ Z'$ dá esta relacion:

$$\cos.\ C = \frac{\cos.\ c - \cos.\ z \cos.\ z'}{\text{sen.}\ z\ \text{sen.}\ z'}$$

Si llamamos a y a' los ángulos de altura de los puntos A y B tendrémos: $z = 90° - a$; $z' = 90° - a'$; y la ecuacion anterior puede expresarse así:

$$\cos.\ C = \frac{\cos.\ c - \text{sen.}\ a\ \text{sen.}\ a'}{\cos.\ a \cos.\ a'}$$

Como suponemos que a y a' son pequeños, sustituirémos por sus senos y cosenos los desarrollos de estas lineas, desechando las potencias superiores á la segunda, esto es, tomando sen. $a = a$, y cos. $a = 1 - \frac{1}{2}\ a^2$, con lo que resulta:

$$\cos.\ C = \frac{\cos.\ c - a\,a'}{1 - \frac{1}{2}\,(a^2 + a'^2)} \quad *$$

* despreciando el producto $\frac{a^2 a'^2}{4}$ que es muy pequeño.

Siendo el denominador poco diferente de 1, trasportémosle al numerador tomando, como ántes, solo los términos de segundo órden, y obtendrémos:

$$\cos.\ C = \cos.\ c - a\,a' + \tfrac{1}{2}\,(a^2 + a'^2)\cos.\ c$$

Multiplicando el término $a\,a'$ por la unidad bajo la forma de $\text{sen.}^2 \frac{1}{2} c + \cos.^2 \frac{1}{2} c$, y sustituyendo en el último $\cos.^2 \frac{1}{2} c - \text{sen.}^2 \frac{1}{2} c$ en lugar de $\cos.\ c$, resultará despues de sacar como factores comunes á $\text{sen.}^2 \frac{1}{2} c$ y $\cos.^2 \frac{1}{2} c$:

$$\cos.\ C = \cos.\ c - \tfrac{1}{2}(a + a')^2\ \text{sen.}^2 \tfrac{1}{2} c + \tfrac{1}{2}(a - a')^2 \cos.^2 \tfrac{1}{2} c \ldots\ldots (1)$$

Si llamamos ahora x la diferencia entre el ángulo observado y el reducido, se tiene: $C = c + x$; y $\cos.\ C = \cos.\ c \cos.\ x - \text{sen.}\ c\ \text{sen.}\ x$. Pero atendiendo á que x es siempre muy pequeño, tomarémos el arco por el seno y la unidad por el coseno, y entónces sustituyendo en la ecuacion (1) se tendrá:

$$x\ \text{sen.}\ c = \tfrac{1}{2}(a + a')^2\ \text{sen.}^2 \tfrac{1}{2} c - \tfrac{1}{2}(a - a')^2 \cos.^2 \tfrac{1}{2} c$$

Como $\text{sen.}\ c = 2\ \text{sen.}\ \frac{1}{2} c \cos.\ \frac{1}{2} c$ resultará despejando:

$$x = \left(\frac{a + a'}{2}\right)^2 \tan.\ \tfrac{1}{2} c - \left(\frac{a - a'}{2}\right)^2 \cot.\ \tfrac{1}{2} c$$

Los pequeños arcos x, a y a' expresan parte del radio, y para introducirlos en el cálculo por su número de segundos, será necesario multiplicarlos por sen. 1″, (*Vease la nota del núm. 2*) y abreviando se obtiene finalmente:

$$\left.\begin{array}{l} x = \left(\dfrac{a + a'}{2}\right)^2 \tan.\ \tfrac{1}{2} c\ \text{sen.}\ 1'' - \left(\dfrac{a - a'}{2}\right)^2 \cot.\ \tfrac{1}{2} c\ \text{sen.}\ 1'' \\ C = c + x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots (2)$$

Deberá darse á los arcos a y a' el signo + ó el signo —, segun que las distancias zenitales sean menores ó mayores que 90°. Apliquemos las ecuaciones al ejemplo anterior:

$a = +\ 1°\ 40'\ 50''$	$\frac{1}{2}(a + a')$... 1.95424	$\frac{1}{2}(a - a')$... 3.77525
$a' = -\ 1°\ 37'\ 50''$	,, ... 1.95424	,, ... 3.77525
$\frac{1}{2}(a+a') = 0°\ 01'\ 30'' =\ \ 90''$	tan. $\frac{1}{2}$ c...... 9.77178	cot. $\frac{1}{2}$ c 0.22822
$\frac{1}{2}(a-a') = 1°\ 39'\ 20'' = 5960''$	sen. 1″...... 4.68557	sen 1″ 4.68557
$\frac{1}{2} c = 30°\ 35'\ 40''$	0.″02...... 8.36583	291.″27 ...... 2.46429

Primer término......	0.″02
Segundo ,, ...	—291.″27
$x =$	—291.″25 .... —4′ 51.″2
	$c = 61\ \ 11\ \ 20.\ \ 0$
	$C = 61°\ \ 6'\ 28.''8$

Me he detenido en la descripcion y uso del círculo repetidor, aunque hoy es ya poco usado en las triangulaciones, porque se emplea todavía con mucha frecuencia en la medida de ángulos verticales, como verémos al tratar de la Nivelacion.

54º El *teodolito repetidor* es el instrumento mas á propósito para la medida de los ángulos, reuniendo á todas las ventajas del círculo, la de darlos ya reducidos al horizonte, y por consiguiente evita las operaciones y cálculos de que nos hemos ocupado en estos últimos párrafos. El teodolito se distingue esencialmente del círculo repetidor en que el anteojo superior está dotado de un movimiento perpendicular al plano del limbo, que se verifica al derredor de un eje paralelo á él; así es que, establecido el círculo en una posicion horizontal, el anteojo se mueve en un plano vertical, de manera que cualesquiera que sean las alturas de los objetos observados, el sistema de los nonius describe siempre la proyeccion horizontal del ángulo que forman. El instrumento está provisto de los niveles y tornillos necesarios para rectificarlo, como verémos pronto.

55º Aunque el principio fundamental del teodolito es siempre el mismo, los constructores de instrumentos modifican mas ó ménos las diversas partes que lo constituyen, con el objeto de reunir la suavidad de los movimientos á la estabilidad, firmeza y precision del conjunto. Por tanto, daré una ligera descripcion de los teodolitos ingleses de la fábrica de Troughton & Simms, que son de los mejores, seguro de que será fácil, á la vista de cualquiera otro, comprender las funciones de cada una de las piezas que difieran de las de aquellos.

El instrumento (fig. 23ª) está formado de dos placas circulares, *A* y *B;* la superior, *A*, que lleva los vernieres, gira libremente sobre la inferior, teniendo ambas un movimiento horizontal por medio del eje vertical *C.* Este eje está formado de dos piezas, una exterior y otra interior; á la primera está unido el limbo graduado *B* y á la segunda la placa de los vernieres, *A*. La forma de estas dos piezas es cónica, y se hallan perfectamente ajustadas la una dentro de la otra, teniendo al mismo tiempo un movimiento suave y fácil. El diámetro de la placa inferior es mayor que el de la superior, y tiene su borde abiselado, en el cual va la graduacion sobre una lámina de plata: en dos puntos opuestos de la placa superior, ó en los extremos de un diámetro, se halla un pequeño espacio, *a*, tambien abiselado, formando con el borde de la placa inferior una superficie cónica continua, y cubierta de plata, en la cual están trazadas las divisiones del vernier.

Estos instrumentos están provistos de tres ó cuatro tornillos para nivelarlos, á fin de colocar el limbo en una posicion horizontal.

El limbo inferior puede quedar fijo en una posicion cualquiera, por medio del tornillo de presion *H*, que hace que el collar *c* abrace el eje, é impida todo movimiento; pero para colocarlo con mas exactitud en la posicion precisa que requiera la observacion, puede girar todo el instrumento un pequeño espacio, por medio del tornillo tangencial ó de aproximacion *I*. Del mismo modo el limbo superior puede quedar fijado al inferior por medio de un tornillo de presion, imprimiéndole pequeños movimientos con un tornillo de aproximacion.

Sobre la placa del vernier se hallan colocados dos niveles, *d d*, formando ángulo recto, con sus tornillos propios para la rectificacion, y destinados á indicar cuando se halla nivelado el limbo horizontal. En la misma placa está colocada una brújula pequeña.

Los apoyos *K* y *L* reciben los extremos ó muñones del eje horizontal, al cual va unido un semicírculo ó arco vertical *M*, sobre el cual se halla colocado el anteojo. Una cara del arco vertical lleva la graduacion sobre una lámina de plata, y la otra cara muestra la diferencia entre la hipotenusa y la base de un triángulo rectángulo, ó la cantidad que se ha de restar de una distancia inclinada para reducirla á la horizontal. El arco vertical, que se mueve con el anteojo puede quedar fijo en cualquiera posicion, por medio de un tornillo de presion, y recorrer espacios pequeños por medio de uno de aproximacion.

Él telescopio descansa en dos collares ó anillos, de los cuales puede separarse para las rectificaciones, quitando los pequeños pasadores *j j*. Un nivel, que se ve en la figura debajo del anteojo, está unido á él por medio de una charnela en un extremo, y en el otro lleva un tornillo pequeño *f* que permite subirlo ó bajarlo hasta colocarlo paralelo al eje óptico del anteojo: el otro tornillo *g* que está en el extremo opuesto sirve para mover el nivel lateralmente, conservando el paralelismo en este sentido.

En el foco del ocular se halla la retícula viéndose en la figura en *m* los tornillos que sirven para su rectificacion. A veces los teodolitos tienen un telescopio inferior colocado debajo del limbo, y cuyo uso es análogo al del círculo repetidor.

56º El teodolito debe satisfacer á las condiciones siguientes: 1ª: La linea de colimacion debe coincidir con el eje de los anillos cilíndricos, en los cuales gira el anteojo. 2ª: El nivel debe ser paralelo á la linea de colimacion rectificada. 3ª: El eje azimutal, ó el eje del limbo horizontal, debe ser perfectamente vertical. 4ª: La linea de colimacion ha de describir en su movimiento un plano vertical.

Para comprobar la primera condicion se dirigirá el anteojo á un punto bien definido de un objeto lejano, haciendo coincidir la interseccion de los hilos de la retícula con aquel punto, y si al dar al anteojo una vuelta completa al rededor de su eje de figura, cubre constantemente la interseccion al punto, el instrumento está correcto; si no sucede así, deberá moverse cada uno de los hilos separadamente, haciendo girar el anteojo 180°, siempre dentro de sus anillos, hasta que el nivel se halle encima, y entónces se corrige la mitad de la desviacion por medio de los tornillos de la retícula *m*, y la otra mitad por el de aproximacion del arco vertical. Si el hilo que se corrigió fué el horizontal, una operacion semejante servirá para rectificar el vertical. Debe tenerse presente al hacer esta correccion, que cuando el anteojo invierte los objetos, la retícula se ve en su posicion natural, miéntras que se verá invertida en un anteojo de combinacion terrestre.

La segunda condicion se comprueba quitando los pasadores *j j*, y abriendo los anillos del anteojo; despues se mueve el círculo vertical por medio del tornillo de aproximacion *P*, hasta que la burbuja del nivel unido al anteojo se encuentre en el medio del tubo. Entónces se desmonta el anteojo y se cambia extremo por extremo, observando si la burbuja vuelve á su posicion primitiva; y si no fuere así, sino que se haya dirigido hácia uno de los extremos del tubo, se notará la cantidad que se ha desviado, y se corregirá la mitad de la desviacion por medio del tornillo del nivel *f*, y la otra mitad por el tangencial *P*. Debe repetirse la operacion hasta que la correccion sea perfecta, y para conseguirlo se ha de mover tambien el nivel lateralmente, observando si la burbuja permanece en el centro del tubo, y en el caso de que se desvíe se corregirá moviendo los tornillos laterales *g*.

Para colocar el eje de rotacion vertical, se comenzará por nivelar aproximadamente el instrumento, moviendo las ramas del tripié, con el fin de no forzar mucho los tornillos al hacer con exactitud las correcciones que van á indicarse. Despues se coloca el anteojo en la direccion de dos de los tornillos para nivelar, haciendo mover solamente el limbo superior, y por medio del tornillo tangencial *P* del círculo vertical se pone la burbuja del nivel del anteojo en el medio del tubo, y si el limbo inferrior se halla horizontal, haciendo girar al superior 180° la burbuja no cambiará de posicion; pero si se desvía se vuelve al medio del tubo, haciéndola recorrer la mitad del espacio por los dos tornillos del pié del instrumento, y la otra mitad por el tangencial. En seguida se coloca el telescopio en la direccion del tercer tornillo para nivelar, ó de los otros dos, si el instrumento tiene cuatro, y se acaba de poner horizontal el limbo por medio de estos tornillos. Se vuelve el anteojo á la primera posicion y se acaba de perfeccionar la horizontalidad, despues de lo cual, si el instrumento está bien construido, haciendo girar el limbo superior solo y unido en seguida al limbo inferior, la burbuja debe ocupar el medio del tubo. Una vez nivelado el instrumento, valiéndose del nivel del anteojo, 'que es el mas sensible, se corrigen los otros dos que se hallan sobre la placa superior, moviendo solamente los tornillos de que están provistos para hacer esta correccion.

Para averiguar si está satisfecha la cuarta condicion, se nivela perfectamente el instrumento y se dirige el telescopio á un punto claro y determinado de un objeto elevado, haciendo coincidir con él la interseccion de los hilos. Despues se baja el anteojo dirigiéndolo á una vasija llena de agua, aceite ó mercurio, colocada en frente de él, y en la cual se vea por reflexion la imágen del objeto. Si la interseccion de los hilos coincide con la imágen refleja del punto que sirvió de mira, no habrá necesidad de correccion, siendo esto una prueba de que la retícula ha descrito un plano exactamente vertical; pero en el caso contrario se corrige el error modificando la altura de uno de los apoyos *K* ó *L* del eje de rotacion del telescopio, por medio del mecanismo particular anexo al instrumento, á fin de que este eje quede horizontal. En los teodolitos ingleses pequeños, los apoyos están desprovistos de medios de correccion, aunque los constructores procuran que su altura sea exactamente igual, de suerte que el error tenga poca importancia; en los de mayores dimensiones pueden moverse los apoyos, porque se hallan colocados sobre una pequeña armadura provista de tornillos que permiten elevarlos ó bajarlos suficientemente: en otros, por último, los apoyos están fijos; pero su parte superior donde descansa el eje, es susceptible de pequeños movimientos que se comunican por medio de tornillos propios para este objeto.

En lugar de valerse de una superficie reflectante para hacer esta rectificacion, es sin duda mas sencillo hacer uso de una plomada suspendida delante del instrumento, y á la distancia que sea conveniente para que se vea con claridad por el telescopio. Puesta la retícula en coincidencia con el hilo de la plomada, si el eje de rotacion es horizontal, deberá continuar cortándolo en toda su longitud, cuando se comunica al telescopio su movimiento vertical. Igual resultado puede conseguirse valiéndose de una arista de un edificio, con tal que sea perfectamente vertical.

57º Los teodolitos americanos, llamados *transit theodolite* (fig. 24ª), difieren esencialmente de los ingleses, en que el anteojo, por estar colocado á mayor altura respecto del limbo, puede dar una vuelta completa al derredor de su eje horizontal, al que está unido invariablemente. El nombre que se les ha dado proviene de la analogía que presenta esa construccion con la del instrumento astronómico llamado telescopio de tránsitos. Estos teodolitos, provistos de un círculo vertical completo, cuyo plano es paralelo al anteojo, al que va unido, reciben tambien el nombre de *altazimutes*, sobre todo cuando son de grandes dimensiones, y la perfeccion de su construccion los hace propios para las operaciones delicadas de la Geodesia y la Astronomía.

La graduacion del limbo inferior está cubierta por la lámina superior, quedando solamente libre en dos espacios que se hallan en los extremos opuestos de la placa superior en los que van colocados los vernieres. La aguja de la brújula es de mayores dimensiones que la del teodolito inglés.

58º Las rectificaciones del teodolito americano no presentan dificultad alguna, comprendiendo bien el objeto de las condiciones que debe llenar, y solamente describiré la correccion de la linea de colimacion, por ser diferente la manera con que el anteojo se halla colocado en el instrumento.

En este caso debe invertirse el órden de las rectificaciones, haciendo en primer lugar la de los niveles hasta lograr que el limbo guarde una posicion horizontal, despues de lo cual y suponiendo que *A* (fig. 25ª) es el instrumento colocado en un terreno bastante plano, se clava una ficha *B* á una distancia conveniente para que pueda verse con toda claridad por el telescopio del teodolito, y se pone en coincidencia con ella la interseccion de los hilos de la retícula. Fijando todo el instrumento, se mide la distancia de *A* á *B*, se hace girar el anteojo al rededor de su eje horizontal hasta que se halle en una direccion opuesta, y se hace colocar otra ficha en esta nueva direccion, á una distancia del teodolito igual á *A B*, y precisamente en coincidencia con los hilos de la retícula. Si la linea de colimacion es perpendicular al eje de rotacion *a b* del telescopio, habrá descrito en su movimiento un plano vertical, y la segunda ficha se habrá clavado en *B'* sobre la prolongacion de *A B;* pero si siendo *O E* la perpendicular al eje de rotacion *a b*, la linea de colimacion no coincide con ella, describirá en su movimiento una superficie cónica *B A C*, y la interseccion de los hilos señalará el punto *C* donde se clava la segunda ficha á una distancia del punto incógnito *E*, igual á *B O*. Para poner en claro el error y corregirlo se hace girar la placa del vernier solamente, hasta que el anteojo, que no debe tocarse, ocupe su posicion primitiva y se dirige de nuevo á la ficha *B*, fijando el limbo. En esta nueva situacion, la perpendicular *O E* habrá venido á colocarse en *O' E'*, simétricamente, aunque en sentido opuesto, respecto de la linea de colimacion *A B*, y si vuelve á hacerse girar el telescopio al derredor del eje de rotacion, que ahora ocupa la posicion *c d*, la linea de colimacion describirá la superficie cónica *B A D*, señalando el punto *D* en que se clava una tercera ficha. Como la distancia *C D* resulta necesariamente doble de *O O'*, y esta á su vez es doble del error *B O* = *B O'*, se marcará fácilmente el punto *E'* de la perpendicular al eje de rotacion, tomando desde *D* la cuarta parte de la pequeña distancia *C D*. Si en seguida se mueve la retícula por medio de sus tornillos hasta que coincida con *E'*, la nueva linea de colimacion quedará correcta, y será *O' E'* perpendicular al eje de rotacion *c d*.

Se puede comprobar inmediatamente la operacion, colocando otra ficha en *B'* á la mitad de la distancia *C D*, pues si se hace coincidir con ella la retícula del telescopio, valiéndose del tornillo tangencial del limbo, deberá hallarse la primera ficha *B* en la interseccion de los hilos, al dirigir el anteojo á ese punto en virtud de su movimiento vertical al derredor de su eje de rotacion. Si todavía se notare algun error, se repetirá la operacion hasta que los dos puntos opuestos se encuentren en la misma linea.

El mismo sistema de correccion es aplicable á los teodolitos ingleses, pues aunque sus telescopios no pueden dar una vuelta entera al derredor del eje horizontal de rotacion, sí pueden desmontarse é invertirse sobre sus collares; pero el medio que se indicó para su rectificacion es indudablemente mas rápido y sencillo que este.

59º Los teodolitos de construccion francesa difieren algo de los que he descrito hasta ahora, y presentan mas analogía con los construidos por Ertel en Munich, con la diferencia de que estos son generalmente instrumentos de mas precision que aquellos. El teodolito de Ertel está representado en la figura 26ª Su limbo se compone de dos círculos concéntricos, de los que el interior lleva el sistema de los nonius, y sostiene los apoyos B B' en que descansa el eje de rotaciones A A' del telescopio superior F F'. De estos apoyos, el uno es susceptible de acortarse ó prolongarse con tornillos destinados al efecto, con el objeto de practicar una de las rectificaciones que dirémos, y sobre el eje A A', cuyos extremos son cilíndricos y perfectamente iguales, se coloca un nivel H H' sostenido por dos apoyos, de los cuales uno es tambien susceptible de un pequeño aumento y diminucion y sirve igualmente para hacer otra rectificacion. Las retículas de los telescopios están provistas de tornillos para comunicarles movimiento perpendicularmente al eje óptico, á fin de colocar la interseccion de los hilos en un punto de este eje, y finalmente, el ocular movible permite tambien ver con la limpieza necesaria tanto la retícula como los objetos que se observan. Uno de los extremos A' del eje de rotacion del anteojo lleva un pequeño círculo vertical graduado G G' para medir los ángulos de altura, ó las distancias zenitales, y el otro A tiene un contrapeso para equilibrar el del círculo. Este está dividido en cuadrantes numerados de 0° á 90°, de tal modo que uno de los diámetros 0° 0° es paralelo al eje óptico del anteojo, y el otro perpendicular á él. Los nonius van fijos á los apoyos B B' que sostienen el eje A A', y deben estar arreglados de tal manera que estableciendo la coincidencia de sus *ceros* con los del círculo, la linea de colimacion sea paralela al horizonte, para lo cual están provistos de movimientos por medio de tornillos y de un pequeño nivel paralelo al plano del círculo. En la Nivelacion tratarémos del modo de practicar estas rectificaciones.

En los teodolitos de Ertel, muchas veces el anteojo superior no es recto, sino rectangular ó *acodado* con el objeto de que pueda dar una vuelta entera sobre su eje, y en tal caso tiene en el interior del tubo un espejo metálico ó un prisma de vidrio que recibe los rayos luminosos bajo un ángulo de 45° y los refleja perpendicularmente á su direccion primitiva, de tal suerte, que el ocular queda situado en uno de los extremos A del eje. Pero de todos modos este eje puede invertirse sobre sus apoyos terminados en forma de Y, disposicion que permite situar el círculo vertical tanto á la derecha como á la izquierda del observador, y sirve para ejecutar varias correcciones, entre otras, la de rectificar la horizontalidad de la linea de los ceros.

Como en todos los teodolitos, los movimientos de este son: 1º de toda la parte superior, esto es del limbo con los nonius y el anteojo: 2º del círculo interior solamente con los nonius y el anteojo: 3º del anteojo solo en un plano perpendicular al del limbo: 4º del anteojo inferior tanto en direccion vertical como horizontal. Por último, el instrumento tiene tornillos de presion para contener los movimientos generales, y de aproximacion para comunicarlos con lentitud.

60º Las principales condiciones que debe llenar el teodolito de esta construccion y que incluyen las que se han indicado respecto del teodolito inglés, son:

I. El eje $A\ A'$ debe ser paralelo al plano del limbo.

II. La linea de colimacion debe ser perpendicular al eje de rotacion $A\ A'$

Para comprobar y rectificar la primera, sirve el nivel $H\ H'$ de que hemos hablado; mas como es difícil que sus dos piés sean exactamente iguales, lo primero que debe hacerse es corregirlo, haciendo que sea perfectamente paralelo el eje de rotacion, lo cual se practica de este modo. Se establece el instrumento de manera que el eje de rotacion $A\ A'$ quede en la direccion de uno de los tornillos T de los piés, y se paralizan todos los movimientos. En seguida se coloca el nivel $H\ H'$ en su lugar sobre los extremos del eje, y se mueve el tornillo del pié hasta que la burbuja ocupe el medio del tubo. Despues se invierte el nivel, y entónces si sus piés son iguales, la burbuja volverá al mismo lugar, mas si hay alguna diferencia entre ellos, se inclinará hácia uno de los extremos del tubo, en cuyo caso debe volverse al centro dividiendo la correccion en dos partes iguales de las que una se hace por medio del tornillo del pié, y la otra aumentando ó disminuyendo la longitud de uno de los apoyos del nivel, usando los tornillos de que está provisto para el caso. Debe repetirse el procedimiento hasta que en las dos posiciones del nivel, la burbuja no salga de su centro, siendo esta la prueba de que ambos apoyos son perfectamente iguales, y de consiguiente de que los ejes de rotacion y del nivel son paralelos.

Para establecer ahora el paralelismo entre el plano del limbo y el eje de rotacion, se hace girar el instrumento 180° al derredor de la columna vertical *C* sin tocar el nivel, y si la burbuja despues de oscilar se fija en el centro, subsiste el paralelismo; mas en el caso contrario se hace la correccion la mitad con el tornillo del pié y la otra mitad modificando la longitud de uno de los apoyos B B' del eje, con los tornillos destinados al efecto. Se repite la operacion hasta corregir completamente el pequeño error que pueda quedar.

Una vez satisfechos de esta rectificacion, se procede á nivelar el limbo, lo que se practica así: La operacion anterior dá á conocer que la linea trazada en el limbo paralelamente al eje A A' es horizontal; luego si concebimos que este plano se mueva al derredor de esta linea, hasta que un diámetro perpendicular á ella y paralelo al horizonte, quede contenido en él, entónces el círculo, conteniendo á la vez las dos rectas horizontales, quedará tambien horizontal. De consiguiente, hágase girar el instrumento 90° al derredor de la columna, de modo que el eje de rotacion A A' venga á situarse en la direccion de los otros dos tornillos del pié, y obsérvese si la burbuja se restablece en medio del tubo, en cuyo caso el diámetro del círculo paralelo á esta nueva direccion será tambien horizontal, y no habrá que hacer correccion alguna; mas si no fuere así, condúzcase otra vez la burbuja al centro usando los dos tornillos del pié, esto es, bajando el uno y subiendo el otro al mismo tiempo, hasta que no haya error. Comunmente todas estas correcciones no se consiguen inmediatamente, sino poco á poco, y es acaso preferible hacerlas lo mejor que sea posible á la primera vez, y en seguida volver á comenzar tomando por punto de partida la direccion de otro de los tornillos del pié. El teodolito estará perfectamente nivelado cuando dándole una vuelta entera con suavidad, la burbuja no deje el medio del tubo. No cesarémos de recomendar el manejo de los instrumentos y la ejecucion de todas sus correcciones, pues solo la práctica dá el tino que se necesita para conseguirlas exacta y prontamente.

Luego que se ha nivelado bien el teodolito se examina si existe la segunda de las condiciones indicadas, de la manera que vamos á enseñar. Hemos dicho que se llama *linea de colimacion* la recta que une el centro de curvatura del objetivo con la interseccion de los hilos de la retícula, á diferencia del *eje óptico*, que es la que une los centros de curvatura de ambos lentes, y que se supone perpendicular al eje de rotacion. Como la retícula es movible, sucede con frecuencia que la linea de colimacion no coincide con el eje óptico, ó lo que es lo mismo, que no es perpendicuar al eje de rotacion $A\ A'$ del anteojo. Para restablecer la coincidencia, despues de nivelado el teodolito, se dirige el telescopio á un objeto distante y bien definido C, (fig. 27ª) tal como la arista de un edificio lejano, y luego que se ha hecho coincidir con la interseccion de los hilos y se ha fijado perfectamente el instrumento, se quita el anteojo de sus apoyos con el mayor cuidado para no producir movimiento alguno, y se invierten los extremos del eje de rotacion $A\ A'$, de modo que el que estaba á la derecha venga á quedar á la izquierda, y se vuelve á observar el mismo objeto. Si en esta nueva posicion queda siempre cortado por los hilos, no habrá error alguno; mas si este existe, la linea de colimacion habrá tomado una posicion $E\ C'$ que forma con la primera un ángulo $C\ E\ C'$ doble del error, de modo que la interseccion de los hilos se presentará desviada de la señal C. Para corregirla se moverá la retícula una cantidad igual á la mitad del desvío, de modo que la interseccion se coloque en F siendo entónces $E\ F$ perpendicular al eje $A\ A'$. Como es muy difícil apreciar á la simple vista la mitad de la pequeña distancia $C\ C'$, se mueve todo el teodolito hasta colocar otra vez la interseccion de los hilos en el objeto C, y se repite la operacion corrigiendo poco á poco el error hasta obtener la coincidencia en ambas posiciones. Estas correcciones una vez hechas no son muy susceptibles de desarreglo, pero conviene comprobarlas de tiempo en tiempo.

Los teodolitos franceses tienen casi siempre dos niveles fijos al limbo en posicion rectangular, y cada uno de ellos debe corregirse separadamente para situarlos con exactitud paralelamente al círculo, procediendo segun se ha visto, en dos direcciones perpendiculares la una á la otra, y destruyendo el desvío de la burbuja tanto con los tornillos del pié como con los del nivel. Una vez corregidos, el limbo estará horizontal cuando en toda una revolucion las burbujas permanezcan en el centro.

Como se ve por todo lo que precede, las ligeras variaciones de construccion que se han indicado, no alteran la propiedad fundamental del teodolito, que consiste en dar los ángulos ya reducidos al horizonte, y puede decirse que los de cualquiera sistema son igualmente buenos, con tal que estén bien construidos. Los de la fábrica de Troughton & Simms son generalmente de muy buena construccion, y la finura y exactitud de las divisiones, unidas á la solidez de todas sus partes, así como la suavidad de los movimientos y bondad de los anteojos me inducen á recomendarlos particularmente. Aun los pequeños de 5 ó 6 pulgadas de diámetro proporcionan resultados suficientemente exactos para casi todas las operaciones topográficas.

61º Despues de bien nivelado el teodolito, el modo de tomar los ángulos es enteramente el mismo que con el círculo repetidor; pero como por lo comun el anteojo inferior no tiene tornillo de aproximacion, es preferible el primer método de repeticion que explicamos (Nº 49º) usando este anteojo únicamente para denunciar movimientos irregulares. Ademas, como es difícil destruir completamente el error de colimacion, y por otra parte, puede existir otro pequeñísimo de exentricidad, cuando se desea proceder con la mayor precision, debe observarse el mismo ángulo repitiéndolo en las dos posiciones inversas del telescopio, y tomar el término medio de los dos resultados. Como ejemplo pongo á la vista los que obtuve midiendo desde el Observatorio del Colegio de Minería al ángulo entre las señales del Peñon y del cerro de los Gachupines: llamarémos *posicion directa* del anteojo aquella en que el círculo vertical queda á la derecha del observador, y *posicion inversa* cuando queda á la izquierda.

POSICION DIRECTA.			POSICION INVERSA.	
$n = 10$	$g = +7.''5$		$n = 10$	$g = +7.''5$
	$G = 607° 48' 45.''0$			$G = 607° 48' 17.''5$
	$60° 46' 51.''75$......	$a = \dfrac{G - g}{n}$......		$60° 46' 49.''00$

El promedio de ambos resultados es $60° 46' 50.''4$. La semidiferencia 1.″37 puede considerarse como el efecto de las causas de error mencionadas.

62º Ya que nos hemos hecho cargo del manejo del teodolito y de sus rectificaciones, demostrarémos las ventajas teóricas de la repeticion de los ángulos. Fácilmente se concibe que por exacto que sea un instrumento, y á pesar del cuidado que se ponga en corregirlo y usarlo, siempre es posible cometer errores demasiado pequeños á la verdad, para que nuestros sentidos puedan valuarlos aisladamente; pero cuya influencia se hace sentir en los resultados, segun verémos al hablar del modo de comprobarlos. En la medida de los ángulos los errores que resultan deben atribuirse á diversas causas, como son: 1ª *Error de mira*, esto es, falta de coincidencia exacta entre la interseccion de los hilos y la señal observada. 2ª Errores de la graduacion del limbo y de la exentricidad del anteojo. 3ª Errores de lectura en los que se comprenden los que provienen de la aproximacion angular que es siempre limitada. 4ª Error de colimacion.

Error de visual

La primera causa de error tiene lugar cuando la señal que se observa, ó los hilos de la retícula presentan un espesor sensible. Como midiendo varias veces el mismo ángulo, se tiene derecho para esperar compensacion, quiere decir, que este error aumente unas veces, y otras disminuya el valor del ángulo verdadero, puede suponerse que el promedio de las observaciones, resulta sensiblemente independiente de él. Por otra parte, debe usarse siempre una retícula muy fina, y dar á las señales solo el grueso necesario para distinguirlas con claridad.

Igualmente la repeticion nulifica casi del todo los pequeños errores que pueden existir en las divisiones y en la centracion, puesto que el ángulo se mide con diferentes partes de la graduacion, y que siempre se adopta el término medio de las indicaciones de todos los nonius.

Con respecto á los errores de lectura y aproximacion, recordemos que como el punto de partida de cada observacion es el mismo en que se detuvo el vernier al fin de la anterior, no hay que hacer mas que las lecturas g y G; y hemos visto que siendo n el número de repeticiones, se tiene:

$$a = \frac{G - g}{n}$$

Si suponemos que se cometen los errores α y β en los valores de G y g respectivamente, el que resulta en el ángulo será x, de modo que se tenga:

$$a + x = \frac{(G + \alpha) - (g + \beta)}{n} = \frac{G - g}{n} + \frac{\alpha - \beta}{n}.$$

Reduciendo con ayuda de la primera ecuacion, se obtiene:

$$x = \frac{\alpha}{n} - \frac{\beta}{n}$$

Este resultado demuestra que para los mismos valores de α y β, el de x disminuye al paso que crece n, y como siempre α y β son muy pequeños, puede considerarse x casi nulo cuando n es suficientemente grande. Para hacer esto mas palpable, supongamos que ademas de los grados y minutos, sea *24* el número de segundos del ángulo que se mide; mas si la aproximacion del instrumento es solo de 10″, y no se hace mas que una observacion, aun cuando no se cometa ningun otro error, nos verémos precisados á tomar ó 20″ ó 30″, resultando en el primer caso una diferencia de 4″ y de 6″ en el segundo: esto es, todo el error de lectura ó aproximacion afectará al ángulo. No sucederia lo mismo despues de diez observaciones, por ejemplo, pues los mismos errores producirán solo 0.″4 ó 0.″6 en el resultado.

Por lo que toca al error de colimacion, hemos visto que el modo de eliminar sus efectos casi siempre inapreciables, es observar en las dos posiciones del anteojo.

63º Hay teodolitos llamados *exéntricos ó doblemente repetidores*, # cuyo anteojo está establecido en el extremo de un diámetro del limbo, y que se mueve paralelamente á otro círculo vertical destinado á la medida y repeticion de las distancias zenitales. Cuando se quiere tomar con ellos el ángulo horizontal entre dos objetos, es preciso hacer la doble observacion, esto es, repetirlo tanto con el anteojo á la derecha como á la izquierda, y el medio de ambos resultados es el ángulo que se busca.

Sea en efecto $A\,C\,B = x$ (fig. 28ª) el ángulo, y supongamos que se comienza con el anteojo á la derecha. Dirigido á la primera señal ocupará la posicion $a\,A$, y llevado á la segunda, quedará segun $b\,B$, de modo que el arco recorrido es $a\,C\,b = \alpha$. En seguida se lleva el anteojo á la izquierda, ocupando sucesivamente las direcciones $a'\,A$ y $b'\,B$, y siendo el ángulo $a'\,C\,b' = \alpha'$.

Se llaman doblemente repetidores cuando tienen dos anteojos, pues pueden ser excéntricos sin ser doblemente repetidores

Los ángulos $A\ O\ B$ y $B\ O'\ A$ son iguales á α y α' respectivamente, puesto que en los cuadriláteros $C\ a\ O\ b$ y $C\ a'\ O'\ b'$ los ángulos en C y en O son suplementarios; luego en los triángulos DOB y $DO'A$, se tendrá:

$$\alpha = A\ D\ B - B \quad \text{y} \quad \alpha' = A\ D\ B - A$$

de donde resulta.

$$\alpha + \alpha' = 2\ A\ D\ B - (A + B)$$

Si prolongamos la recta $C\ D$, sera fácil obtener:

$$A\ C\ B = x = A\ D\ B - \tfrac{1}{2}\,(A + B)$$

luego eliminando á $A\ D\ B$ entre esta ecuacion y la anterior, resultará finalmente:

$$x = \tfrac{1}{2}\,(\alpha + \alpha')$$

Las cantidades α y α' son los resultados de las series observadas con el anteojo á la derecha y á la izquierda.

64º Cualquiera que sea el instrumento que se use, debe ponerse el mayor esmero en su manejo, evitando movimientos bruscos ó demasiado rápidos que lo desarreglen, y no continuando la operacion sino hasta estar perfectamente seguros de que las retículas cortan bien las señales. Cuando el inferior se use como anteojo de prueba y se note alguna desviacion, no debe fijarse definitivamente el superior sin haber restablecido la coincidencia entre aquel y la señal, por medio del tornillo de aproximacion que mueve todo el instrumento. Las visuales se dirigirán siempre al pié de las señales por temor de que las astas tengan alguna ligera inclinacion que influiria necesariamente en los resultados, observándolas á diversas alturas, y tambien se procurará que la retícula se acerque lo mas que se pueda á las banderas solo por los movimientos generales, á fin de no hacer de los tornillos de aproximacion mas que el uso necesario para establecer bien el contacto, pues como su longitud es por lo comun bastante limitada, sucede á veces que se termina su curso ántes de concluir la serie del ángulo que se mide, lo cual podria interrumpir la observacion ó causar algun movimiento irregular en el teodolito. Luego que la señal se presenta en el *campo* del anteojo, ó espacio circular que limita la vista, para saber en qué sentido deben hacerse los movimientos, se tendrá presente que siempre en estos anteojos las imágenes de los objetos exteriores se presentan invertidas, pues aunque aumentando el número de lentes podrian verse en su estado natural, se disminuiria con esto la cantidad de luz perjudicándose la claridad de la vision que es el objeto mas importante.

Como prevenciones generales añadirémos que deben evitarse las observaciones á medio dia cuando el sol es demasiado ardiente, porque las ondulaciones de la atmósfera, especialmente en los terrenos bajos, producen mucha incertidumbre en la direccion de las visuales, haciendo aparecer los objetos con un movimiento vibratorio. Los mejores resultados se obtienen por las mañanas muy temprano, ó por las tardes desde cosa de las cuatro en adelante, y en general en los dias nublados y no calinosos.

Cuando el punto de estacion es vértice de varios triángulos, es de desearse que se observen todos los ángulos de una sola vez, esto es, sin tener que poner varias veces el teodolito, pues gran parte de las discordancias que se notan en las series del mismo ángulo, ó en el conjunto de los resultados, proviene de que es muy difícil situar siempre el centro del instrumento exactamente en el mismo punto, ó en la vertical de la estacion. Despues de haber medido todos los ángulos de la triangulacion primaria, se toman los de las secundarias, teniendo cuidado de referir ó enlazar algun punto de estas con dos vértices por lo ménos de la fundamental. En el caso que consideramos bastaria, en rigor, deducir el último de los ángulos que tienen el vértice comun, puesto que la suma de todos ellos debe ser igual á 360°; pero se miden siempre todos para comprobar las observaciones, y en el caso de que la suma difiera algo de 360°, deberá dividirse, por regla general, el error, que supondrémos muy pequeño, entre todos los ángulos observados por partes iguales; mas si alguno de ellos es ménos digno de confianza que los demas, ya sea porque se haya repetido menor número de veces, ó ya porque se haya tomado en circunstancias mas desfavorables, debe aplicársele una parte mas considerable de la correccion, aunque conviene decir en general, que esta clase de modificaciones de los valores obtenidos por la observacion, deben hacerse con la mayor circunspeccion y jamas de una manera enteramente arbitraria.

65º No se puede asentar regla alguna invariable sobre el número de veces que deben repetirse los ángulos, ni sobre el mayor error que debe admitirse en cada triángulo, pues esto depende tanto de la aproximacion del teodolito como de la mayor ó menor precision que se desea obtener, segun la importancia de la operacion; pero creo que con buenos instrumentos basta en todos casos repetir de cuatro á seis veces los ángulos de la cadena principal, y de dos á cuatro los de las otras, y con respecto á los errores me atrevo á proponer que no se tolere en las triangulaciones de alguna importancia un error que exceda de 20″ por ángulo, y en las secundarias desde 20″ hasta 1′ esto es, admitiendo mayor error al paso que disminuye la magnitud ó importancia de los triángulos. En general, el error de cada ángulo no debe exceder de la aproximacion que dá el instrumento, y en cada órden de triángulos se deben repetir los ángulos un mismo número de veces.

Durante la marcha de las operaciones deben aprovecharse todas las comprobaciones que se presenten, como son: ligar siempre que se pueda las triangulaciones secundarias con las principales, tomar algunas veces dos ó mas ángulos adyacentes como si fuera uno solo, y comparar el resultado con la suma que dán medidos aisladamente, situar cada punto desde el mayor número posible de vértices &c., &c. En general, la armonía de los resultados es tanto mayor, cuanto mas íntimo es el enlace de las operaciones, y teniendo esto presente, el ingeniero buscará el mejor modo de proceder, pues seria imposible enumerar aquí los distintos casos que se presentan segun las localidades, y de los que debe sacar el mejor partido posible.

66º Al paso que se procede, se van inscribiendo las observaciones en un *apunte* ó *registro* en el que se anotan las estaciones que se van ocupando, los puntos que desde ellas se observan con los nombres, letras ó números que los designan, las indicaciones del principio y fin de cada serie en los nonius, los valores medios de los ángulos, y finalmente, todas las notas que se crean necesarias para mayor claridad. Como ejemplo pondré á la vista las observaciones hechas en la estacion *A* de la figura 29ª que representa algunos triángulos de la cadena topográfica del Distrito. Las lineas llenas forman la triangulacion principal medida especialmente por el ingeniero D.

Miguel Iglesias, y algunos triángulos por el Sr. D. J. Antonio de la Peña, y las puntuadas representan la cadena secundaria ejecutada por el ingeniero D. Ramon Almaraz. Aquí solo pondré los ángulos de la primera, que se han tomado seis veces en cada posicion del anteojo, haciendo uso de teodolitos de Ertel con dos vernieres.

TRIANGULACION DEL DISTRITO.

ESTACION EN LA IGLESIA DE IXTACALCO.

POSICION DIRECTA.

VÉRTICES OBSERVADOS.	LETRAS	REPETICIONES.	I NONIUS.	II	ANGULOS MEDIOS.	NOTAS.
Iglesia de Mexicaltzingo.	B	0	77° 28′ 30″	29′ 30″		La base de esta cadena es el lado F G, &c.
Iglesia de San Simon......	X	1	137 4 00	5 00		
” ” ”	”	6	75 1 40	2 40	59° 35′ 31.″7	
Iglesia de San Simon......	X	0	68 58 50	59 40		
Garita de la Candelaria...	Z	1	152 52 20	53 30		
” ” ”	”	6	212 21 40	22 30	83° 53′ 48.″3	
Garita de la Candelaria...	Z	0	212 21 40	22 30		
Extremo occidental de la base..........................	G	1	285 19 00	19 10		
” ” ”	”	6	290 1 30	2 10	72° 56′ 37.″5	
Extremo occidental de la base..........................	G	0	16 11 45	10 40		
Puente llamado «*Tres Puentes.*»..................	H	1	84 23 00	22 20		
” ” ”	”	6	65 21 10	20 10	68° 11′ 34.″6	
Tres Puentes..................	H	0	65 21 10	20 10		
Iglesia de Mexicaltzingo.	B	1	140 42 50	42 30		
” ” ”	”	6	157 33 10	33 00	75° 22′ 4.″2	

POSICION INVERSA.

VÉRTICES OBSERVADOS.	LETRAS	REPETICIONES.	I NONIUS.	II	ANGULOS MEDIOS.	NOTAS.
Iglesia de Mexicaltzingo.	B	0	110° 2′ 10″	1′ 30″		
Iglesia de San Simon......	X	6	107 36 20	35 40	59° 35′ 41.″7	
Iglesia de San Simon......	X	0	107 36 20	35 40		
Garita de la Candelaria...	Z	6	250 59 00	58 00	83° 53′ 45.″0	
Garita de la Candelaria...	Z	0	298 32 30	31 10		
Extremo occidental de la base..........................	G	6	16 11 50	10 40	72° 56′ 34.″2	
Extremo occidental de la base..........................	G	0	69 45 20	46 10		
Tres Puentes..................	H	6	118 55 20	56 20	68° 11′ 40.″8	
Tres Puentes..................	H	0	337 33 00	33 10		
Iglesia de Mexicaltzingo.	B	6	69 45 20	46 10	75° 22′ 6.″7	

De igual manera se procede en todas las demas estaciones. En la tercera columna de la tabla anterior, el *0* expresa para cada nonius la indicacion del instrumento cuando se dirige al primer punto para comenzar la serie, y el *1* la primera lectura que se hace para conocer el valor aproximativo del ángulo, y determinar así el número de circunferencias enteras que ha recorrido el vernier al llegar á la sexta observacion. La fórmula del núm. 49 dá: $G = an + g$; de modo que despues de sustituir el valor aproximativo de a, el valor de G, comparado con la última lectura, indicará el número de circunferencias. Por ejemplo, la observacion directa del último ángulo entre Tres Puentes y Mexicaltzingo, dá: $g = 65° \ 20' \ 40''$, y restando esta cantidad de la primera lectura, se tiene el ángulo aproximativo $a = 75° \ 22'$; luego $G = (75° \ 22') \times 6 + 65° \ 20' \ 40'' = 517° \ 32' \ 40''$. Como la última indicacion es: $157° \ 33' \ 5''$ es claro que el vernier habrá recorrido una circunferencia solamente, y el valor correcto de G será: $G = 360° + 157° \ 33' \ 5'' = 517° \ 33' \ 5''$, lo cual dará: $a = \frac{G-g}{6} = 75° \ 22' \ 4.''2$, que es la cantidad inscrita en la sexta columna. Igualmente la observacion inversa indica.................. $(75° \ 22') \times 6 + 337° \ 33' \ 5'' = 789° \ 45' \ 5''$, de suerte que para que la última lectura se acerque á este valor será preciso añadirle dos circunferencias ó $720°$, hecho lo cual se tiene el valor de....... $G = 789° \ 45' \ 45''$. Siendo $g = 337° \ 33' \ 5''$, el ángulo .... $\frac{G-g}{6} = 75° \ 22' \ 6.''7$. Tomando el medio, el ángulo finalmente observado, será: $H \ A \ B = 75° \ 22' \ 5.''45$. Todos estos cálculos son muy sencillos, y con alguna práctica se consigue hacerlos en la memoria sin recurrir á los números.

67º Es muy conveniente observar todos los ángulos que tienen por vértice un mismo punto de la manera siguiente: despues de anotado el punto de partida se dirige la primera visual á cualquiera de las señales, á *A* por ejemplo (fig. 30ª), y se fija el limbo llevando el anteojo á la señal inmediata *B*. Hasta aquí se ha marchado de acuerdo con el método enseñado; pero en lugar de seguir repitiendo el mismo ángulo, se lee la indicacion de los nonuis y se lleva el telescopio á la señal que sigue *C*, donde se vuelve á leer el ángulo, y se continúa de este modo hasta la última *E*. Es evidente que la diferencia de los arcos obtenidos para cada dos señales es igual al ángulo que estas forman entre sí, y se tomará por su valor definitivo el medio de todos los resultados que se tienen repitiendo la operacion cuantas veces se quiera, y tomando otros de los vértices por puntos de partida. Las ventajas principales de este procedimiento consisten en que la suma de todos los ángulos observados al derredor de un punto es siempre igual á 360°, y de consiguiente no hay que hacer correccion alguna, y que, lo mismo que en el método comun de repeticion, cada ángulo se toma con diferentes partes de la graduacion. Su única desventaja consiste en que las muchas lecturas que es preciso hacer, ocupan mas tiempo; pero hay sin embargo una circunstacia que disminuye notablemente este defecto, y es que obteniendo cada resultado parcial, se pueden desechar aquellos notoriamente erróneos, lo que no sucede en el método comun, en que el error que se cometa en alguna de las visuales, influye siempre en el valor final del ángulo.

La disposicion que se dá al registro cuando se sigue este método de observacion, es así:

TRIANGULACION DE............. —POSICION DIRECTA.

Estaciones.	Puntos observads	REPETICIONES. 1ª	2ª	3ª	4ª	Angulos medios.	NOTAS.
	A	000° 00′ 00″	316° 17′ 30″	251° 38′ 10″	164° 10′ 20″		
						43° 42′ 24″	
	B	43 42 25	000 00 00	295 20 20	207 52 50		Puesto un vernier en 0 el otro señalaba exactamente 180°; de consiguiente $g = 0$
						64 39 41	
F	*C*	108 22 10	64 39 40	000 00 00	272 32 30		
						87 27 29	
	D	195 49 40	152 7 10	87 27 25	000 00 00		
						79 52 17	
	E	275 41 50	231 59 30	167 19 50	79 52 15		
						84 18 9	

Para la posicion inversa del anteojo se adopta absolutamente la misma forma. En la segunda serie de observaciones se ha comenzado por *B*, en la tercera por *C*, y así sucesivamente. Fácilmente se comprende que en lugar de 00° 00′ 00″ se habria podido tomar cualquiera otra indicacion por punto de partida, y cuando los nonius no se correspondan exactamente se anotará en la última columna el valor de g para cada serie.

Veamos cómo se deducen los ángulos observados, por ejemplo, entre el último punto *E* y el primero *A*.

Por la primera serie se tiene:	360° 00′ 00″	— 275° 41′ 50″	= 84° 18′ 10″
„ „ segunda „ „	316 17 30	— 231 59 30	= 84 18 00
„ „ tercera „ „	251 38 10	— 167 19 50	= 84 18 20
„ „ cuarta „ „	164 10 20	— 79 52 15	= 84 18 5

Valor medio del ángulo *E F A*...... = 84° 18′ 8.″75

No contando mas que los segundos se tiene: 84° 18′ 9″ que es la cantidad escrita en la sétima columna.

68º Con los valores que resultan de las observaciones, al paso que se practican, se va formando un cróquis semejante al de la figura 29ª, que sirve para dar á conocer la colocacion relativa de los vértices y cuyo objeto es facilitar las operaciones posteriores. En él se representa la base con arreglo á una escala cualquiera, y los ángulos se construyen con el *trasportador*, que es un semicírculo graduado que acompaña generalmente á los estuches de instrumentos de delineacion, ó mas exactamente, valiéndose de una tabla de cuerdas. Hay impresas estas tablas que dán las cuerdas que corresponden á todos los arcos desde 0° hasta 180°, de minuto en minuto; pero cuando no se tienen, se calcula la correspondiente al ángulo que se quiere construir, recordando que si este se designa por a, y se supone el radio igual á r, se tiene la cuerda por la relacion $c = 2\, r \text{ sen.} \frac{1}{2} a$ facilísima de valuar por logaritmos.

Supongamos que sobre la recta $F\,G$ (fig. 31ª) se quiera construir un ángulo de 47° 19′ 21″. Con un radio cualquiera, por ejemplo, de 0^m2, se describirá desde G un arco indefinido $A\ B$ y para conocer la cuerda se tendrá:

Log. 2....................	0.30103	
„ r....................	9.30103	
„ sen. 23° 39′ 40″	9.60350	
„ c....................	9.20556	$c = 0^m1605$

de consiguiente, con esta cantidad como radio se trazará desde A otro arco, cuya interseccion con el primero determina el punto B, que unido con G, formará con $F\ G$ el ángulo que se desea......... $F\ G\ B = 47°\ 19'\ 21''$. Al fin de esta obra se verá una tabla de cuerdas calculadas para $r = 1$, y de la cual pueden tomarse, para cualquiera otro radio, multiplicándolas por el nuevo valor de r. Para el ángulo del ejemplo anterior la cuerda de la tabla es 0.8027, que multiplicada por 0^m2, radio que se adoptó en la construccion, dá 0^m1605 como por el cálculo directo.

Se podria tambien construir el ángulo valiéndose de su tangente, puesto que se tiene: $A\ C = A\ G \text{ tan. } A\ G\ B = r \text{ tan. } a$. En nuestro caso resultará:

log. r.................. 9.30103
„ tan. 47° 19′ 21″ 0.03525

„ $A\ C$.............. 9.33628 $A\ C = 0^m.2169$

de modo que no habrá mas que tomar esta longitud en la perpendicular levantada en A, y se unirán los puntos G y C.

Si el ángulo por construir $F\ G\ B$ (fig. 32ª) es muy obtuso, es preferible prolongar la linea $F\ G$, y trazar el ángulo.............. $B\ G\ F' = 180° - a$, ó bien se hará la construccion de este último hácia abajo de $F\ G$ prolongando la linea $B'\ B$ que resulta. Cuando se hace uso de la tangente y el ángulo difiera poco de 90°, como las tangentes son muy grandes, es tambien mas cómodo levantar en G una perpendicular y construir sobre ella el complemento del ángulo que se desea.

De esta manera con la base de la triangulacion $F\ G$ (fig. 29ª) y los ángulos adyacentes $F\ G\ H$ y $G\ F\ H$ se construye el primer triángulo, y los lados de este sirven á su vez de bases para proseguir la formacion del cróquis. Por lo comun se trazan con tintas de color diferente los diversos órdenes de triángulos para distinguirlos.

69º Ocupémonos ahora de algunos casos particulares que se presentan en la medida de los ángulos. Cuando se adoptan por señales las cruces de las torres, veletas, edificios, &c., sucede con frecuencia que no es posible colocarse en ellas, ni en ningun punto de su vertical, cuando se deben observar los ángulos que tienen allí su vértice, y entónces se toman situando el instrumento lo mas cerca que se pueda del centro de estacion, y se reducen á este último punto por medio de un sencillo cálculo que voy á indicar.

Sea C (fig. 33ª) el centro de estacion, O el punto desde donde se observan los vértices A y B, y designemos ademas por O el ángulo medido $A\ O\ B$, y por x el que se busca $A\ C\ B$. Se mide con el mayor cuidado la pequeña distancia $C\ O = r$, y el ángulo $C\ O\ A = d$ que se llama *ángulo de direccion.*

Con estas anotaciones tendrémos:

$$A\ M\ B = O + C\ B\ O = x + C\ A\ O:$$

de donde resulta:

$$x - O = C\ B\ O - C\ A\ O$$

Para obtener los valores que forman el segundo miembro, llamarémos D y S respectivamente los lados $C\ B$ y $C\ A$ del triángulo, esto es, las distancias del centro de estacion á las señales de la derecha y de la izquierda, y tendrémos en el triángulo $C\ O\ B$

$$D : r :: \text{sen.}\ (O + d) : \text{sen.}\ C\ B\ O, \text{ de donde: sen. } C B\ O = \frac{r \text{ sen. } (O + d)}{D}$$

y en el triángulo $C\ O\ A$

$$S : r :: \text{sen. } d : \text{sen. } C\ A\ O, \text{ de donde: sen. } C\ A\ O = \frac{r \text{ sen. } d}{S}$$

Como r es siempre muy pequeño con respecto á los lados de los triángulos, $C\ B\ O$ y $C\ A\ O$ lo son tambien, y podemos tomar los arcos en partes del radio por sus senos, con lo que sustituyendo se tiene la diferencia entre el ángulo observado y el reducido al centro de estacion:

$$x - O = \frac{r \text{ sen. } (O + d)}{D} - \frac{r \text{ sen. } d}{S} \dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

Esta diferencia queda igualmente expresada en partes del radio, y para expresarla por su número de segundos, será preciso multiplicarla por sen. 1'', lo que equivale á dividir el segundo miembro por este factor, hecho lo cual se obtiene finalmente:

$$x - O = \frac{r \text{ sen. } (O + d)}{D \text{ sen. } 1''} - \frac{r \text{ sen. } d}{S \text{ sen. } 1''} \dots\dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

Los lados D y S se obtienen por la resolucion aproximativa del triángulo $A\ B\ C$, en que se deduce el tercer ángulo C, ó aun se usa el observado en O suponiéndolo igual á C. Esta suposicion no ocasiona error sensible puesto que $x - O$ solo expresa un corto número de segundos; mas si despues de aplicada la fórmula se ve que difieren bastante C y O, se repite el cálculo usando los nuevos valores obtenidos, aunque repito que raras veces es necesario (*Vease la nota del núm. 34.*)

En la ecuacion anterior es de mas influencia r que d; por consiguiente, debe medirse r con mucha precision tomando para d solo los grados y minutos. Se tendrá presente que este ángulo de direccion está comprendido entre el centro de la estacion C, y la señal de la izquierda A, y como el punto O puede ocupar diversas posiciones con respecto á C, se pondrá cuidado en dar á sen. $(O + d)$

y sen. d los signos que les correspondan segun los valores de los arcos.

Por ejemplo, el Sr. ingeniero Peña hizo en la estacion de Mixcoac las siguientes observaciones: ángulo tomado fuera del centro, entre Coyoacan y San Angel, $O = 52° 30' 12''$; ángulo de direccion, $d = 79° 15' 40''$; distancia al centro, $r = 0^m.847$; distancia aproximativa entre Mixcoac y San Angel, $D = 3001^m$; distancia aproximativa entre Mixcoac y Coyoacan, $S = 3294^m$. Con estos datos se tiene:

log. r	9.92788		9.92788	Primer término	$+43.''42$
„ sen. $(O+d)$	9.87268+	sen. d	9.99233+	Segundo id.	$-52.\ 11$
C log. sen. $1''$	5.31443		5.31443	$x - O =$	$-8.''7$
„ D	—3.47727	S	—3.51772	$O =$	$52° 30' 12.''0$
	1.63772+		1.71692+	$x =$	$52° 30' 3.''3$

70º Los signos que pongo despues de los logaritmos indican la naturaleza de los números correspondientes, esto es, si son positivos ó negativos; miéntras que los que van ántes expresan las operaciones que con ellos deben ejecutarse, segun la fórmula. Estas anotaciones son útiles para seguir las reglas del álgebra, y las adoptaré en los cálculos, porque evitan las equivocaciones de los signos. En el ejemplo que sigue cambia de signo uno de los términos.

El mismo ingeniero obtuvo en la propia estacion de Mixcoac los siguientes elementos para medir el ángulo entre San Angel y el vértice llamado «Loma del Muerto.»

$$O = 65° 36' 18.''0\ ;\ d = 141° 14' 15''\ ;\ r = 0^m.791\ ;\ D = 3400^m\ ;\ S = 3001^m$$

r	9.89818		9.89818	Primer término	$-21.''72$
sen. $(O+d)$	9.65468—	log. sen. d	9.79664+	Segundo id.	$-34.\ 04$
sen. $1''$	—4.68557		—4.68557	Reduccion al centro	$-55.''8$
D	—3.53148	„ S	—3.47727	Angulo medido	$65° 36' 18.''0$
	1.33681—		1.53198+	Angulo reducido	$65° 35' 22.''2$

Si alguna de las distancias D ó S fuesen de tal magnitud que se pudiera considerar infinitamente grande respecto de r, seria nulo el término de la fórmula (2) en que entra la distancia supuesta infinita. Así, por ejemplo, si se midiere el ángulo entre un astro y una señal terrestre, suponiendo que el primero esté á la derecha, se tendrá:

$$x - O = -\frac{r \text{ sen. } d}{S \text{ sen. } 1''}$$

y si ambas distancias fuesen infinitas, $x - O$ seria igual á 0. Esto sucede siempre que se mide un ángulo entre dos astros.

El Sr. Moral, en su *Curso de Geodesia*, reduce la fórmula (2) á un solo término, eliminando á S y haciendo la hipótesis de que los ángulos C y O sean iguales, lo cual ocasiona muy poco error, atendida la pequeñez de la reduccion $x - O$. El triángulo $A\ B\ C$ produce:

$$S = D \frac{\text{sen. } B}{\text{sen. } (B + C)}$$

Tomando O por C, sustituyendo en la ecuacion (2), desarrollando y reduciendo, se halla:

$$x - O = \frac{r \text{ sen. } O \text{ sen. } (B - d)}{D \text{ sen. } B \text{ sen } 1''}$$

En lugar de eliminar á S, podria eliminarse á D, y por el mismo procedimiento se obtendria:

$$x - O = \frac{r \text{ sen. } O \text{ sen. } (B - d)}{S \text{ sen. } (O + B) \text{ sen. } 1''}$$

Apliquemos estas fórmulas á nuestro último ejemplo. El ángulo en la «Loma del Muerto» es: $B = 51° 48' 45''$, y por consiguiente se tendrá:

$O - d = -75° 37' 57''$; $B - d = -89° 25' 30''$; $O + B = 117° 25' 3''$

r	9.89818	r	9.89818
sen. O	9.95938	sen. O	9.95938
sen. $(B - d)$	9.99998—	sen. $(B - d)$	9.99998—
	9.85754—		9.85754—
sen. B	—9.89541	sen. $(O + B)$	—9.94825
D sen $1''$	—8.21705	S sen. $1''$	—8.16284
	1.74508—		1.74645—

$x - O = -55.''6$ $\qquad\qquad$ $x - O = -55.''8$

Cuando todos los ángulos que tienen un mismo vértice se observan fuera del centro de la estacion, deben reducirse con el mismo valor de r, si es que todos se han medido desde el mismo punto. En cuanto al ángulo de direccion, si es d para el primer ángulo O, será $d + O$ para el segundo O'; $d + O + O'$ para el tercero O'', &c., suponiéndolos ordenados de izquierda á derecha. Como comprobacion de los cálculos, deberá hallarse que la reduccion de cada uno de los ángulos es numéricamente igual á la suma de todas las demas reducciones, y de signo contrario, pues es evidente que prescindiendo de los pequeños errores de observacion, tanto los ángulos observados fuera del centro de estacion como los reducidos, deben dar por suma 360°, y por consiguiente deberá ser nula la suma de todas las reducciones. *

71º Suele suceder, especialmente cuando la señal trigonométrica es una torre ó macizo, que el centro C no es visible desde O, y entónces para obetener á d y á r se procede así: Sea $N P N'$ (fig. 34ª) la seccion de la señal, y O, como ántes, el punto de observacion. Se medirán los ángulos $A\ O\ N$ y $A\ O\ N'$ formados por la señal de la izquierda A, con las visuales tangentes á la seccion, y la semisuma de ellos será el ángulo de direccion $d = A\ O\ C$. En efecto se tiene:

$$d = A\,O\,N + N\,O\,C = A\,O\,N + \frac{N\,O\,N'}{2} = A\,O\,N + \frac{A\,O\,N' - A\,O\,N}{2}$$

de donde reduciendo

$$d = \frac{A\,O\,N + A\,O\,N'}{2}$$

Para obtener á r, la propiedad de la tangente y la secante tiradas desde O, dá esta ecuacion, designando por R el radio de la seccion:

$$\overline{O\,N}^2 = O\,Q \times (2\,R + O\,Q) = OQ\,(R + CO) = OQ\,(R + r)$$

de donde despejando resulta:

$$r = \frac{\overline{O\,N}^2}{O\,Q} - R$$

Puede obtenerse tambien esta cantidad valiéndose del triángulo rectángulo $C\ N\ O$ que dá:

$$r = \frac{R}{\text{sen.}\ (d - A\,O\,N)}$$

Si la base de la señal fuese rectangular (fig. 35ª), se medirán las rectas $O\ N$, $O\ N'$. Se tomará sobre una de ellas un punto cual-

* Siendo x, x', x'', x'''... los angulos adyacentes al rededor de un vertice en que no se puede estacionar, O, O', O'', O'''... los medidos en correspondencia desde un punto inmediato á aquel y r, r', r'', r''' la reduccion al vértice para cada uno de estos, tendremos $x - O = r$, $x' - O' = r'$, $x'' - O'' = r''$, $x''' - O''' = r'''$ y como $x + x' + x'' + x''' + \ldots = 360°$ y $O + O' + O'' + O''' = 360°$, la diferencia de estas ultimas ecuaciones nos dá $(x - O) + (x' - O') + (x'' - O'') + (x''' - O''') + \ldots = 0$ de consiguiente $r + r' + r'' + r''' + \ldots = 0$ ó valor de una cualquiera de las reducciones igual á la sumas de todas las demas con signo contrario.

quiera n y se tirará la recta $n\,n'$ paralela á la diagonal $N\,N'$, para lo cual se situará n' por la proporcion

$$O\,N : O\,n :: O\,N' : O\,n' = \frac{O\,N' \times O\,n}{O\,N}$$

En seguida se mide $O\,c$, y se calcula $O\,C = r$, puesto que se tiene:

$$O\,n : O\,N :: O\,c : r = \frac{O\,N \times O\,c}{O\,n}$$

La resolucion del pequeño triángulo $O\,c\,n$, en el que se conocen los tres lados, dá á conocer el ángulo $n\,O\,c$, y entónces se tiene: $d = A\,O\,N + n\,O\,c$.

Cuando la seccion de la señal es un polígono cualquiera, se procede de una manera análoga valiéndose de lineas auxiliares y haciendo uso de los teoremas de la Geometría.

72º Todo lo que precede enseña los procedimientos generales para observar los ángulos de una cadena; pero sucede con bastante frecuencia que algun punto que importa situar en el plano no puede ligarse fácilmente con la triangulacion por los métodos comunes, y en tales casos se recurre á resoluciones particulares, como la que sigue y otras que tendré ocasion de indicar.

Supongamos que D (fig. 36ª) sea un punto, que por cualquiera causa no se puede enlazar inmediatamente con la cadena; pero desde el cual se descubren los tres vértices del triángulo $A\,B\,C$. Se medirán los ángulos $A\,D\,C = \beta$ y $C\,D\,B = \alpha$, y con estos elementos y los del triángulo $A\,B\,C$ que se supone conocido, propongámonos determinar los ángulos $C\,A\,D = y$ y $C\,B\,D = x$

Del cuadrilátero $A\,C\,B\,D$ sacarémos: $x + y = 360° - (\alpha + \beta + C)$ de donde resulta.

$$\tfrac{1}{2}(x + y) = 180° - \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + C) \qquad \text{(1)}$$

Siendo a, b, c, los lados opuestos á los ángulos A, B, C, se tendrá en el triángulo $C\,A\,D$:

$$C\,D = \frac{b \text{ sen. } y}{\text{sen. } \beta}, \quad \text{y en } C\,D\,B: \quad C\,D = \frac{a \text{ sen. } x}{\text{sen. } \alpha}$$

Igualando estos valores, resulta:

$$\frac{\text{sen. } y}{\text{sen. } x} = \frac{a \text{ sen. } \beta}{b \text{ sen. } \alpha}$$

Hagamos para abreviar:

$$m = \frac{a \text{ sen. } \beta}{b \text{ sen. } \alpha} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

y entónces tendrémos:

$$\frac{\text{sen. } y}{\text{sen. } x} = m$$

Agregando esta cantidad á la unidad, restándola de ella y dividiendo uno por otro los resultados, se obtendrá haciendo las reducciones:

$$\frac{\text{sen. } x + \text{sen. } y}{\text{sen. } x - \text{sen. } y} = \frac{1 + m}{1 - m}$$

Se tiene ademas por la trigonometría:

$$\frac{\text{sen. } x + \text{sen. } y}{\text{sen. } x - \text{sen. } y} = \frac{\text{tan. } \frac{1}{2}(x + y)}{\text{tan. } \frac{1}{2}(x - y)}$$

con lo que sustituyendo resultará:

$$\text{tan. } \tfrac{1}{2}(x - y) = \frac{1 - m}{1 + m} \text{ tan. } \tfrac{1}{2}(x + y) \dots\dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

La ecuacion (2) dá la cantidad m que introducida en la (3) dará á conocer la semidiferencia $\frac{1}{2}(x - y)$, teniendo la semisuma por la (1), con lo que se podrá determinar cada una de las incógnitas, y despues en el triángulo $A\,B\,D$, en el que se conoce el lado $A\,B = c$, se deducirán los ángulos $B\,A\,D = y - A$ y $A\,B\,D = x - B$, con lo cual se tiene lo necesario para acabar de resolver el triángulo, á saber:

$$A\,D = \frac{c \text{ sen. } (x - B)}{\text{sen. } (\alpha + \beta)} \qquad B\,D = \frac{c \text{ sen. } (y - A)}{\text{sen. } (\alpha + \beta)} \dots\dots\dots \quad (4)$$

Este procedimiento conocido con el nombre de «Problema de los tres vértices» conduce á resultados muy exactos. Aplicarémos las fórmulas á los datos siguientes:

$\alpha = 20° \; 37' \; 38.''1$	$a = 3105^m24$	$A = 56° \; 54' \; 16.''3$
$\beta = 19 \;\; 45 \;\; 45. \; 6$	$b = 3665.36$	$B = 81 \;\; 26 \;\; 44. \; 9$
	$c = 2463.30$	$C = 41 \;\; 38 \;\; 58. \; 8$

De ellos se deduce que $\frac{1}{2}(x+y) = 138° \; 58' \; 48.''8$, y se tendrá:

a........	3.4920952	$1 - m = 0.186872$	$(1-m)$....	9.2715442
sen. β...	9.5290770	$1 + m = 1.813128$	tan. $\frac{1}{2}(x+y)$	9.9394658—
b........	—3.5641166	$\frac{1}{2}(x+y) = 138° \; 58' \; 48.''8$	$(1+m)$....	—0.2584285
sen. a...	—9.5468964	$\frac{1}{2}(x-y) = -5 \quad 7 \quad 23. \; 7$	tan. $\frac{1}{2}(x-y)$	8.9525815—
m.....	9.9101592	$x = 133° \; 51' \; 25.''1$	$x - B = 52° \; 24' \; 40.''2$	
$m = 0.813128$		$y = 144 \quad 6 \quad 12. \; 5$	$y - A = 87 \quad 11 \quad 56. \; 2$	

c...................	3.3915173..........................		3.3915173
sen. $(x - B)$......	9.8989491	sen. $(y - A)$......	9.9994808
sen. $(a + \beta)$......	—9.8115655..........................		—9.8115655
$A\,D$................	3.4789009	$B\,D$............	3.5794326
	$A\,D = 3012^{m}.32$		$B\,D = 3796^{m}.93$

Hagamos ahora algunas consideraciones respecto de la posicion del punto D con relacion al triángulo $A\;B\;C$.

I. Si suponemos que D está en E sobre la circunferencia que pasa por los tres vértices, se tendrá: $\beta = B$, $a = A$. Entónces........ $x + y = 180°$ y $m = 1$, puesto que el triángulo dá: a sen. $B = b$ sen. A. Por consiguiente, sustituyendo resulta tan. $\frac{1}{2}(x - y) = \frac{0}{0}$. La forma de esta ecuacion nos indica que en este caso el problema es indeterminado, lo que debia esperarse, pues desde todos los puntos del arco $A\,E\,B$ se obtendrian los mismos ángulos entre los vértices.

II. Si el punto está en F sobre el lado c, se tendrá:.............. $a + \beta = 180°$; $x = B$; $y = A$; de suerte que si se sustituyen estos valores en las ecuaciones (4) resultaria $A\,F = \frac{0}{0}$, $B\,F = \frac{0}{0}$. En este caso, sin embargo, puede resolverse el problema con ayuda de los otros dos lados del triángulo, que dán respectivamente:

$$A\,F = b\,\frac{\text{sen. }(A + \beta)}{\text{sen. }\beta} \qquad\qquad B\,F = a\,\frac{\text{sen. }(B + a)}{\text{sen. }a}$$

III. Sea ahora G la posicion del punto en el interior del triángulo. En este caso $a + \beta > 180°$, de modo que su seno será negativo, lo mismo que sen. $(x - B)$ y sen. $(y - A)$, puesto que x é y son respectivamente menores que B y A.

IV. Finalmente, si el punto está fuera del triángulo, en H por ejemplo, cada uno de los ángulos a y β será mayor que 180° y pueden aplicarse las mismas fórmulas tomando por α el ángulo.......... $C H B = 360° - \alpha = \alpha'$ y por β el ángulo $A H C = 360° - \beta = \beta'$. Las ecuaciones que dán las distancias serán en este caso:

$$A H = c \frac{\text{sen.}\ (B + x)}{\text{sen.}\ (\alpha' + \beta')} \qquad B H = c \frac{\text{sen.}\ (A + y)}{\text{sen.}\ (\alpha' + \beta')}$$

Por la breve discusion precedente se ve que el problema solo es indeterminado cuando el punto está sobre la circunferencia que pasa por los tres vértices, caso muy remoto en la práctica, y que se conocerá en que $\alpha + \beta + C = 180°$.

El conocimiento de las dos distancias del punto á los vértices A y B, es lo que basta para situarlo en el cróquis ó en el plano; pero puede obtenerse una comprobacion calculando tambien su distancia al tercer vértice C, por cualquiera de las fórmulas:

$$C D = \frac{a\ \text{sen.}\ x}{\text{sen.}\ \alpha} = \frac{b\ \text{sen.}\ y}{\text{sen.}\ \beta} = \frac{a\ \text{sen.}\ y}{m\ \text{sen.}\ \alpha} = \frac{m\ b\ \text{sen.}\ x}{\text{sen.}\ \beta}$$

Tambien se tienen las siguientes formas de los valores de $A D$ y $B D$:

$$A D = \frac{b\ \text{sen.}\ (\beta + y)}{\text{sen.}\ \beta} = \frac{a\ \text{sen.}\ (\beta + y)}{m\ \text{sen.}\ \alpha}$$

$$B D = \frac{a\ \text{sen.}\ (\alpha + x)}{\text{sen.}\ \alpha} = \frac{m\ b\ \text{sen.}\ (\alpha + x)}{\text{sen.}\ \beta}$$

y como comprobacion del cálculo mismo, se tiene:

$$m = \frac{B D\ \text{sen.}\ (\beta + y)}{A D\ \text{sen.}\ (\alpha + x)}$$

valor que debe resultar igual al de la fórmula primitiva (2)

Como el problema de los tres vértices es de mucha utilidad práctica, importa que el calculador se familiarice con el uso de las fórmulas que lo resuelven, y con este fin pongo á continuacion algunos ejemplos por vía de ejercicio, dando tambien los resultados para que el lector los compare con los que obtenga.

Ejemplo 1º—Tomaré de mis registros trigonométricos el siguiente:

$A = 57° \ 33' \ 30''$	log. $a = 3.60203$	$\alpha = 119° \ 57' \ 30''$
$B = 65 \ \ 42 \ \ 30$	log. $b = 3.63546$	$\beta = 143 \ \ 30 \ \ 30$
$C = 56 \ \ 44 \ \ 00$	log. $c = 3.59799$	

Por los valores de α y β se ve que este caso es el tercero que he considerado en la discusion precedente. Su resolucion dá:

$$A\,D = 2627^{m}.1 \qquad B\,D = 2682^{m}.8$$

Ejemplo 2º—Tomemos este otro:

$A = 55° \ 32' \ 6''$	log. $a = 3.5679382$	$\alpha = 342° \ 6' \ 00''$
$B = 44 \ \ 20 \ \ 10$	log. $b = 3.4961558$	$\beta = 352 \ \ 54 \ \ 15$
$C = 80 \ \ 7 \ \ 44$	log. $c = 3.6452843$	

Los valores de α y β indican que se trata del cuarto caso de la discusion, por lo que tomando $\alpha' = 17° \ 54' \ 00''$ y $\beta' = 7° \ 5' \ 45''$, resulta:

$$\tfrac{1}{2}(x + y) = \tfrac{1}{2}\left(C - (\alpha' + \beta')\right) = 27° \ 34' \ 00''$$

y por la resolucion deberá hallarse:

$$A\,D = 10366^{m}.3 \qquad B\,D = 9975^{m}.8$$

En la práctica es mas cómodo medir directamente los ángulos α' y β', pero para evitar equivocaciones debe anotarse el caso, que se conoce inmediatamente puesto que el triángulo $A\ B\ C$ presenta del lado del observador la parte exterior de su ángulo C.

73º Aunque la resolucion analítica es la que en general debe preferirse para determinar con exactitud sobre el plano la posicion del punto D, puede recurrirse á una resolucion gráfica que es mas breve, y sirve muy bien para situar este punto en el cróquis. Sea $A\ B\ C$ (fig. 37ª) el triángulo conocido: sobre el lado $A\ C$ trácense en A y en C dos lineas que formen con él los ángulos $A\ C\ M$ y $C\ A\ M$ iguales á $90° - \beta$, y desde su interseccion M como centro, y con un radio igual á $M\ A$ ó $M\ C$ descríbase una circunferencia. De igual manera sobre $B\ C$ constrúyanse los ángulos $B\ C\ N$ y $C\ B\ N$ iguales á

$90° - \alpha$, lo que determina el centro N y el radio $N\,C = N\,B$ de otra circunferencia que por su interseccion con la primera, fija la posicion del punto D.

De la construccion resulta en efecto que el ángulo $A\,M\,C$ es igual á 2β, y como este tiene su vértice en el centro, se deduce que el punto D desde el cual debe verse el mismo arco $A\,C$ bajo el ángulo β, estará situado sobre la circunferencia de que forma parte este arco. Por idéntica razon, se infiere que el mismo punto debe hallarse sobre la circunferencia descrita desde N, puesto que por la construccion el ángulo $B\,N\,C$ tiene por valor $2\,\alpha$, y por medida el arco $B\,C$. En consecuencia, el punto que se busca quedará determinado por la interseccion de las dos circunferencias.

Si alguno de los ángulos observados α y β fuese mayor que 90°, su complemento será negativo, y en este caso la construccion de los ángulos complementarios deberá hacerse hácia la parte opuesta de los dos lados $A\,C$ y $B\,C$. El resto de la resolucion es la misma.

En otra ocasion volveré á ocuparme de este importante problema para tratarlo analíticamente con mucha mas generalidad.

74º Cuando desde un punto que se quiere enlazar con la triangulacion, no se descubren mas que dos vértices, puede acudirse á la resolucion expuesta en los números 24 y 26, con motivo del cálculo de las bases. Sea A (figuras 6ª y 7ª) el punto de que se trata, C y D los vértices que se ven desde A, y cuya distancia $C\,D$ supongo conocida. Si se elige otro punto auxiliar B, desde el cual se descubran los mismos vértices, y se mide la pequeña distancia $A\,B$, así como los ángulos que en las figuras se designan por α, β, γ, y δ, se tendrán los elementos necesarios para calcular $A\,C$ y $A\,D$, que determinan la posicion del punto A respeto de C y D.

Parece sin duda mas sencillo observar desde los vértices C y D los dos ángulos $C\,D\,A$ y $D\,C\,A$, en lugar de medir la distancia $A\,B$ y cuatro ángulos que demanda esta resolucion; y es mas sencillo efectivamente en circunstancias ordinarias; pero hay casos en que los vértices trigonométricos por estar demasiado distantes, ó por ser de difícil acceso, hacen preferible, por mas breve, este último método, sobre todo, si el punto A no es de mucha importancia. Por otra parte, el conocimiento de la distancia $A\,B$ no es indispensable cuando se sigue el procedimiento que voy á indicar.

Si con un valor cualquiera de $A\,B$, tal como el que resulta de estimar esa distancia á la simple vista, se aplica la resolucion anterior, para obtener los valores de $A\,C$ y $A\,D$, y en seguida con ellos se determina la distancia $C\,D$, por las fórmulas de las páginas 17 y 18, es claro que todos estos resultados serán erróneos; pero como $C\,D$ se conoce con exactitud, puesto que es un lado trigonométrico, la comparacion del valor exacto con el erróneo permitirá corregir los valores obtenidos para $A\,C$ y $A\,D$, fundándose para ello en que las figuras exacta y errónea son semejantes á causa de la igualdad de sus ángulos, y por consecuencia, en que sus lados serán proporcionales. Si designamos, pues, por m' el valor estimativo de $A\,B$, los que se obtengan para $A\,C=b'$, y $A\,D=c'$, serán:

$$b' = m' \frac{\text{sen. } \gamma}{\text{sen. } (\alpha + \gamma)} \qquad c' = m' \frac{\text{sen. } \delta}{\text{sen. } (\beta + \delta)}$$

Introduciendo estos valores en las fórmulas de las páginas 17 ó 18, segun el caso, resultará el valor x' para la distancia $C\,D$, y si llamamos k la distancia exacta, se tendrá:

$$b = b' \frac{k}{x'}\ ; \qquad c = c' \frac{k}{x'}\ ; \qquad m = m' \frac{k}{x'}\ ;\ \text{\&c.}$$

Tomemos, por ejemplo, los ángulos que constan en la página 18; y si suponemos $m'=2000^{\text{m}}$, obtendrémos $b'=4415^{\text{m}}.8$, $c'=6091^{\text{m}}.8$. Determinando con estos resultados el valor de $C\,D$, se halla:........ $x'=10318^{\text{m}}.0$; y como la distancia exacta es: $k=11457^{\text{m}}.0$, el factor $\frac{k}{x}$ para corregir los primeros resultados tiene por logaritmo 0.04547, que sumado con los de b', c', m', &c., dá: $b=4903^{\text{m}}$, $c=6764^{\text{m}}$, &c., valores que concuerdan con los de la página 18.

75º Habiendo terminado ya las principales reglas que se refieren á la medida de los ángulos de una cadena, solo me resta indicar algunas ideas respecto de las dimensiones de las señales trigonométricas, segun lo que expuse en la página 39 de este libro.

Delambre prescribe que la altura de las señales debe ser tal, que desde la estacion mas distante se vean por lo ménos bajo un ángulo de $31''$. De esta regla se deduce que la altura mínima a debe ser igual á los quince cienmilésimos de la distancia k, esto es:

$$a = 0.00015\ k$$

Esta prescripcion se refiere á las señales geodésicas, que construidas de madera, y muchas veces de mampostería, son de algun costo; pero como en las triangulaciones topográficas las señales consisten generalmente en simples maderos provistos de una bandera ó de cualquiera otro objeto que los haga distinguir de las rocas ó de los árboles inmediatos, no hay inconveniente, y sí algunas ventajas, en aumentar un poco la altura mínima, elevándola ó *dos diezmilésimos de la mayor distancia*, á saber:

$$a = 0.0002\,k \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Respecto del diámetro ó grueso de las señales, creo que hasta ahora nadie se ha ocupado de fijar sus límites, por lo que creo útil exponer el resultado de algunas experiencias que he hecho con este objeto, sirviéndome de un teodolito pequeño de Troughton, cuyo telescopio, aunque bastante claro, tenia solo $0^{m}22$ de distancia focal y un objetivo de $0^{m}025$ de diámetro.

Colocada en una altura una señal de $0^{m}13$ de grueso, que se veia por consiguiente proyectada sobre el fondo del cielo, he podido distinguirla á todas horas del dia desde una distancia de 13000^{m}. A la distancia de 16900^{m} solamente pude distinguirla por la tarde teniendo el sol á la espalda. De la primera experiencia se deduce que la relacion entre el diámetro de la señal y la distancia es:

$$d = 0.00001\,k \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

La misma señal, situada en un lugar bajo, y observada desde una altura, se ha podido ver muy bien aun á medio dia, á la distancia de 7700^{m}, lo que produce $d = 0.000017\,k$. Es de advertir que el madero cilíndrico que constituia la señal, se veia proyectado sobre el fondo de un terreno claro; pero cuando se proyectaba sobre arboledas ó sobre un fondo oscuro, no se podia distinguir bien á la distancia de 7700^{m}, y solo se veia la pequeña bandera blanca atada en su parte superior. Acaso se habria distinguido el asta si hubiera estado pintada de blanco, porque en la experiencia tenia el color natural de la madera.

De lo expuesto se infiere que puede tomarse como límite inferior del grueso de las señales, la *cienmilésima parte de la distancia* para el caso en que la señal se establezca en una eminencia, y el doble para el caso contrario.

Por lo comun se exagera demasiado la necesidad de dar á las señales muy poco diámetro; pero sin negar la utilidad general de esta prescripcion, creo que es posible fijar límites bastante amplios acerca del mayor grueso que pueden tener sin inconveniente alguno en la práctica, apoyándose para ello en las consideraciones siguientes: El grueso de la señal forma la base de un triángulo isósceles, cuyos otros dos lados no son otra cosa mas que las visuales que tangencialmente le dirige el observador, y cuya longitud es por consiguiente k. Designando por ω el ángulo opuesto á la base, tendrémos que ω es el ángulo bajo el cual el observador ve el diámetro de la señal desde la distancia k, y que está ligado con los anteriores elementos por la fórmula.

$$d = 2\,k \text{ sen. } \tfrac{1}{2}\,\omega$$

Atendida la pequeñez de este ángulo, podrá tomarse el arco en segundos por su seno, y hallarémos:

$$\omega = \frac{d}{k \text{ sen. } 1''}$$

Veamos de qué nos puede servir esta relacion. Si al medir los ángulos se dirigieran siempre las visuales al centro de las señales, no habria error, cualquiera que fuese su diámetro; pero como límite de incertidumbre, supondré el caso extremo, que se verifica cuando en lugar de dirigirse la visual al centro, se dirige á uno de los bordes, ó tangencialmente á la señal. Es evidente que en este caso se comete un error de $\frac{1}{2}\,\omega$ en la direccion de la visual, el cual puede ser por exceso ó por defecto, de modo que en los casos extremos de duda, el ángulo que se mide quedará afectado del error ω, lo que tendrá lugar cuando las dos visuales son tangentes en sentido opuesto á las dos señales que forman el ángulo.

Este caso, el mas desventajoso que puede ocurrir, es aplicable á la determinacion del mayor grueso que deben tener las señales, estableciendo la condicion de que el error ω no sea apreciable con la aproximacion a que dé el teodolito que se use. En efecto, si un instrumento dá la aproximacion a, la menor cantidad que puede apreciarse con los nonius, es $\frac{1}{2}\,a$, cuando dos divisiones contiguas parecen coincidir igualmente; pero una tercera ó cuarta parte, es ya imposible de apreciarse con exactitud. En consecuencia establezcamos la condicion de que el error ω nunca exceda de $\frac{1}{4}\,a$, y se tendrá:

$$\frac{d}{k\ \text{sen. } 1''} < \tfrac{1}{4}\,a$$

y considerando á $\frac{1}{4}\,a$ como límite superior, hallarémos:

$$d = \tfrac{1}{4}\,a\,k\ \text{sen. } 1'' \qquad\qquad (3)$$

He reducido á la siguiente tabla la ecuacion (1) referente á la altura de las señales, y las (2) y (3) que fijan los límites mínimo y máximo de su grueso, para diversos valores de k y de la aproximacion angular del instrumento que haya de usarse.

DISTANCIAS.	ALTURAS.	DIAMETRO MÍNIMO.	DIÁMETRO MÁXIMO.				
			10″	15″	20″	30″	60″
1000m	0m2	0m01	0m012	0m018	0m024	0m036	0m072
2000	0. 4	0. 02	0. 024	0. 036	0. 048	0. 072	0. 144
3000	0. 6	0. 03	0. 036	0. 054	0. 072	0. 108	0. 216
4000	0. 8	0. 04	0. 048	0. 072	0. 096	0. 144	0. 288
5000	1. 0	0. 05	0. 060	0. 090	0. 120	0. 180	0. 360
6000	1. 2	0. 06	0. 072	0. 108	0. 144	0. 216	0. 432
7000	1. 4	0. 07	0. 084	0. 126	0. 168	0. 252	0. 504
8000	1. 6	0. 08	0. 096	0. 144	0. 192	0. 288	0. 576
9000	1. 8	0. 09	0. 108	0. 162	0. 216	0. 324	0. 648
10000	2. 0	0. 10	0. 120	0. 180	0. 240	0. 360	0. 720
11000	2. 2	0. 11	0. 132	0. 198	0. 264	0. 396	0. 792
12000	2. 4	0. 12	0. 144	0. 216	0. 288	0. 432	0. 864
13000	2. 6	0. 13	0. 156	0. 234	0. 312	0. 468	0. 936
14000	2. 8	0. 14	0. 168	0. 252	0. 336	0. 504	1. 008
15000	3. 0	0. 15	0. 180	0. 270	0. 360	0. 540	1. 080
16000	3. 2	0. 16	0. 192	0. 288	0. 384	0. 576	1. 152
17000	3. 4	0. 17	0. 204	0. 306	0. 408	0. 612	1. 224
18000	3. 6	0. 18	0. 216	0. 324	0. 432	0. 648	1. 296
19000	3. 8	0. 19	0. 228	0. 342	0. 456	0. 684	1. 368
20000	4. 0	0. 20	0. 240	0. 360	0. 480	0. 720	1. 440

En esta tabl[a] las alturas son demasiado cortas para las dist[ancia]s pequeñas en general debe su tamaño ser tal que se distinga del comun de los materiales pequeños del terreno; y lo mejor es pintarlas astas

Los guarismos de esta tabla manifiestan que los límites de grueso son amplísimos, especialmente respecto de los instrumentos de menor precision, que son los de uso mas frecuente en la topografía. Los teodolitos que aproximan la lectura angular á 10″, 15″ y aun á 20″ tienen tambien por lo general telescopios mas poderosos que permiten acercarse al límite inferior en el diámetro de las señales; pero aun adoptado el máximo de grueso que consta en la tabla, puede estar seguro el ingeniero de que el error que provenga de esta causa será enteramente inapreciable con su instrumento, como deducido de casos extremos que acaso nunca lleguen á verificarse, sobre todo si no olvida la prescripcion de dirigir sus visuales al centro cuando las señales presentan un espesor sensible. Todas estas consideraciones son de importancia en razon de que permiten al topógrafo servirse como señales, de las cruces, mohoneras y otros monumentos análogos que suelen encontrarse en las cimas de los cerros, con especialidad si no ofrecen dificultades para estacionar en ellos cuando llega el caso de medir allí los ángulos.

CAPITULO V.

ORIENTACION DE LA CADENA TRIGONOMÉTRICA.

76º Hemos dicho (núm. 6) que no basta conocer todos los elementos de una cadena trigonométrica, sino que ademas es preciso *orientarla*, ó asignarle la verdadera posicion que ocupa en la superficie de la tierra con relacion á los puntos cardinales. Antes de enseñar los medios de conseguirlo, necesito recordar algunas definiciones.

Se llama *meridiano* de un lugar el plano que pasa por los polos del mundo y por el zenit de ese lugar, y *línea meridiana*, ó simplemente *meridiana*, la interseccion del meridiano con la superficie de la tierra. Por su misma definicion se comprende que el meridiano es un plano *vertical* ó perpendicular al horizonte del observador, puesto que pasa por su linea vertical, y que la meridiana sigue la direccion de Norte á Sur.

Entre todos los planos verticales que pasan por el zenit de un lugar, hay uno que es perpendicular al meridiano, y se designa con el nombre de *primer vertical*. La interseccion de este plano con la superficie de la tierra se llama *perpendicular á la meridiana*, y su direccion es de Oriente á Poniente.

Así, pues, la meridiana y su perpendicular dividen el horizonte en cuatro cuadrantes, y si un observador está vuelto hácia el Norte, tendrá el Sur á la espalda, el Oriente á su derecha y el Occidente á su izquierda. Designarémos estos cuadrantes por el número que expresa su órden, comenzando por el punto Norte y continuando hácia el Poniente, Sur y Oriente, segun su colocacion sucesiva, de esta manera:

I	cuadrante, el comprendido entre	el N. y el O. ó Nor-oeste.
II	,, ,, ,,	el O. y el S. ó Sur-oeste.
III	,, ,, ,,	el S. y el E. ó Sur-este.
IV	,, ,, ,,	el E. y el N. ó Nor-este.

De las definiciones que hemos dado se deduce que las meridianas de todos los puntos de un terreno son lineas convergentes hácia los polos, y sus perpendiculares son tambien convergentes hácia un punto del horizonte que dista 90° de estos últimos; pero si se atiende á la corta extension que abrazan las operaciones topográficas comunes, relativamente á la gran distancia de los puntos en que concurren aquellas lineas, se comprenderá que no resulta error alguno de importancia en suponerlas paralelas entre sí, y con esta suposicion se simplifican mucho los cálculos de que nos ocuparémos pronto. Por otra parte, en el lugar correspondiente se indicará el modo de llevar en cuenta, cuando se quiera, la *convergencia de los meridianos;* mas por ahora admitamos la hipótesis del paralelismo.

Asentado esto, sea A (fig. 38ª) una estacion trigonométrica cualquiera, $N\,S$ su meridiana y $E\,O$ su perpendicular. Si concebimos que un plano vertical, pasando por este punto pasa tambien por otra estacion B, su interseccion con el horizonte no es otra cosa mas que el lado $A\,B$ de la triangulacion, y el ángulo $N\,A\,B$ que forma la direccion $A\,B$ con el meridiano del punto de observacion A, se llama el *azimut* de B. El ángulo complementario $B\,A\,O$ se llama la *amplitud* de B.

Como $A\,B$ forma con la meridiana $N\,S$ dos ángulos $N\,A\,B$ y $S\,A\,B$ que son suplemento el uno del otro, se podrá tomar por punto de partida para medir los azimutes, ya sea el Norte ó el Sur indistintamente, puesto que conocido uno de los ángulos, se puede deducir el otro. En todo lo que sigue, cuando no se advierta lo contrario, tomaré siempre el norte por orígen y contaré los azimutes desde 0° hasta 360° pasando sucesivamente por O, S y E con el mismo órden en que hemos numerado los cuadrantes, de modo que bastará conocer el valor del azimut de un punto para saber desde luego en cuál de los cuadrantes se halla situado. Así, por ejemplo, si el arco dado no llega á 90° el punto estará en el primer cuadrante, ó la region Nor-oeste: si el azimut está comprendido entre 90° y 180°, la estacion á que corresponde se hallará en el segundo, y así los demas.

Al hablar en general del azimut de una linea $A\ B$, podria entenderse que la observacion azimutal se supone hecha ó en el punto A ó en el punto B: en el primer caso el azimut seria $N\ A\ B = u$, y en el segundo $N'\ B\ A = u'$. Para evitar toda equivocacion en lo sucesivo, indicarémos por el órden de las letras con que se designa el lado trigonométrico, el punto de observacion y el punto observado: así por ejemplo, al decir azimut de $A\ B$, debe entenderse el ángulo u suponiéndolo medido en A; miéntras que si decimos azimut de $B\ A$ se entenderá que la observacion se hizo en B y en tal caso el ángulo es u'. Se dice tambien que estos dos ángulos son *inversos* uno de otro cuando alguno de ellos se toma por azimut *directo:* de modo que si el azimut directo es u, el inverso será u' y al contrario. Estos dos ángulos difieren siempre dos cuadrantes y se tiene en general: $u' = u \pm 180°$

Por todo lo expuesto se comprende con qué facilidad podrá deducirse el azimut de cualquiera lado de una triangulacion cuando se ha medido el de uno de ellos. En la figura se ve que el azimut...... $A\ C = u + B\ A\ C$; el az. $A\ D = u + B\ A\ D$, &c. Igualmente se tiene: az. $B\ C = u' - A\ B\ C = 180° + u - A\ B\ C$;......... az. $C\ B = 180° +$ az. $B\ C$, y así sucesivamente para todos los lados de la cadena.

77º Para trazar la meridiana de un lugar y por consiguiente para medir el azimut de una linea cualquiera, pueden emplearse diversos procedimientos; pero como todos ellos se fundan en observaciones astronómicas que no es posible exponer aquí, indicaré únicamente los mas sencillos y que dán la precision necesaria para casi todas las operaciones topográficas, cuando se practican con esmero.

En virtud del movimiento rotatorio diurno de la tierra, todos los astros parecen describir de Oriente á Occidente en el espacio de 24^h círculos cuyos planos son perpendiculares al eje del mundo, y cuya magnitud varia con la distancia de cada astro al polo, de tal modo que se ve salir una estrella hácia el Este, aumentándose gradualmente su altura sobre el horizonte hasta pasar por el meridiano del lugar, y decrecer en seguida con la misma gradacion hasta que llega á su ocaso hácia el Oeste para terminar su círculo aparente debajo del horizonte, de suerte que al dia siguiente se la ve reaparecer en el mismo punto. Como el eje $N\,S$ de la tierra (fig. 39ª) tiene cierta inclinacion $H\,O\,N$ con respecto al horizonte $H\,H'$ de un lugar cuyo zenit es Z, resulta que verémos una parte de los círculos que describen los astros, tanto mayor cuanto menor sea la distancia del astro al polo, ó extremo del eje que está sobre el horizonte, y que en nuestras regiones es el polo Norte ó Septentrional. Así, podrémos observar la parte $d\,D\,D'$ para la estrella que pasa por el meridiano en D, miéntras que solo $m\,M\,M'$ para la que atraviesa este plano en M. Las estrellas cuya distancia polar $N\,G$ sea igual á la inclinacion del eje, podrán observarse en todo su curso $G\,G'$ si están inmediatas al polo elevado, ó serán siempre invisibles si están cerca del polo opuesto, como sucederá con la que describa $P\,P'$. Lo mismo dirémos con respecto á aquellas cuya distancia polar sea menor que la inclinacion $H\,O\,N = E\,O\,Z$ del eje, la cual se llama *latitud* del lugar, y es igual á la distancia angular del zenit al *ecuador* $E\,E'$, contada en el meridiano.

Si concebimos ahora desde el punto de observacion un plano vertical $Z\,a$ que pase siempre por un astro a, el azimut $N\,Z\,a$ de este plano variará sin cesar, teniendo su mayor valor cuando el astro está léjos del meridiano, y disminuyendo al paso que se acerca á su *culminacion*, esto es, al punto donde adquiere su mayor altura sobre el horizonte, que es cuando pasa por el meridiano del lugar. Es claro que en este momento el azimut es nulo, y lo es tambien que á distancias iguales del meridiano, tanto al Oriente como al Poniente, los azimutes $N\,Z\,a$ y $N\,Z\,a'$ serán numéricamente iguales aunque contados hácia distintas regiones.

Supongamos que dos estrellas a y b estén situadas en el mismo *círculo horario* $N\,b\,a\,S$, de modo que pasen al mismo tiempo por el meridiano. Como este último plano es vertical, resultará que en el momento de la culminacion, ambas estrellas podrán ser cubiertas por el hilo de una plomada, y si entónces se dirige á cualquiera de ellas el anteojo de un instrumento, el eje óptico quedará situado en el plano del meridiano.

78º De los principios anteriores podrémos deducir varios procedimientos para trazar la meridiana de un lugar determinado. Supongamos que en el centro de estacion se establece un teodolito perfectamente nivelado, y cuyo anteojo se dirige á la *Polar*, que es una estrella de segunda magnitud muy poco distante del polo Norte, de modo que parece describir en 24^h un pequeño círculo al derredor de este punto, pasando por consiguiente dos veces por el meridiano, una entre el polo y el zenit, y otra entre aquel punto y el horizonte. Comuníquese despues al anteojo su movimiento vertical para dirigirlo hácia la constelacion llamada la *Osa mayor* ó el *Carro*, que es un conjunto de siete estrellas principales (fig. 40ª) de las que cuatro forman un gran cuadrilátero, y las tres restantes siguen una direccion irregular trazando lo que se llama *la cola* de la Osa. Esta constelacion es muy conocida y puede observarse cómodamente en las noches de verano. La penúltima estrella de la cola, designada por los astrónomos con la letra griega ζ verifica su paso superior por el meridiano, casi al mismo tiempo que la polar verifica el inferior; por consecuencia, pasando el anteojo de una á otra de estas estrellas en virtud de su movimiento vertical, el eje óptico quedará situado muy cerca del meridiano cuando ambas sean cubiertas por el hilo vertical de la retícula. Se fijará entónces el instrumento y se colocará á lo léjos una pequeña señal luminosa en coincidencia con los hilos. La linea que una este punto con la proyeccion del centro del teodolito, será la meridiana, que se prolongará si es necesario para observar el ángulo que con ella forma uno de los lados trigonométricos.

En el invierno es mas cómodo combinar el paso superior de la Polar con el de la estrella δ de la constelacion de Cassiopea, la cual es fácil de reconocer porque afecta la forma de una M muy abierta. El procedimiento es absolutamente el mismo.

Si el anteojo no se eleva lo bastante para poderse dirigir á la estrella mas alta, en lugar de proceder como se ha indicado, se usa una plomada suspendida á algunos pasos del observador, y el anteojo se establece en el meridiano dirigiéndolo á la Polar, luego que se verifica la ocultacion de las dos estrellas por el hilo de la plomada.

79º Se traza tambien la meridiana valiéndose del sol, de la manera siguiente: se establece horizontalmente una superficie plana cualquiera, la de una mesa, por ejemplo, con ayuda de un nivel portátil, procediendo de un modo semejante al que hemos indicado al hablar del teodolito, y se fija en ella una varilla delgada $A\ B$ (fig. 41ª) llamada *estilo*, terminada por una placa metálica A en cuyo centro hay un agujero muy pequeño; y valiéndose de una plomada muy fina se determina la proyeccion horizontal C de este agujero. Desde C como centro, y con radios arbitrarios se trazan los arcos $D\ E$, $D'\ E'$, &c., y se observa ántes de medio dia el punto luminoso que forma la imágen del sol, pasando por la pequeña abertura A, señalando los puntos m, n de los arcos que reciben la imágen. Despues del medio dia se repite la misma observacion para marcar los puntos correspondientes $m'\ n'$, y la linea $C\ N$ que divide los arcos $m\ m'$, $n\ n'$ en dos partes iguales es la meridiana, porque esta seria la sombra de la plomada $A\ C$ en el momento en que el sol se encontraba en el meridiano. La observacion en un solo arco seria suficiente; pero se trazan varios por comprobacion.

El fundamento de este método no es exacto mas que en la época de los solsticios, esto es, en los meses de Junio y Diciembre: en cualquiera otro tiempo la distancia del sol al polo varia sensiblemente en el intervalo de las dos observaciones, y no es admisible la suposicion de igualdad de azimutes ántes y despues de la culminacion. Por otra parte, este procedimiento tiene el inconveniente de que establecida la meridiana $C\ N$ en una pequeña extension, la menor inexactitud en su trazo ocasiona un error considerable al prolongarla para observar el azimut, y mucho mas en nuestro país á causa de la gran altura que adquiere el sol cerca del medio dia.

80º De todos los métodos que puedo exponer aquí, acaso el mas exacto á la vez que el mas sencillo, consiste en observar un mismo astro á igual altura tanto al Oriente como al Occidente del meridiano. Es cómodo elegir una estrella que no culmine á mucha altura sobre el horizonte, y ántes de su paso se le dirige el anteojo del teodolito cuyo limbo se ha fijado de antemano, dejando solo libres los movimientos de la alidada que lleva los nonius, y el vertical del anteojo. Luego que la estrella queda cortada por la interseccion de los hilos, se paralizan ambos movimientos y se lee la indicacion de los nonius. Se espera en seguida hasta que la estrella despues de su culminacion se aproxime á tener la misma altura, mirando por el anteojo de tiempo en tiempo, pero sin alterar su inclinacion, comunicándole solo el movimiento horizontal ó azimutal. Luego que se presenta la estrella en el campo del anteojo se paraliza tambien este último movimiento, y se continúa manteniéndola en el hilo vertical, valiéndose solo del tornillo de aproximacion, hasta que por su movimiento descendente, que tiene la apariencia de ascendente, puesto que el telescopio invierte los objetos, vuelva á quedar cortada por la interseccion de los hilos. En este momento se deja de mover el tornillo y se lee la indicacion. Si llamamos g y g' ambas lecturas, es claro que $g' - g$ será el arco azimutal recorrido por el índice, y la mitad de este arco será el punto que señalaria el índice cuando el anteojo coincidiese con el meridiano: quiere decir se tendrá:

$$a = g + \tfrac{1}{2}(g' - g) = \tfrac{1}{2}(g + g')$$

Si se establece el índice en esta graduacion, quedará, pues, trazada la meridiana. Pueden repetirse las observaciones cuantas veces se quiera; pero entónces es necesario leer las indicaciones del círculo vertical del teodolito para dar al anteojo la inclinacion que conviene en cada observacion correspondiente. Importa que en toda la operacion permanezca el limbo perfectamente fijo, para lo cual debe usarse el anteojo inferior dirigido á una señal luminosa, y se procurará tambien no emplear mucho tiempo, tanto por comodidad como por temor de algun movimiento brusco del teodolito. Por lo comun, un intervalo de hora y media ó dos horas, de una observacion á su correspondiente, dá la exactitud necesaria.

Debemos advertir que para distinguir á la vez la estrella y la retícula, se usa un pequeño espejo metálico A (fig. 42ª] que se coloca en el tubo del anteojo cerca del objetivo por medio de un anillo B de laton, y dispuesto de manera que, dirigiéndole la luz de una lámpara, la refleja paralelamente al eje óptico é ilumina los hilos. El espejo debe tener solamente tres ó cuatro milímetros para que no intercepte una parte considerable de la luz de la estrella. Algunos teodolitos tienen el espejo en el interior del tubo, y la lámpara se coloca en una abertura que tiene el anteojo como á la mitad de su longitud.

El azimut de un punto B (fig. 38ª) puede medirse sin necesidad de trazar la meridiana $N\,S$, para lo cual basta conocer la graduacion G que señala el teodolito cuando se dirige el anteojo á este punto. En efecto, designando por u el azimut $N\,A\,B$ (fig. 43ª), se tiene:

$$u = \tfrac{1}{2}(g + g') - G$$

ó bien siendo m y m' los ángulos $B\,A\,g$ y $B\,A\,g'$ que el objeto forma con la estrella, resulta:

$$u = \tfrac{1}{2}(m + m')$$

En la figura se ha supuesto que la estrella culmina al Norte del zenit, y que el punto observado queda hácia el Occidente: si supusiésemos que la culminacion tiene lugar hácia el Sur, la fórmula seria: $u = \frac{1}{2}(g + g') - G + 180°$. Modificaciones análogas deben hacerse cuando el punto B está en otra region del horizonte, lo que siempre es muy fácil, como en el ejemplo siguiente. Habiendo hecho algunas observaciones en Tacubaya, quise enlazarlas con la triangulacion del Distrito, para lo cual una tarde poco ántes de anochecer, dirigí el anteojo de mi teodolito al asta-bandera de la catedral de México, que como es sabido, queda hácia el Este de aquella poblacion, y leí la indicacion $G = 7°\ 17'\ 10''$. Poco despues observé la estrella α *Eridani* que culmina cerca del horizonte Sur, y obtuve respectivamente: $g = 127°\ 7'\ 50''$ y $g' = 129°\ 13'\ 10''$ ántes y despues de su tránsito por el meridiano. Con estos elementos se tiene:

$g =$	127°	7′	50″
$g' =$	129	13	10
$g + g' =$	256	21	00
Indicacion meridiana $= \frac{1}{2}(g + g') =$	128	10	30
$G =$	—7	17	10
Angº azimutal del Sur al Este........	120	53	20
	180°		
Azimut del asta-bandera $=$	300°	53′	20″ $= u$

Otras dos observaciones de la misma estrella ejecutadas en diferentes noches, dieron en término medio $u = 300°\ 53'\ 14''$. Esta concordancia fué debida á la bondad del instrumento que usaba, que era un teodolito grande con magnífico telescopio, á pesar de que el intervalo que dejaba trascurrir de una observacion á su correspondiente, no excedia comunmente de un cuarto de hora. No siempre debe esperarse la misma armonía entre los resultados, pero creo poder asentar que el error de un azimut determinado por este método, aun con un instrumento pequeño, no excederá de 1′ ó 2′, especialmente si se deja trascurrir el tiempo suficiente para que se haga bien perceptible el movimiento ascensional de la estrella, pues muy cerca del meridiano es tan pequeño que se tiene mucha incertidumbre respecto del momento preciso en que aquella corta el hilo horizontal de la retícula. Parece inútil advertir que jamas debe conformase el ingeniero con una sola observacion, aunque no fuese mas que para juzgar del grado de concordancia que puede esperar, y el medio aritmético de sus resultados será el azimut mas probable é independiente de errores accidentales.

No terminaré lo relativo á este método sin señalar algunas estrellas cuya posicion en nuestro país es favorable para su aplicacion, y que con ayuda de una carta celeste, aprenderá á conocer muy pronto el ingeniero, pues todas ellas son de un brillo notable. En los meses de Enero, Febrero y Marzo, pasan por el meridiano á una hora cómoda para la observacion, las estrellas α *Aurigœ*, β *Tauri* y α *Geminorum* al Norte, y β *Orionis*, α *Columbœ*, α *Argus*, α *Canis majoris* y α *Hydrœ* al Sur. Por Abril, Mayo y Junio, las estrellas de la *Osa mayor* y β *Ursœ minoris* al Norte, y β *Corvi*, α *Virginis*, α y β *Librœ* al Sur. En Julio, Agosto y Setiembre α *Coronœ*, β *Draconis*, α *Lyrœ* al Norte, y α *Pavonis*, α *Scorpii* y α *Gruis* al Sur. Finalmente en los últimos meses del año, α *Cassiopœ*, α *Persei* al Norte, y α *Piscis australis*, β *Ceti* y α *Eridani* al Sur.

81º Paso ahora á exponer un método mas general, puesto que permite trazar la meridiana, ú orientar directamente un lado trigonométrico cualquiera noche del año, y á una hora cualquiera. Consiste en dirigir el telescopio del teodolito á la estrella Polar, y luego que se ha hecho coincidir con la interseccion de los hilos y se ha fijado el limbo, en bajar el anteojo en virtud de su movimiento vertical, á fin de colocar una señal luminosa á la distancia conveniente, en coincidencia con los mismos hilos. La señal, que ha quedado de esta manera en el plano vertical que pasa por la estrella, y generalmente muy cerca del meridiano, se corrige en seguida por el pequeño azimut que tenia la Polar en el instante de la observacion del modo que voy á indicar.

La Polar A (fig. 44ª) describe al derredor del polo P en 24 horas el pequeño círculo $a\ A\ E\ a'$, cuyo radio ó distancia angular $A\ P$ al polo apenas excede actualmente de 1° 20′. Cuando en virtud de su movimiento verifica sus pasos, superior en a é inferior en a', por el meridiano, es evidente que su azimut es nulo; pero en cualquiera otro punto de su curso, en A por ejemplo, tendrá un azimut $P\ Z\ A$ medido por el ángulo que forma con el meridiano $Z\ P\ N$ el círculo vertical $Z\ A\ N'$ que pasa por la estrella; ángulo que es tambien igual á $N\ O\ N'$ formado por las intersecciones de estos planos verticales con el horizonte.

Segun esto, la señal luminosa establecida en coincidencia con la retícula, se ha colocado en n' sobre un punto de la direccion $O\ N'$, é importará variarla perpendicularmente á esta direccion, la cantidad necesaria $n'\ n$ para que quede situada en la meridiana $O\ N$. Para conseguirlo, ademas de la distancia $O\ n'$ que se puede medir, es tambien preciso conocer el azimut $n'\ O\ n$ de la estrella, lo cual es fácil puesto que en el triángulo esférico $Z\ P\ A$ se conoce $Z\ P$ que es la *colatitud* del observador O, ó el complemento de su latitud $P\ N$: el lado $A\ P$ que es la distancia polar de la estrella, y finalmente el ángulo $Z\ P\ A$, llamado *ángulo horario*, cuyo valor se deduce del tiempo que ha trascurrido desde el tránsito superior en a hasta el momento en que se observa la Polar en A, pues como su movimiento es uniforme y describe todo su círculo en 24^h, describirá un espacio angular de 15° por hora.

82º Lo que precede es suficiente para dar una idea del modo de hallar el azimut; pero para que el ingeniero no tenga necesidad de hacer estos cálculos, que por otra parte demandan algunos conocimientos de Astronomía práctica, he preparado las tablas que van en las páginas siguientes, las cuales lo ponen en aptitud de determinar en cualquiera instante el azimut de la Polar por medio de simples interpolaciones.

La primera tabla suministra las horas verdaderas del tránsito superior de la estrella por el meridiano, de manera que si el observador anota la hora á la cual dirige la visual á la Polar, esa hora comparada con la del paso, dará el tiempo trascurrido, ó sea el ángulo horario h que sirve de argumento para tomar de la segunda tabla el azimut que tenia la estrella en el momento de la observacion.

Para que se comprenda bien el uso de las tablas, es preciso hacer algunas explicaciones. En los usos comunes de la socidad la duracion que se llama dia, se divide en dos períodos de 12^h cada uno, de los que el primero comienza á media noche, y el segundo á medio dia, ó lo que es lo mismo, á las 12 de la mañana siguiente. De aquí resulta que para designar un instante cualquiera no basta el conocimiento de la hora, sino que ademas es necesario expresar el período á que corresponde, y así se dice: las tres de la tarde, las tres de la mañana; las nueve de la noche, las nueve de la mañana, &c. El método que usan los astrónomos para contar el tiempo no tiene este inconveniente, porque no dividen el dia, sino que lo cuentan desde 0^h hasta 24^h, tomando por orígen ó punto de partida el momento del medio dia, ó sea la hora del tránsito del sol por el meridiano. Se ve que ambos métodos no solo difieren en la manera de contar, sino tambien en el orígen, pues al paso que el dia civil comienza á media noche, el astronómico comienza doce horas despues, y de esto se deduce que la *fecha* civil es mayor que la astronómica en el período de la mañana, y que se igualan en el período de la tarde. Así, por ejemplo, cuando un astrónomo dice que la Polar pasará por el meridiano á $23^h\ 10^m$ el dia 21 de Abril de 1870, en el modo comun de contar debe entenderse que la culminacion se verificará á las $11^h\ 10^m$ de la mañana del dia 22. Recíprocamente si un fenómeno cualquiera tiene lugar á las 4^h de la mañana del dia 6, por ejemplo, la fecha astronómica seria el dia 5 á 16^h.

Todo esto no puede originar equivocacion alguna teniendo presentes las explicaciones anteriores, que pueden formularse en la regla siguiente. En los métodos civil y astronómico de contar el dia, las fechas y las horas, marchan de acuerdo desde 0^h hasta 12^h; pero pasada esta última hora, la fecha civil se adelanta respecto de la astronómica, y en cuanto á las horas la astronómica es 12^h mayor que la civil.

En la tabla referente á los tránsitos de la Polar, he adoptado el método astronómico de contar el dia, como mas sencillo. Las horas del paso superior están calculadas directamente para cada diez dias de los años 1870, 1880, 1890 y 1900, esto es: para todo lo que falta de este siglo. Para los dias intermedios de esos años, se obtiene la hora del tránsito por interpolacion, ó simplemente disminuyendo cuatro minutos por cada dia que trascurre desde el que se toma por

HORAS VERDADERAS DEL TRÁNSITO SUPERIOR DE LA POLAR POR EL MERIDIANO.

FECHAS.		AÑO DE 1870.	AÑO DE 1880.	AÑO DE 1890.	AÑO DE 1900.
Enero	1	6^h 22^m	6^h 27^m	6^h 28^m	6^h 34^m
„	11	5 38	5 43	5 44	5 50
„	21	4 55	5 00	5 2	5 7
Febrero	1	4 10	4 15	4 16	4 22
„	11	3 30	3 35	3 36	3 42
„	21	2 51	2 56	2 57	3 3
Marzo	1	2 21	2 22	2 27	2 29
„	11	1 44	1 45	1 51	1 52
„	21	1 8	1 9	1 14	1 16
Abril	1	0 28	0 29	0 34	0 36
„	11	23 47	23 48	23 54	23 56
„	21	23 10	23 11	23 17	23 19
Mayo	1	22 33	22 34	22 39	22 41
„	11	21 54	21 55	22 1	22 2
„	21	21 15	21 16	21 21	21 23
Junio	1	20 30	20 31	20 37	20 38
„	11	19 49	19 50	19 55	19 57
„	21	19 8	19 9	19 14	19 16
Julio	1	18 26	18 27	18 33	18 34
„	11	17 45	17 46	17 52	17 53
„	21	17 5	17 6	17 11	17 13
Agosto	1	16 22	16 23	16 28	16 30
„	11	15 44	15 45	15 50	15 52
„	21	15 6	15 8	15 13	15 15
Setiembre	1	14 26	14 27	14 33	14 34
„	11	13 50	13 51	13 57	13 58
„	21	13 14	13 16	13 21	13 23
Octubre	1	12 38	12 40	12 45	12 47
„	11	12 2	12 3	12 8	12 10
„	21	11 25	11 26	11 31	11 33
Noviembre	1	10 42	10 44	10 49	10 51
„	11	10 3	10 4	10 9	10 11
„	21	9 21	9 22	9 28	9 29
Diciembre	1	8 39	8 40	8 45	8 47
„	11	7 55	7 56	8 2	8 3
„	21	7 11	7 12	7 17	7 19
„	31	6 26	6 27	6 33	6 34

punto de partida. Si, por ejemplo, se desea saber la hora del paso el 5 de Abril de 1870, se tiene:

Tránsito el dia 1º de Abril.....................	0^h 28^m
Aceleracion por 4 dias trascurridos.........	—16
Tránsito el dia 5 de Abril........................	0^h 12^m

lo cual quiere decir que la culminacinn de la Polar se verificará 12^m despues del medio dia.

Para el cálculo del tránsito en un dia cualquiera perteneciente á alguno de los años que no constan en la tabla, estableceremos la regla de que en el trascurso de un año comun, la hora del paso se atrasa $1^m.3$ respecto de la que corresponde á la misma fecha del año anterior, y por el contrario, se anticipa $2^m.6$ en el trascurso de un año bisiesto. De aquí se deduce que si designamos por C el número de años comunes, y por B el de bisiestos contenidos en un período dilatado: por P la hora del tránsito en alguno de los dias que constan en la tabla, y por P' la que despues de $C + B$ años, corresponde á la misma fecha, se tendrá:

$$P' = P + 1^m.3\ C - 2^m.6\ B$$

Supongamos que se quiera saber á qué hora culminará la Polar el dia 14 de Enero de 1875. Tomando por punto de partida el año de 1870, tenemos que en los cinco años trascurridos, solo el de 1872 es bisiesto (*), y hallarémos:

Tránsito el 11 de Enero de 1870.............	$5^h\ 38^m$
Aceleracion por 3 dias..........................	-12
$P =$	$5^h\ 26^m$
Correccion por $C = 4$, y $B = 1$.............	$+\ 2.6$
Tránsito el 14 de Enero de 1875.......$P' =$	$5^h\ 28^m.6$

ó sea $5^h\ 29^m$, desechando las decimales de minuto.

La misma regla se apliea aun cuando el dia para el cual se quiere hallar la hora del paso pertenezca á un año bisiesto, con tal que la fecha no exceda del 28 de Febrero; pero en el caso contrario, se cuenta ya como bisiesto el año de que se trata. Calculemos, por ejemplo, la hora de la culminacion el dia 5 de Mayo de 1892.

Tránsito el dia 1º de Mayo de 1890........	$22^h\ 39^m$
Aceleracion por 4 dias.........................	-16
$P =$	$22^h\ 23^m$
Correccion por $C = 1$, y $B = 1$............	-1.3
$P' =$	$22^h\ 21^m.7$

(*) Recordarémos que en cada cuatro años hay uno bisiesto, y que los años bisiestos se conocen en que la cifra que los representa es exactamente divisible por 4, de modo que los de 1872, 1876, 1880. &c., son bisiestos.

que segun lo que se ha dicho, equivale á $10^h\ 22^m$ de la mañana del dia 6. Igual resultado se hallaria con $C = 9$, y $B = 3$, tomando por punto de partida el año de 1880.

83º Una vez explicado el uso de la tabla, ocupémonos de las demas operaciones para la determinacion del azimut. Si es T la hora verdadera que se anota al dirigir la visual á la Polar, y P la hora del paso calculada por la tabla para el dia de la observacion, el ángulo horario aproximativo de la estrella será: $h = T - P$, y con este valor expresado en horas y minutos, se toma de la segunda tabla el azimut por interpolacion. La inspeccion de esta tabla manifiesta que las mayores variaciones del azimut, que tienen lugar cuando el ángulo horario se aproxima á 0^h ó á 12^h, no exceden generalmente de $20''$ á $25''$ por cada minuto de tiempo, y de esto se infiere desde luego que para obtener la precision necesaria en la orientacion de una triangulacion topográfica, es suficiente conocer el valor de h con la aproximacion de 2^m á 3^m. Como, por otra parte, casi todo el error que tenga h debe provenir del grado de exactitud con que se conozca la hora T, importa dar algunas reglas para determinar con la aproximacion necesaria, la correccion que debe hacerse sufrir al relox que se use, á fin de reducir sus indicaciones á las que corresponden al tiempo verdadero.

El medio mas sencillo de hallar la correccion consiste en comparar directamente la indicacion t del relox á medio dia, con la de un cuadrante solar, instrumento que se encuentra generalmente en casi todos los pueblos que no tienen relojes públicos, y aun en muchas haciendas. La correccion será:

$$c = 12^h - t$$

Es claro que t indica la hora que señala el relox cuando son las doce del dia, de modo que el valor de c resultará positivo ó negativo segun que el relox esté atrasado ó adelantado, respecto del tiempo verdadero. Habiendo relojes públicos, que se arreglan generalmente por medio de buenos cuadrantes, se hallará la correccion de la misma manera.

Otro método mas exacto y muy fácil de aplicar en cualesquiera circunstancias, consiste en anotar las horas del relox á las cuales el sol llega á la misma altura al Oriente y al Occidente, esto es: ántes y despues de su paso por el meridiano. La observacion por la mañana se hace entre las siete y las once, y por la tarde entre la una y las cinco. El tiempo que trascurre de una observacion á su correspondiente, es tanto mayor cuanto mas pequeña sea la altura del sol, de manera que si al Este se observa, por ejemplo, á las ocho de la mañana, deberá observarse al Oeste hácia las cuatro de la tarde; miéntras que si la primera observacion tiene lugar cerca de las once de la mañana, la segunda se verificará poco despues de la una de la tarde. En general, las horas de ambas observaciones, debiendo ser equidistantes del medio dia, convendrá hacer la primera lo mas tarde que sea posible, á fin de que toda la operacion dure poco tiempo, mas como suele suceder que los telescopios de los teodolitos no pueden elevarse lo bastante para dirigirlos hácia el sol, á causa de la grande altura que adquiere este astro cuando la hora de la mañana es algo avanzada, deberá elegirse la mas conveniente para atender á todas estas circunstancias.

Despues de nivelar muy bien el teodolito, se dirige su telescopio al sol, y luego que se tiene en el campo (hácia la parte superior si el anteojo invierte las imágenes), se paraliza su movimiento vertical, y se anota la hora del relox en el instante en que el borde superior del sol, que por la inversion se verá hácia abajo, es tangente al hilo horizontal de la retícula. Sin tocar el instrumento se espera á que el otro borde pase por el mismo hilo, y se anota la nueva indicacion del relox. El término medio de ambas indicaciones dará la hora á la cual el centro del sol se hallaba en el hilo, con lo que queda terminada la primera observacion.

El instrumento debe permanecer en el mismo estado hasta el momento de hacer la segunda observacion hácia el Oeste, aunque conviene anotar la graduacion del círculo vertical para estar seguro de que no se ha movido el telescopio, ó para corregirlo en el caso contrario. Cuando se acerca la hora en que se juzga que el sol debe llegar á la misma altura, se le dirige el anteojo, en virtud del movimiento azimutal del teodolito; pero teniendo cuidado de no variar su inclinacion, y en caso de que los niveles indiquen algun cambio, se hace la correccion necesaria con los tornillos del pié del instrumento. En esta segunda observacion se presentará el sol en la parte inferior del campo del telescopio, y luego que su limbo inferior, que por la inversion se verá hácia arriba, toque el hilo horizontal, se apuntará la hora del relox, haciendo la misma operacion respecto del otro borde. La semisuma de las nuevas indicaciones es la hora en que el centro del sol se hallaba á la altura marcada por el hilo.

Debe advertirse que para hacer las observaciones solares se pone delante del ocular un pequeño disco de vidrio de un color muy oscuro llamado *helioscopio*, que tiene por objeto mitigar la intensidad de la luz. Comunmente los teodolitos de Trougthon tienen uno ó dos helioscopios; pero en su lugar puede usarse un vidrio comun ahumado que se ennegrece lo bastante para que no moleste la luz del sol.

Sean ahora t_1 y t_2 las horas anotadas en la observacion de la mañana y en la de la tarde respectivamente, y supongamos que despues de las doce, en lugar de contar una, dos, &c., horas, se cuenta trece, catorce, &c., añadiendo siempre 12^h á la del relox. Entónces la hora á la cual se hallaba el sol en el meridiano, será $\frac{1}{2}(t_1 + t_2)$. Pero como un relox arreglado exactamente á la marcha solar deberia señalar las doce, inferimos que la correccion del que se ha usado es:

$$c = 12^h - \tfrac{1}{2}(t_1 + t_2)$$

Ejemplo.—Cuando el limbo de un instrumento señalaba una distancia zenital de 33° 30′, hallé que los dos bordes del sol adquirieron esa elevacion á las horas siguientes:

	POR LA MAÑANA.	POR LA TARDE.
Limbo superior	$9^h\ 56^m\ 10^s$	$14^h\ 15^m\ 30^s$
Limbo inferior	9 58 30	14 13 10
	$t_1 = 9^h\ 57^m\ 20^s$	$t_2 = 14^h\ 14^m\ 20^s$

$$\tfrac{1}{2}(t_1 + t_2) = 12^h\ 5^m\ 50^s$$
$$12$$
$$c = \quad -5^m\ 50^s$$

No es enteramente necesario observar los dos bordes, pues cualquiera de ellos debe dar el mismo resultado; pero siempre es bueno hacerlo así para mayor seguridad y para no exponerse á equivocacion tomando un limbo por otro. Si el relox no tiene aguja de se-

AZIMUTES DE LA ESTRELLA POLAR. = α

AÑO DE 1870.						AÑO DE 1880.					
Angulo horario.	LATITUD.					Angulo horario.	LATITUD.				
	15°	20°	25°	30°	35°		15°	20°	25°	30°	35°
0^h	00.'0	00.'0	00.'0	00.'0	00.'0	0^h	00.'0	00.'0	00.'0	00.'0	00.'0
1	22. 4	23. 1	24. 0	25. 1	26. 7	1	21. 5	22. 2	23. 0	24. 2	25. 6
2	43. 2	44. 5	46. 2	48. 5	51. 4	2	41. 5	42. 8	44. 5	46. 6	49. 4
3	61. 0	62. 8	65. 3	68. 4	72. 5	3	58. 7	60. 4	62. 7	65. 8	69. 7
4	74. 6	76. 8	79. 7	83. 6	88. 5	4	71. 8	73. 9	76. 7	80. 3	85. 1
5	83. 1	85. 5	88. 7	92. 9	98. 3	5	79. 9	82. 2	85. 3	89. 3	94. 5
6	85. 9	88. 3	91. 6	95. 8	101. 3	6	82. 6	84. 9	88. 0	92. 2	97. 4
7	82. 9	85. 1	88. 2	92. 3	97. 5	7	79. 7	81. 8	84. 8	88. 7	93. 7
8	74. 2	76. 2	78. 9	82. 4	87. 0	8	71. 3	73. 2	75. 8	79. 3	83. 7
9	60. 5	62. 1	64. 3	67. 1	70. 8	9	58. 2	59. 7	61. 8	64. 6	68. 1
10	42. 7	43. 9	45. 4	47. 4	50. 0	10	41. 1	42. 2	43. 6	45. 6	48. 0
11	22. 1	22. 7	23. 5	24. 5	25. 8	11	21. 3	21. 8	22. 6	23. 6	24. 8
12	00. 0	00. 0	00. 0	00. 0	00. 0	12	00. 0	00. 0	00. 0	00. 0	00. 0

gundos, se anotan solo los minutos, y por apreciacion las fracciones de minuto, como en el ejemplo que sigue:

	ORIENTE.	PONIENTE.		
				$12^h\ 00^m.0$
Limbo superior......	$9^h\ 46^m.8$...........	$13^h\ 59^m.1$	$\frac{1}{2}(t_1 + t_2) =$	$11\ \ 52.9$
Limbo inferior.......	$9\ \ 49.7$............	$13\ \ 56.2$		
	$t_1 = 9^h\ 48^m.2$	$t_2 = 13^h\ 57^m.6$	$c =$	$+ 7^m.1$

Bajo el punto de vista teórico, el método de alturas iguales del sol para determinar la hora, tal como lo he presentado, no es enteramente exacto, á causa de que variando algo la declinacion del astro de la mañana á la tarde, el promedio de las horas no corresponde con toda precision al instante del medio dia; pero como el error que se origina de suponer nulo el cambio de declinacion, nunca llega en nuestras latitudes á 15^s, es evidente que por el procedimiento indicado siempre se conseguirá conocer la correccion con la aproximacion de un minuto, que es la suficiente para las operaciones topográficas.

Una vez hallada la correccion, se deduce que cuando el relox señala la hora t, la hora exacta es $T = t + c$, al ménos si el instru-

AZIMUTES DE LA ESTRELLA POLAR.

	AÑO DE 1890.						AÑO DE 1900.				
Angulo horario.	LATITUD.					Angulo horario.	LATITUD.				
	15°	20°	25°	30°	35°		15°	20°	25°	30°	35°
0^h	00.'0	00.'0	00.'0	00.'0	00.'0	0^h	00.'0	00.'0	00.'0	00.'0	00.'0
1	20.7	21.3	22.1	23.2	24.6	1	19.8	20.4	21.2	22.3	23.6
2	39.9	41.1	42.7	44.8	47.5	2	38.3	39.4	40.9	42.9	45.5
3	56.4	58.1	60.3	63.2	67.0	3	54.0	55.6	57.8	60.6	64.2
4	69.0	71.0	73.7	77.2	81.8	4	66.1	68.0	70.6	74.0	78.4
5	76.8	79.0	82,0	85.8	90.8	5	73.6	75.7	78.6	82.3	87.0
6	79.4	81.6	84.6	88.6	93.6	6	76.1	78.2	81.1	84.9	89.7
7	76.6	78.7	81.5	85.3	90.1	7	73.4	75.4	78.1	81.7	86.3
8	68.6	70.4	72.9	76.2	80.4	8	65.7	67.5	69.9	73.0	77.1
9	55.9	57.4	59.4	62.0	65.5	9	53.6	55.0	56.9	59.5	62.7
10	39.7	40.5	41.9	43.8	46.2	10	37.8	38.8	40.2	42.0	44.2
11	20.4	21.0	21.7	22.6	23.9	11	19.6	20.1	20.8	21.7	22.9
12	00.0	00.0	00.0	00.0	00.0	12	00.0	00.0	00.0	00.0	00.0

mento anda con regularidad, y si su marcha diaria no difiere mucho del movimiento del sol, lo que se comprueba haciendo con intervalo de algunos dias otra observacion de alturas iguales. Si los dos valores de c difieren notablemente, su diferencia dividida por el número de dias trascurridos dará la marcha diaria, que puede tomarse en cuenta para interpolar el valor de c que corresponde á una indicacion dada t del relox.

84º Segun vimos en el número anterior, el ángulo horario de la Polar en el momento de la observacion es $h = T - P = t + c - P$; siendo t la indicacion del relox. Con el valor de h como argumento se toma de la tabla que contiene los azimutes de la estrella el que corresponde á la observacion; mas como en general los elementos de ángulo horario, latitud y año que constan en la tabla no serán los que convengan al observador, tendrá que hacer una triple interpolacion para hallar el azimut que corresponde á sus circunstancias especiales. Estas interpolaciones se facilitan sin sacrificio de la exactitud necesaria, de esta manera. Sea x la diferencia entre dos azimutes de la tabla correspondientes al mismo ángulo horario y al mismo año, pero á distintas latitudes; llamemos y la diferencia por el ángulo horario para el mismo año y la misma latitud; y finalmente, sea z la diferencia por los años, con latitud y ángulo horario iguales. Es evidente que $\frac{x}{5}$ será la diferencia debida al cambio de 1° de latitud, puesto que las latitudes de la tabla varian de 5° en 5°. Por la misma razon $\frac{y}{60}$ será la variacion del azimut correspondiente á la de 1^m del ángulo horario; y $\frac{z}{10}$ la diferencia debida al trascurso de un año. Segun esto, si designamos por α el azimut de la tabla que se toma por punto de partida; por l, expresado en grados, el exceso de latitud del observador, respecto de la que corresponde á α; por m el número de minutos del ángulo horario, y por n el de años de exceso, tambien respecto de los que corresponden á α, tendrémos:

$$a = \alpha + \frac{l}{5}x + \frac{m}{60}y + \frac{n}{10}z$$

Se tendrá cuidado de dar á x, y, z los signos convenientes, teniendo presente que para hallar estos valores debe siempre restarse cada cantidad de la tabla de la que sigue inmediatamenie en el órden creciente de la latitud, del ángulo horario y de la fecha. Un ejemplo hará comprender muy bien la operacion que no ofrece dificultad alguna.

Supongamos que á la latitud de 27° 13′ se quiera saber cuál es el azimut de la Polar el dia 17 de Octubre de 1874, en el momento en que un relox cuya correccion es $c = -6^m.2$ señala $t = 9^h\ 20^m.5$. Segun lo que se ha dicho anteriormente, deberá hallarse que la hora del tránsito es $P = 11^h\ 41^m.1$, y así se tendrá:

El valor de P equivoco?

$$\begin{array}{rr}
t = & 9^h\ 20^m.5 \\
c = & -6.2 \\
\hline
T = & 9^h\ 14^m.3 \\
P = & 11\ \ 41.1 \\
\hline
h = - & 2^h\ 26^m.8
\end{array}$$

Para el punto de partida debe tomarse $\alpha = 0°\ 46'.2$, que es el azimut correspondiente á la latitud de 25°, al ángulo horario de 2^h y al año de 1870, esto es; á los elementos inmediatamente menores que los que entran como datos en el problema. Tendrémos, pues:

$$l = 2.°2\ ; \qquad m = 26^m.8\ ; \qquad n = 4.$$

Las diferencias serán:

$$x = 48.'5 - 46.'2 = + \ 2.'3$$
$$y = 65.\ 3 - 46.\ 2 = + 19.\ 1$$
$$z = 44.\ 5 - 46.\ 2 = - \ \ 1.\ 7$$

por lo cual el azimut que se busca es:

$$a = 46.'2 + 0.447 \times 19.1 + 0.44 \times 2.3 - 0.4 \times 1.7 = 0^\circ\ 55.'0$$

En este ejemplo, el signo negativo de h indica que la estrella se supone observada al Oriente, esto es: ántes de su paso por el meridiano, y en casos semejantes debe darse al azimut el mismo signo, por lo cual el valor adoptado será:

$$a = -0^\circ\ 55.'0$$

Pongamos otros ejemplos para ejercicio del lector. El dia 7 de Enero de 1887, ¿cuál será el azimut de la Polar á la latitud 19° 26′, cuando un relox que tenga 5^m de adelanto indique las $11^h\ 17^m.0$?

Resolucion: $a = +1^\circ\ 20.'2$

¿Qué azimut tendrá la Polar el 17 de Setiembre de 1878, cuando un relox que tenga $21^m.5$ de atraso señale las $12^h\ 57^m.3$ de la noche, siendo de 22° 9′ la latitud del observador?

Resolucion: $a = -0^\circ\ 4.'5$

Cuando se desea no omitir requisito alguno que contribuya á la mayor precision de los resultados, es preciso hacer al ángulo horario, determinado como se ha dicho ántes, una pequeña correccion que proviene de la desigual duracion del dia sideral respecto del solar. El primero, que es el tiempo trascurrido entre dos pasos sucesivos de una estrella por el meridiano, es cosa de 4^m menor que el tiempo que trascurre entre los dos tránsitos del sol que determinan el dia solar. En consecuencia, y puesto que ambas duraciones se dividen en 24 horas, resulta que para convertir las horas solares en siderales deberá hacerse á las primeras un aumento proporcional á los 4^m ó 240^s que corresponden á la duracion total. Como se ve, la correccion es sencillísima, pues se reduce á aumentar el ángulo horario $h = t + c - P$, que expresa el tiempo solar, á razon de 10^s por cada hora. Así, por ejemplo, si se hubiera hallado por el relox $t + c - P = 10^h\ 41^m = 10^h.7$, agregarémos $107^s = 1^m\ 47^s$, y el ángulo horario en tiempo sideral seria $h = 10^h\ 42^m\ 47^s$, ó bien.... $10^h\ 42^m.8$. Esta correccion adquiere alguna importancia cuando h difiere poco de 12^h; porque entónces es casi de 2^m, y la tabla indica que en esas circunstancias el azimut varia cosa de $20''$ en cada minuto de tiempo.

85º Uno de los elementos que han servido para calcular el azimut por medio de la tabla, es la latitud del observador. Creo difícil que un ingeniero deje de conocer la que corresponde al lugar en que trabaja, aunque no sea mas que con la aproximacion de $\frac{1}{4}$ de grado: cualquiera carta geográfica que consulte le dará quizá mayor exactitud; pero suponiendo que no fuera así, basta que sepa cuál es con poca diferencia su distancia, *contada de Norte á Sur*, á una poblacion cuya latitud sea conocida, para que pueda calcular la que corresponde al sitio en que se encuentra. Recordemos para esto, que un grado de latitud tiene una extension de 26.5 leguas mexicanas con muy corta diferencia, y que por consiguiente, dos lugares cuya distancia contada en el meridiano sea d leguas, tendrán una diferencia de latitud que expresada en grados es: $g = \frac{d}{26.5} = 0.0377\ d$. Así, pues, si D representa la distancia aproximativa entre dos puntos, y R su *rumbo*, ó sea el ángulo que su direccion forma con el meridiano, se tendrá: $g = 0.0377\ D \cos. R$. La cantidad g sumada con su signo á la latitud del punto conocido, dará la del otro con la aproximacion necesaria para el objeto que nos ocupa, puesto que la tabla de los azimutes manifiesta que estos varian muy poco por cambios considerables de latitud.

86º El conocimiento del azimut a que tenia la Polar en el momento de la observacion, pone al ingeniero en la aptitud de corregir la señal n' (fig. 44ª) que provisionalmente estableció en el vertical de la estrella. Si en el triángulo $O\ n'\ n$ rectángulo en n', se designa por $\triangle$ la distancia $O\ n'$ del teodolito á la señal, se tiene:

$$n\,n' = \Delta \tan.\ a = \Delta\ a \text{ sen. } 1'$$

expresando á a en minutos. En la figura se ha supuesto que la señal n' se habia colocado hácia el Norte y que el azimut era positivo, en cuyo caso la pequeña distancia $n\ n'$ debe contarse hácia el Este. Se tomaria en sentido contrario si a fuese oriental ó negativo, ó bien si siendo positivo se hubiera establecido la señal hácia el Sur. Todo esto es tan sencillo que no necesita mas explicaciones.

Supongamos que se estableció provisionalmente una señal á una distancia de 200^m hácia el Sur del teodolito, y que en seguida se halló que la Polar tenia en el instante de la observacion un azimut de — 1° 7.′5.

200................	2.3010
—67.5..............	1.8293—
sen. 1′............	6.4637
	0.5940— $n\,n' = -3^m93$

El signo negativo del resultado indica que esta pequeña distancia debe tomarse hácia la izquierda del observador.

Luego que se ha rectificado la direccion de la meridiana con la nueva señal n, se mide cuantas veces se quiera el ángulo $B\ O\ N$, que no será otra cosa mas que el azimut de un punto trigonométrico que suponemos en B. A la verdad, la medida de este azimut no exige necesariamente el trazo previo de la meridiana, ni aun la colocacion de la señal provisional en n'; porque es evidente que bastará establecer en B una señal luminosa y medir directamente el ángulo horizontal $B\ O\ N'$ formado por los dos planos verticales que pasan por la señal y por la estrella, para obtener:.................. $a\,z.\ O\ B = B\ O\ N' + a$. Todo consistirá en anotar la hora cada vez que se dirige la visual á la Polar, y designando en general por A el promedio de los ángulos medidos y *contados siempre de izquierda á derecha partiendo de la señal*, se tiene: $a\,z.\ O\ B = A + a$; fórmula en la cual a representa el azimut de la estrella tomado de la tabla y correspondiente al promedio t de las horas anotadas. El valor de a será positivo ó negativo segun que la Polar se haya observado al Occidente ó al Oriente, esto es: despues ó ántes de su tránsito superior por el meridiano.

Cuando el plano vertical que pasa por la estrella es tangente en E ó en E' al paralelo ó círculo diurno que describe, el azimut a llega á su valor máximo, y se dice que la Polar está en su *mayor elongacion*, ya sea oriental ú occidental. Estas se verifican próximamente 6^h ántes y despues del tránsito (*), y es cuando la observa-

(*) Con mas exactitud, las elongaciones se verifican actualmente, cuando el ángulo horario es $5^h\ 58^m$, para la latitud de 15°; y $5^h\ 56^m$ para la de 35°. En lo futuro diferirán de 6^h ménos aún. Por esto y porque el movimiento azimutal es casi nulo, he supuesto las mayores elongaciones á 6^h ántes y despues del tránsito, segun se ve en la tabla.

16

cion de la estrella presenta mayores ventajas en atencion á que su variacion azimutal es tan pequeña respecto del tiempo, que casi no tiene influencia alguna un error de consideracion en la hora del relox.

La determinacion exacta de un azimut es enteramente del resorte de la Astronomía práctica y demanda conocimientos especiales, así como varias operaciones preliminares bastante laboriosas; pero como la Topografía en este punto no exige una gran precision, espero que los métodos indicados, especialmente el último, que he procurado presentar de la manera mas fácilmente aplicable, será bastante para llenar todas las necesidades de esta ciencia. Los tratados europeos de Topografía se limitan á exponer el modo de trazar la meridiana por medio de círculos concéntricos, valiéndose del sol, tal como se ha dicho en este Capítulo; y tambien el que consiste en observar dos estrellas que pasen casi al mismo tiempo por el meridiano, sirviéndose de una plomada; pero es indudable que ninguno de estos dos procedimientos es susceptible de la exactitud que puede proporcionar el de alturas iguales de una estrella, ó el de las observaciones de la Polar, sin que por esto presenten mayores dificultades en su aplicacion.

87º La teoría de los azimutes proporciona otro medio de ligar con una cadena trigonométrica, un punto desde el cual no pueden distinguirse mas que dos vértices de la triangulacion. Si en el punto C (fig. 45ª) se mide el azimut $u = N\ C\ A$ de la direccion $C\ A$, y llamamos u' el azimut conocido $N'\ A\ B$ del lado trigonométrico $A\ B$, tendrémos en el caso que representa la figura:

$$A = 180^\circ + u - u'$$
$$B = u' - (u + C)$$

y por consecuencia:

$$a = c\,\frac{\text{sen.}\ (u' - u)}{\text{sen.}\ C}\ ; \qquad b = c\,\frac{\text{sen.}\ \big(u' - (u + C)\big)}{\text{sen.}\ C}$$

En los valores de A y B se harán las modificaciones que exija la situacion del punto C respecto de los vértices, para lo cual conviene construir un cróquis que la represente; y cuando se recurra á esta clase de procedimientos deben apuntarse en el registro en la columna destinada á las *Notas*, todos los datos y explicaciones que se crean necesarias para evitar la confusion. El problema actual no es susceptible de una resolucion muy exacta por este método, en atencion á que la medida de un azimut en que se funda, no puede en lo general hacerse con el mismo grado de precision que una observacion angular entre dos puntos terrestres; pero en otra ocasion verémos que adquiere bastante importancia en la Planometría parcial cuando se hace uso de la *brújula*, que es un instrumento que dá directamente ángulos azimutales respecto de una linea que difiere poco de la meridiana.

Para terminar esta parte de la triangulacion dirémos que cuando sea posible, conviene medir el azimut de dos ó mas lados distantes con el objeto de comprobar la orientacion comparando el resultado de la observacion directa, con el que se obtiene por medio de los ángulos de la cadena.

CAPITULO VI.

CÁLCULO DE LOS TRIÁNGULOS.

88º Luego que se han recogido en el terreno todos los datos y apuntes necesarios, que se han hallado los promedios de las series para convencerse, ántes de abandonar el campo de operaciones, de que la suma de los tres ángulos de cada triángulo y de los que se observan al derredor de un mismo vértice, no difieren de la suma teórica mas que una pequeña cantidad que no exceda de los límites de error que se crea conveniente admitir, y por último, luego que se ha construido el cróquis de las operaciones, que es tan útil para aclarar las anotaciones del registro trigonométrico, se procede á la resolucion de los triángulos para determinar en seguida la posicion de cada vértice independientemente de los demas.

Los cálculos en realidad no ofrecen dificultad alguna, pues el caso comun es uno de los mas usuales de la trigonometría elemental, y si les he consagrado un Capítulo especial, es únicamente para indicar algunas reglas relativas al mejor modo de guiar las operaciones numéricas. En efecto, la marcha que debe seguirse en ellas no es del todo indiferente; porque es fácil comprender que los pequeños errores de observacion que siempre existen, aun despues de hechas las correcciones con mas ó ménos arbitrariedad, pueden propagarse y combinarse de mil maneras diversas de un triángulo á otro, de tal suerte que produzcan diferencias apreciables en los últimos lados de la cadena. El calculador debe, por tanto, adoptar un camino sistemático para distribuir los errores del mejor modo posible, evitar su acumulacion en una sola parte de la red trigonométrica é independerse hasta cierto punto de las influencias nocivas á la armonía de los resultados. Esto exige por lo comun una resolucion aproximativa, especialmente cuando no todos los ángulos se han observado desde el centro de estacion, pues se recordará que en la fórmula que se emplea para reducirlos, entran como elementos los lados del triángulo; y en vista de los resultados preliminares es como se debe estudiar con la mayor atencion el modo mas conveniente de distribuir los errores resultantes.

Para la ejecucion de los cálculos provisionales observarémos las reglas generales siguientes: 1ª Se comenzará por hacer la suma de los ángulos de cada triángulo, y dividir entre ellos el error total por partes iguales, de modo que aquella se reduzca á 180°. 2ª Si hay uno ó mas puntos centrales que sirvan de vértice comun á varios ángulos cuya suma no dé exactamente 360°, se dividirá la diferencia tambien por igual entre todos ellos; mas como esta última operacion altera naturalmente la suma de los ángulos de cada triángulo, es preciso hacerla á los otros dos ángulos con signo diferente. Estas dos reglas se siguen siempre que todas las observaciones son dignas de igual confianza; en el caso contrario podrá hacerse la distribucion en razon del grado de incertidumbre; pero siempre con mucho discernimiento principalmente si los errores angulares son de alguna consideracion.

89º Algunos geómetras suponen que, en igualdad de circunstancias, un ángulo resulta tanto mas exacto cuanto mayor es el número de observaciones de que proviene. Admitido este principio como cierto, se deduce que cuando los tres ángulos de un triángulo, ó bien cuando todos los ángulos que tienen un vértice comun no se han medido un mismo número de veces, el error final no deberá distribuirse por partes iguales, sino en proporcion del grado de incertidumbre, ó lo que es lo mismo, en razon inversa del número de repeticiones que corresponde á cada ángulo. Segun esto, sean A, B, C los tres ángulos obtenidos respectivamente por l m y n observaciones, y $e = 180° - (A + B + C)$ el error resultante. Si llamamos x, y, z las correcciones, puesto que deben ser inversamente proporcionales á l, m y n, tendrémos que los productos lx, my y nz serán iguales; y designándolos por P, podrémos establecer las ecuaciones de condicion:

$l : m : n ::$
$z : y : x$
$lx = my = nz$

$$lx = P \qquad my = P \qquad nz = P$$

Como, ademas, las correcciones deben ser tales que dén e por suma, se tendrá: $e = x + y + z$

$$e = P\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)$$

de lo que resulta:

$$P = \frac{e}{\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}} = \frac{lmn}{lm + ln + mn}\, e \text{..........} \quad (1)$$

y por consiguiente:

$$x = \frac{P}{l} \qquad y = \frac{P}{m} \qquad z = \frac{P}{n} \text{..............} \quad (2)$$

Sean, por ejemplo, $A + B + C = 180°\ 1'\ 30''$ y $l = 4$, $m = 5$, $n = 6$. Con estos datos se tiene:

$$P = -\frac{4 \times 5 \times 6}{20 + 24 + 30} \times 90 = -\ 145.9$$

$$x = -\ 36.''5 \qquad y = -\ 29.''2 \qquad z = -\ 24.''3$$

El principio que sirve de fundamento á este método, no creo que debe aceptarse de una manera general; pero al ménos proporciona un medio de distribuir el error con ménos apariencia de arbitrariedad.

Cuando sin hacer una vuelta de horizonte, se hallan medidos en el mismo vértice varios ángulos que se pueden obtener los unos por los otros

90º Pasemos ahora el cálculo de la triangulacion, tomando como primer ejemplo algunos triángulos de la cadena del Distrito representados en la figura 29ª Estos triángulos, aunque demasiado pequeños para que pudieran servir de tipo en las operaciones topográficas del órden comun, forman parte de un trabajo especial ejecutado con esmero, y por tanto son propios para exponer el método general con que debe discutirse la distribucion de los errores en una operacion delicada. En seguida presentaré otros triángulos del órden comun, y medidos por consiguiente con mas rapidez.

Los ángulos medios, ó sean los observados, constan en la tabla siguiente: al lado de ellos están los corregidos de la diferencia respecto de 180°; y por último los adoptados para la resolucion.

TRIANGULACION DEL DISTRITO.

Triángulos. NOMBRES DE LOS VERTICES.	ÁNGULOS. OBSERVADOS.	REDUCIDOS A 180°.	ADMITIDOS.
F Extremo oriental de la base	65° 2′ 20.″4	65° 2′ 20.″4	65° 2′ 20.″4
G ,, occidental ,,	53 32 32. 5	53 32 32. 5	53 32 32. 5
H Tres Puentes..................	61 25 7. 1	61 25 7. 1	61 25 7. 1
	180 00 00. 0	180 00 00. 0	180 00 00. 0
G Extremo Oeste de la base...	74 26 43. 3	74 26 40. 4	74 26 38. 7
H Tres Puentes..................	37 21 47. 5	37 21 44. 7	37 21 42. 9
A Ixtacalco (iglesia)............	68 11 37. 7	68 11 34. 9	68 11 38. 4
	180 00 8. 5	180 00 00. 0	180 00 00. 0
A Ixtacalco	72 56 36. 3	72 56 36. 7	72 56 40. 2
G Extremo Oeste de la base...	61 58 42. 1	61 58 42. 5	61 58 40. 7
Z Candelaria........................	45 4 40. 4	45 4 40. 8	45 4 39. 1
	179 59 58. 8	180 00 00. 0	180 00 00. 0
A Ixtacalco	83 53 46. 7	83 53 48. 2	83 53 51. 6
Z Candelaria........................	54 10 41. 7	54 10 43. 3	54 10 41. 4
X San Simon (iglesia)...........	41 55 26. 9	41 55 28. 5	41 55 27. 0
	179 59 55. 3	180 00 00. 0	180 00 00. 0

CAH = 68° 11′ 37″.7
HAB = 75 22 5.4
BAY = 59 35 36.7
XAZ = 83 53 46.7
ZAC = 72 56 36.
359° 59′ 42″.
+ 17.

Triángulos. NOMBRES DE LOS VERTICES.	ÁNGULOS. OBSERVADOS.	REDUCIDOS Á 180°.	ADMITIDOS.
X San Simon	36° 16′ 1.″4	36° 16′ 00.″5	36° 16′ 0.″8
Z Candelaria	54 52 19. 6	54 52 18. 7	54 52 18. 6
T La Piedad (iglesia)	88 51 41. 7	88 51 40. 8	88 51 40. 6
	180 00 2. 7	180 00 00. 0	180 00 00. 0
T La Piedad	61 12 32. 1	61 12 35. 3	61 12 35. 1
X San Simon	75 40 42. 1	75 40 45. 3	75 40 45. 6
U Mixcoac (iglesia)	43 6 36. 2	43 6 39. 4	43 6 39. 3
	179 59 50. 4	180 00 00. 0	180 00 00. 0
X San Simon	52 43 45. 8	52 43 42. 2	52 43 42. 5
U Mixcoac	56 8 59. 6	56 8 56. 0	56 8 55. 9
Y Coyoacan (iglesia)	71 7 25. 4	71 7 21. 8	71 7 21. 6
	180 00 10. 8	180 00 00. 0	180 00 00. 0
X San Simon	84 40 19. 2	84 40 17. 9	84 40 18. 2
Y Coyoacan	46 49 29. 2	46 49 27. 9	46 49 27. 8
B Mexicaltzingo (iglesia)	48 30 15. 4	48 30 14. 2	48 30 14. 0
	180 00 3. 8	180 00 00. 0	180 00 00. 0
X San Simon	68 43 41. 4	68 43 43. 7	68 43 42. 2
B Mexicaltzingo	51 40 35. 0	51 40 37. 3	51 40 35. 4
A Ixtacalco	59 35 36. 7	59 35 39. 0	59 35 42. 4
	179 59 53. 1	180 00 00. 0	180 00 00. 0
A Ixtacalco	75 22 5. 4	75 22 3. 6	75 22 7. 1
B Mexicaltzingo	47 43 45. 8	47 43 44. 1	47 43 42. 3
H Tres Puentes	56 54 14. 1	56 54 12. 3	56 54 10. 6
	180 00 5. 3	180 00 00. 0	180 00 00. 0
B Mexicaltzingo	69 6 15. 0	69 16 15. 0	69 16 15. 0
H Tres Puentes	47 46 7. 9	47 46 7. 9	47 46 7. 9
D Ixtapalapa (cerro)	62 57 37. 1	62 57 37. 1	62 57 37. 1
	180 00 00. 0	180 00 00. 0	180 00 00. 0

Por la tabla se verá que si se toman los ángulos medios ántes de hacer correccion alguna, las observaciones al derredor de *A* y *X* dán — 17.″2 y — 3.″2 respectivamente, y despues de hecha la primera correccion resulta — 17.″5 y — 1.″9. Así, pues, el error angular medio en A permanece el mismo con poquísima diferencia, miéntras que al derredor de X se reduce casi á la mitad. De aquí resulta que aun reduciendo la suma de cada triángulo á 180°, queda todavía para cada uno de los ángulos en A un error de — 3.″5, y para los apoyados en X uno de — 0.″3. Este último es del todo insignificante, y para hacerlo desaparecer bastará modificar ligeramente la cifra decimal de los valores de los ángulos al derredor de X sin que por esto se altere sensiblemente la suma de los triángulos, pues á cada uno de los ángulos que terminan el polígono....... $A\ Z\ T\ U\ Y\ B$ le corresponderá solo — 0.″15, cantidad que no produce variacion sensible en el valor de los lados. Si muchas veces se conservan las cifras decimales, es por no aumentar materialmente las causas de error en las adiciones ó sustracciones que sea preciso ejecutar con las cantidades á que pertenecen; pero al ménos en las operaciones de esta categoría, no hay inconveniente alguno en desecharlas, tomando la unidad entera mas próxima, en los valores que definitivamente se adopten.

Respecto de los errores en los ángulos A, como son algo mas considerables, hay ya fundamento para temer su influencia; mas como por ahora no tenemos indicio alguno que nos guie en su mejor distribucion, procedemos como en el caso anterior añadiendo 3.″5 á los ángulos en A y restando 1.″75 á cada uno de los otros dos para no alterar las sumas, como se ve en la última columna de la tabla precedente.

Es preciso convenir en que la marcha hasta aquí seguida no está autorizada mas que por la carencia de mejores medios, y habrá casos en que los errores finales, mas fuertes que en el ejemplo que consideramos, produzcan variaciones sensibles en los lados de una cadena algo extensa; pero guiando los cálculos de la manera que vamos á hacerlo, siempre será fácil hallar hasta cierto punto el indicio de una mala suposicion y del modo de coordinar mejor los resultados.

Como la base de nuestra triangulacion es $F\ G$ perteneciente al primer triángulo, calcularémos primero el lado $G\ H$ para lo cual tenemos un lado y los tres ángulos. Una vez calculado $G\ H$ y el triángulo $G\ H\ A$, podemos proseguir de dos maneras: ó partiendo del lado $G\ A$ por los triángulos $G\ A\ Z$, $Z\ A\ X$, &c., que están en la parte de arriba en el cróquis, para terminarlos en $A\ H$, ó bien siguiendo un órden inverso, esto es: comenzando por $A\ H$ y terminando en $A\ G$. Ambos caminos serian indiferentes suponiendo todas las operaciones exactas; pero en la práctica es mucho mas conveniente dividir el cálculo en dos grupos, que partiendo de la misma base se reunan en un lado comun distante de esta igual número de triángulos con poca diferencia. Así es que ciñéndonos por ahora al polígono $H\ B\ Y \ldots\ldots Z\ G$, cerrado todo por los triángulos que no tienen mas que un lado exterior, comenzarémos por $A\ G$ para terminar en $U\ X$, y por $A\ H$ para terminar en el mismo lado $U\ X$, debiendo encontrar valores sensiblemente iguales si no hay errores de importancia en las operaciones. Luego que esté definitivamente arreglado el polígono, calcularémos el triángulo $B\ H\ D$, que tanto por ser en cierto modo independiente del polígono principal, ó de sus vértices centrales, como por no haber error en sus ángulos, es de una importancia comparativamente menor.

91º Antes de poner á la vista los cálculos, indiquemos dos procedimientos que tienden á disminuir el trabajo. Al calcular cada triángulo, tal como $F\ G\ H$, puesto que se van á determinar los dos lados, se tendrá:

$$G\,H = F\,G\,\frac{\text{sen. } F}{\text{sen. } H} \qquad\qquad F\,H = F\,G\,\frac{\text{sen. } G}{\text{sen. } H}$$

Se ve que ambas ecuaciones tienen comun la *base del cálculo* $F\ G$ y su ángulo opuesto H: de consiguiente, haciendo una sola vez la operacion indicada por la fórmula, se evitará una sustraccion en cada triángulo. La segunda indicacion que creemos útil consiste en conservar las diferencias logarítmicas por $1''$ de cada uno de los *senos*, pues si por los resultados hallamos que es preciso modificar mas ó ménos los primeros cálculos, será mucho mas fácil variar simplemente las últimas cifras de los logaritmos que volverlos á tomar de las tablas. Las diferencias mencionadas son necesarias si en lugar de seguir el método comun se adopta un nuevo procedimiento que indicaré, para corregir los cálculos preliminares, sin necesidad de repetir toda la resolucion como se ha hecho hasta hoy.

Conviene, pues, arreglar los cálculos de la manera que sigue:

CÁLCULOS DE LA TRIANGULACION DEL DISTRITO.

		Dif. log. por 1''		Dif. log. por 1''
	F G...... 3.4759662 sen. *H*...... 9.9435631	11.5		
F G H	3.5324031 sen. *F*...... 9.9574134	9.8	3.5324031 sen. *G*........... 9.9054161	15.6
	3.4898165 *G H* = 3089^{m}0		3.4378192 *F H* = 2740^{m}4	
	A G...... 3.3051391 sen. *Z*...... 9.8500718	21.0		
A G Z	3.4550673 sen. *G*...... 9.9458461	11.2	3.4550673 sen. *A*......... 9.9804674	6.4
	3.4009134 *A Z* = 2517^{m}2		3.4355347 *G Z* = 2726^{m}0	
	A Z...... 3.4009134 sen. *X*...... 9.8248716	23.5		
A Z X	3.5760418 sen. *A*...... 9.9975322	2.2	3.5760418 sen. *Z*...... 9.9089356	15.2
	3.5735740 *Z X* = 3746^{m}1		3.4849774 *A X* = 3054^{m}8	
	Z X...... 3.5735740 sen. *T*...... 9.9999142	0.4		
X Z T	3.5736598 sen. *Z*...... 9.9126826	14.8	3.5736598 sen. *X*...... 9.7719895	28.7
	3.4863424 *T X* = 3064^{m}4		3.3456493 *T Z* = 2216^{m}4	
	T X...... 3.4863424 sen. *U*...... 9.8346831	22.5		
T X U	3.6516593 sen. *T*...... 9.9426967	11.6	3.6516593 sen. *X*...... 9.9862909	5.3
	3.5943560 *U X* = 3929^{m}67		3.6379502 *T U* = 4344^{m}6	

Como se ve, ambos valores de UX solo difieren 0^{m}38, cantidad que no llega á 0.0001 de su longitud, de suerte que bastaria adoptar por resultado final su término medio 3929^{m}86, y en este caso la in-

BASE $F\,G = 2992^{m}032$

	Dif log		Dif log	
		por 1''		por 1''
	$G\,H$...... 3.4898165			
	sen. A...... 9.9677571	8.4		
	3.5220594		3.5220594	
$G\,H\,A$	sen. H...... 9.7830797	27.6	sen. G...... 9.9837927	5.8
	3.3051391		3.5058521	
	$A\,G = 2019^{m}0$		$A\,H = 3205^{m}2$	
	$A\,H$...... 3.5058521			
	sen B...... 9.8692111	19.1		
	3.6366410		3.6366410	
$A\,H\,B$	sen. H...... 9.9231127	13.8	sen. A...... 9.9856829	5.5
	3.5597537		3.6223239	
	$A\,B = 3628^{m}7$		$H\,B = 4191^{m}1$	
	$A\,B$...... 3.5597537			
	sen. X...... 9.9693558	8.2		
	3.5903979		3.5903979	
$A\,B\,X$	sen. A...... 9.9357443	12.3	sen. B...... 9.8946052	16.6
	3.5261422		3.4850031	
	$B\,X = 3358^{m}5$		$A\,X = 3054^{m}9$	
	$B\,X$...... 3,5261422			
	sen. Y...... 9.5628824	19,7		
	3.6632598		3.6632598	
$B\,X\,Y$	sen. B...... 9.8744822	18.6	sen. X...... 9.9981193	2.0
	3.5377420		3.6613791	
	$X\,Y = 3449^{m}4$		$B\,Y = 4585^{m}4$	
	$X\,Y$...... 3.5377420			
	sen. U...... 9.9193332	14.2		
	3.6184088		3.6184088	
$X\,Y\,U$	sen. Y...... 9.9759892	7.2	sen. X...... 9.9007900	16.0
	3.5943980		3.5191988	
	$U\,X = 3930^{m}05$		$U\,Y = 3305^{m}2$	

certidumbre no llegaria á 0.00005 que es cuanto puede necesitarse. Este resultado no es excepcional: en toda triangulacion practicada con esmero, y càlculada convenientemente para dividir la influencia de pequeños errores, la incertidumbre final no excede por lo comun de 0.0002 de la longitud del lado de prueba, y esto me parece suficiente en todos casos. (Creo que en una buena triang. pudiera reducirse á 0.0001 y ademas que en las triang. que no tienen mas objeto que

92º Si la diferencia fuese mas considerable, y estudiando los valores de los errores angulares no se tuviese razon para modificar unos ángulos mas que otros, se recurrirá á un método de correccion que voy á desarrollar. El mismo camino se sigue cuando habiendo medido dos bases hácia los extremos de la cadena, se calcula una de ellas partiendo de la otra: entónces si el resultado del cálculo difiere sensiblemente de la medida directa, y si ademas se tiene fundamento para atribuir la misma confianza á las medidas de ambas bases, se supone, para conseguir la concordancia de los resultados, que los ángulos tienen un ligero error, el cual se determina estableciendo la condicion de que el lado calculado sea igual al medido, y de que no por eso se altere la suma de los tres ángulos de cada triángulo.

la representa- representa gráfica desahogadamente el ultimo ver- no ha de ser gráficamente mayor que 0.000 m 2 cada hoja

Mr. Puissant encuentra una fórmula aplicable á este caso, qua tiene el inconveniente de incluir como factor una suma algebráice de *cotangentes,* lo que la hace sumamente impropia para el cálculo logarítmico, siendo preciso ó tener una tabla de cotangentes naturales, ó deducirlas de sus valores logarítmicos con un aumento considerable de trabajo. He procurado remplazarla con otra libre de este defecto.

Hemos visto ya (núm. 36º) que un lado cualquiera de la triangulacion puede derivarse inmediatamente de la base por la ecuacion:

$$a_n = a \frac{\text{sen. } B_1 \text{ sen. } B_2 \text{.........} \text{ sen. } B_n}{\text{sen. } A_1 \text{ sen. } A_2 \text{.........} \text{ sen. } A_n} \text{..................} \quad (1)$$

Pero si suponemos que este lado sea la otra base medida, que resultó igual á $a_n + \varepsilon_n$, será preciso para coordinar el cálculo con la medida, añadir x segundos á los ángulos B y restarlos de los ángulos A para que no varien las sumas. Se tendrá, pues:

$$a_n\left(1+\frac{\varepsilon_n}{a_n}\right) = a_n + \varepsilon_n = a \frac{\text{sen. } (B_1 + x) \text{ sen. } (B_2 + x) \text{.........} \text{ sen. } (B_n + x)}{\text{sen. } (A_1 - x) \text{ sen. } (A_2 - x) \text{.........} \text{ sen. } (A_n - x)} \quad *$$

Para determinar á x, apliquemos á estas ecuaciones un método

$* \log a_n + \log\left(1+\frac{\varepsilon_n}{a_n}\right) = M\frac{\varepsilon_n}{a_n} + \log a_n = \log a + (\log \text{sen} B_1 + \beta_1 x + \log \text{sen} B_2 + \beta_2 x \dots + \log \text{sen} B_n + \beta_n x) - (\log \text{sen} A_1 - \alpha_1 x + \log \text{sen} A_2 - \alpha_2 x \dots + \log \text{sen} A_n - \alpha_n x)$

$\log a_n = \log a + (\log \text{sen} B_1 + \log \text{sen} B_2 \dots + \log \text{sen} B_n) - (\log \text{sen} A_1 + \log \text{sen} A_2 \dots + \log \text{sen} A_n)$

restando la segunda de la primera

$M\frac{\varepsilon_n}{a_n} = (\beta_1 x + \beta_2 x \dots + \beta_n x) + (\alpha_1 x + \alpha_2 x \dots + \alpha_n x)$ y despejando á x

semejante al que seguimos en el núm. 36º, y no habrá dificultad en obtener:

$$x = (6.63778)\,\frac{\frac{\varepsilon_n}{a_n}}{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots \alpha_n + \beta_1 + \beta_2 \ldots\ldots \beta_n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

La cantidad que va dentro del paréntesis es el logaritmo de la constante 4342945. (*) En cuanto á $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \beta_1, \beta_2$, expresan las diferencias logarítmicas de los senos, por 1″, tales como constan en la tabla precedente, del cálculo trigonométrico.

En la cadena que he tomado por ejemplo, la diferencia final es tan pequeña, que bajo el punto de vista práctico no hay necesidad de modificar los valores suministrados por la resolucion, porque si en el último lado no resulta mas que 0^m19 de duda respecto del medio, es muy probable que sea menor en los otros. Esto no obstante, para que se vea el modo de aplicar nuestra fórmula, adoptemos la distancia *Mixcoac* — *San Simon* de $3929.^m86$, y busquemos la correccion x que deben sufrir los ángulos de la primera mitad de la triangulacion partiende de $A\ G$ para que el cáculo dé precisamente el valor adoptado.

Se tendrá: $\varepsilon_4 = +\,0.19$ y $a_4 = 3929.67$

Triángulo $A\ G\ Z$....	$\alpha_1 = 21.0$		$\beta_1 = 11.2$	Log. const.... 6.63778
,, $A\ Z\ X$....	$\alpha_2 = 23.5$		$\beta_2 = 2.2$	$\frac{\varepsilon_4}{a_4}$.... 5.68439+
,, $X\ Z\ T$....	$\alpha_3 = 0.4$		$\beta_3 = 14.8$	
,, $T\ X\ U$....	$\alpha_4 = 22.5$		$\beta_4 = 11.6$	2.32217+
	67.4	+	39.8 = 107.2................	2.03019
				0.29198+
				$x = +\,1.''96$

Por el mismo procedimiento encontrariamos que en la segunda mitad de la cadena apoyada en $A\ H$ como base, la correccion es — 1.″86. Estos dos resultados son numéricamente menores que el

(*) Advertiré una vez por todas que siempre que escriba una cantidad numérica entre paréntesis, indico *el logaritmo de un factor constante*, y no debe entenderse que es el factor mismo, de modo que al aplicar las fórmulas, debe *sumarse* con los logaritmos de los demas factores. Esta anotacion convencional para abreviar, ha sido adoptada ya en varias obras inglesas de matemáticas aplicadas.

$x = M \dfrac{\frac{\varepsilon_n}{a_n}}{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\ldots+\alpha_n+\beta_1+\beta_2+\beta_3\ldots+\beta_n}$; pero como los α y β conforme los dán las tablas de logaritmos, espresan 10 000 000as, para que espresen enteros, multiplicaremos ~~la fórmula~~ el numerador por 10 000 000 y como $M = 0.4342945$

$x = 4342945 \dfrac{\frac{\varepsilon_n}{a_n}}{\alpha_1+\alpha_2\ldots+\alpha_n+\beta_1+\beta_2\ldots+\beta_n}$ .... (2)

log. 4342945 = 6.637778

error angular medio de la triangulacion, el cual varia desde 0″ hasta 3.″6, segun se ve en la tabla de los ángulos observados; por consiguiente, nada tiene de absurda la hipótesis establecida, y la diferencia final se explica perfectamente por la existencia de estos leves errores. Si sucediese lo contrario, creo que lo mejor seria revisar las series que produjeron los ángulos observados y desechar los resultados mas discordes en el sentido conveniente para disminuir el error final, ó bien hacer aquellas suposiciones mas libres de arbitrariedad y que ménos deformen el polígono, no alterando mucho los valores angulares obtenidos por la observacion directa. Por fortuna las discrepancias en las lineas de comprobacion nunca son considerables, á ménos que haya existido algun defecto notable en los instrumentos, ó algun vicio radical en la ejecucion, lo que puede conocerse desde las primeras observaciones por las fuertes diferencias que resultan en los valores de los mismos elementos; pero en este caso las operaciones son esencialmente malas é inadmisibles, y no podrian sujetarse razonablemente á ningun procedimiento fundado en principios científicos.

Antes de proseguir hagamos notar que si es muy pequeña la diferencia resultante en el último lado, y si ademas todos los triángulos de la cadena son bien configurados, puede introducirse una modificion en nuestra fórmula (2) que facilita algo su aplicacion, aunque en realidad es tan poco, que no vale la pena de exponerse por eso á encontrar resultados poco exactos. Suponiendo todos los ángulos de 60°, las diferencias logarítmicas tendrán 12.15 por valor medio, con lo que resulta:

$$x = (5.25217)\,\frac{\varepsilon_n}{n\,a_n}$$

Aplicada al caso anterior se tiene:

log. const.........	5.25217	
$\frac{\varepsilon_4}{a_4}$.........	5.68439+	
4.........	—0.60206	
	0.33450+	$x = +\,2.''16$

Aunque este guarismo sea sensiblemente el mismo que ántes, conservarómos el primero para hacer las correcciones y adoptar los ángulos definitivos.

93º Paso ahora á trazar mi método para corregir los cálculos preliminares de la cadena. La práctica constante hasta hoy ha sido repetirlos, despues de hacer á los ángulos las correcciones halladas por las fórmulas anteriores ú otras equivalentes; pero nuestras ecuaciones permiten operar con mas rapidez y evitar la monotonía del cálculo trigonométrico usual, lo que por cierto no es indiferente cuando se trata de un gran número de triángulos. La relacion (2) dá:

$\varepsilon_n = \frac{1}{4342945} \alpha_n x (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots \alpha_n + \beta_1 + \beta_2 + \dots \beta_n)$ $\quad \log\left(\frac{1}{4342945}\right) = \bar{7}.36222$

$$\varepsilon_n = (3.36222)\, a_n\, x\, (a_1 + a_2 + \dots\dots a_n + \beta_1 + \beta_2 + \dots\dots \beta_n) \dots\dots (3)$$

que puede servir para encontrar la correccion que conviene á un lado cualquiera, y como esta es siempre muy pequeña, basta usar logaritmos de tres á cuatro cifras decimales. Busquemos, por ejemplo, la correccion de la linea $T\,X$

$a_1 = 21.0$	$\beta_1 = 11.2$	log. cons.........	3.362
$a_2 = 23.5$	$\beta_2 = 2.2$	a_3.........	3.486 ...lado TX
$a_3 = 0.4$	$\beta_3 = 14.8$	x.........	0.292 ...corr. de los L opuestos á las bases
44.9	28.2	.........Suma = 73.1.........	1.864
			9.004
			$\varepsilon_3 = +\, 0^{m}10$

El lado corregido será, pues, de 3064ᵐ5. Nótese que la correccion de cada distancia se determina así independientemente de las demas, y que por tanto no hay peligro de que una equivocacion influya en todos los lados, como sucede á menudo en el cálculo trigonométrico.

Puesto que deben corregirse todas las distancias, importa proceder con órden para hacerlo mas pronto, de este modo: el logaritmo constante y el de x son comunes á todas las correcciones, y así, convendrá hacer una sola vez la suma: ademas, las diferencias logarítmicas correspondientes á cada triángulo deden sumarse con las de los triángulos precedentes que se tienen ya sumadas, de manera que lo mejor será sistemar el cálculo como sigue, en el que he designado por s la suma de a y β que pertenece á cada triángulo, y por S la de este y todos los anteriores á él.

$s_1 = 32.2$	$s_2 = 25.7$	$s_3 = 15.2$	$s_4 = 34.1$
$S_1 = 32.2$	$S_2 = 57.9$	$S_3 = 73.1$	$S_4 = 107.2$
3.654+	3.654+	3.654+	3.654+
a_1........ 3.401	a_2........ 3.573	a_3........ 3.486	a_4........ 3.594
S_1........ 1.507	S_2........ 1.762	S_3........ 1.864	S_4........ 2.030
$\begin{cases} 8.562+ \\ +0^m.04 \end{cases}$	$\begin{cases} 8.989+ \\ +0^m.10 \end{cases}$	$\begin{cases} 9.004+ \\ +0^m.10 \end{cases}$	$\begin{cases} 9.278+ \\ +0^m.19 \end{cases}$

Lo mismo se procede para corregir la otra mitad de la cadena con el valor correspondiente de x, que en nuestro caso es negativo; y se pasa por último á practicar las correcciones de los otros lados, tales como $G\,Z$, $B\,H$, $T\,Z$, $A\,X$, &c., que no han servido de bases para calcular otros triángulos, y para los que por consiguiente, no deben entrar mas que las α, pues el tercer ángulo de cada triángulo ha permanecido invariable.

Es mas cómodo aún, corregir directamente el logaritmo de cada uno de los lados, para lo cual se tiene:

$$a_n + \varepsilon_n = a_n\left(1 + \frac{\varepsilon_n}{a_n}\right); \text{ de donde}$$

$$\log.\,(a_n + \varepsilon_n) = \log.\,a_n + M\frac{\varepsilon_n}{a_n}$$

Sustituyendo el valor de ε_n que hemos hallado ántes, conseguirémos eliminar á a_n, y resultará:

$$\log.\,(a_n + \varepsilon_n) = \log.\,a_n + 0.0000001\,x\,S_n \text{..................} \quad (4)$$

$0.0000001 \times S_n = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots \alpha_n + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots \beta_n)$ siendo las diferencias logarítmicas $\alpha_1, \alpha_2, \dots \beta_1\, \beta_2 \dots$ espresadas en numeros enteros y correspondientes á 1"

ecuacion en que he conservado la anotacion S para indicar la suma de las diferencias logarítmicas hasta el órden n de triángulos. Esta última fórmula es tan sencilla, que no creo útil calcular por logaritmos la pequeña correccion de log. a_n; pues todo se reduce á multiplicar por S la diezmillonésima parte de x y añadir el producto con su signo, al logaritmo del lado que resultó en el cálculo preliminar. Como ejemplo, calculemos la correccion para el lado *Mixcoac — San Simon:* (el x y S es de la pag. 125)

$$0.000000196 \times 107.2 = 0.0000210+$$
$$\log.\,a_n \text{.........} \; 3.5943560$$
$$\log.\,(a_n + \varepsilon_n) \text{.........} \; 3.5943770$$

Este procedimiento dá la mayor exactitud y tiene la ventaja de porporcionar desde luego el logaritmo del lado correcto, que como verémos despues, se necesita para otros cálculos posteriores.

Para que el lector se familiarice con este método, pongo á continuacion el cálculo para toda la cadena, en forma de tabla, que es como se hace con mas facilidad y sin peligro de equivocacion.

	α	β	s	S	log. $(a_n + \varepsilon_n)$	$a_n + \varepsilon_n$
Primera mitad.	21.0	11.2	32.2	32.2	*A Z*...... 3.4009197	2517ᵐ12
	23.5	2.2	25.7	57.9	*Z X*...... 3.5735853	3746. 15
	0.4	14.8	15.2	73.1	*T X*...... 3.4863597	3064. 50
	22.5	11.6	34.1	107.2	*U X*...... 3.5943770	3929. 86
$x = + 1.''96$	21.0		21.0	21.0	*G Z*...... 3.4355388	2726. 08
	23.5		23.5	44.5	*A X*...... 3.4849861	3054. 82
	0.4		0.4	44.9	*T Z*...... 3.3456581	2216. 45
	22.5		22.5	67.4	*T U*...... 3.6379634	4344. 74
Segunda mitad.	19.1	13.8	32.9	32.9	*A B*...... 3.5597476	3628. 67
	8.2	12.3	20.5	53.4	*B X*...... 3.5261323	3358. 40
	19.7	18.6	38.3	91.7	*X Y*...... 3.5377249	3449. 25
	14.2	7.2	21.4	113.1	*U X*...... 3.5943770	3929. 86
$x = - 1.''86$	19.1		19.1	19.1	*H B*...... 3.6223203	4191. 02
	8.2		8.2	27.3	*A X*...... 3.4849980	3054. 91
	19.7		19.7	47.0	*B Y*...... 3.6613704	4585. 33
	14.2		14.2	61.2	*U Y*...... 3.5191874	3305. 12

Por comprobacion he repetido el cálculo de UX y AX en las dos partes de la triangulacion, y se ve que concuerdan perfectamente á pesar de haber aproximado el valor de los lados hasta los centímetros; pero aun en las mejores triangulaciones solo se toman los decímetros, que es acaso mas de lo que se necesita, y de lo que realmente se puede estar seguro de apreciar en las operaciones mas exactas de la topografía.

94º Sucede con mucha frecuencia que ya sea por equivocacion, ó ya por necesitarse pronto los valores aproximativos de los lados, se ejecutan los cálculos partiendo de un valor tambien aproximativo de la base: en tal caso es muy fácil corregir toda la cadena sin repetir el cálculo. Sea, en efecto, C el factor de a en nuestra ecuacion (1), el que suponemos constante, puesto que admitimos que se han corregido ya los ángulos y establecido definitivamente sus valores, segun hemos visto en todo lo que antecede: entónces la ecuacion mencionada será:

$$a_n = a\ C$$

Mas si la verdadera longitud de la base es $a + c$, se deberá hacer la correccion correspondiente al lado calculado a_n, y resulta:

$$a_n + c_n = (a + c)\, C$$

Eliminando á C se obtiene:

$$c_n = a_n \frac{c}{a} \qquad \text{..............................} \quad (5)$$

lo que indica que las correcciones son proporcionales á las distancias. Como el factor $\frac{c}{a}$ es constante, se hará el cálculo con la mayor facilidad; pero es todavía mejor corregir los logaritmos por la ecuacion siguiente que se deduce de las anteriores:

$c_n + a_n = a_n \frac{c}{a} + a_n = a_n \left(1 + \frac{c}{a}\right)$

$\log. (a_n + c_n) = \log a_n + M \frac{c}{a}$

$$\log. (a_n + c_n) = \log. a_n + (9.63778) \frac{c}{a} \qquad \text{..............................} \quad (6)$$

y todo queda reducido á sumar á cada logaritmo una cantidad constante.

Supongamos por un momento que la base de esta triangulacion debiera reducirse á 2990 metros, y busquemos la correccion que corresponde á la linea $T\,U$ cuyo valor y logaritmo constan en la tabla de cálculo precedente. Se tiene: $c = -\,2^{m}.032$, y los dos métodos de correccion serán:

ECUACION (5)		ECUACION (6)	
c......	0.30792—		
a......	3.47597		
Const.......	6.83195—		6.83195—
$T\,U$......	3.63796	Const......	9.63778
	0.46991—		6.46973—
			—0.0002949
$c_n =$	— 2.95		
$T\,U =$	4344.74	$T\,U$......	3.6379634
$T\,U + c_n =$	4341.79		3.6376685....... $T\,U + c_n = 4341^{m}.79$

la decimal — 0.0002949 seria la correccion comun á todos los logaritmos.

95? Habiendo expuesto ya los procedimientos generales para calcular y coordinar los elementos de una triangulacion, creo que ellos serán suficientes para resolver todos los casos que se presenten en el órden comun de esta clase de operaciones. En la imposibilidad de considerar en una obra elemental todos aquellos problemas que acaso se resolverian fácilmente por métodos particulares, estoy convencido de que el ingeniero y el calculador, bien penetrados del objeto que me propuse, hallarán siempre en estas indicaciones las bases para la resolucion de casos especiales: con ellas y un conocimiento profundo de la trigonometría, cuyo estudio no cesaré de recomendar, se presentarán siempre los medios de evitar hipótesis infundadas, y la propagacion de errores que tiendan á alterar las condiciones geométricas de la figura.

En cuanto al límite 0.0002 de incertidumbre final en el lado de prueba, es claro que no debe tomarse por un precepto invariable, pues en triangulaciones de igual mérito los errores crecerán en general con el número de triángulos; pero en cadenas que no excedan de 30 á 40 triángulos lo creo aun algo exagerado, porque supone una diferencia en el cálculo de las dos partes de la cadena, de 1 metro en 2500, lo que probablemente no sucederá mas que en el caso de que los errores angulares sean muy fuertes, ó que tengan el carácter de errores constantes. El estudio de la influencia de los errores de observacion, que acaso tendré ocasion de exponer en otra parte de esta obra, me ha conducido á considerar como indicios muy fundados de que en la triangulacion no existen mas que errores puramente fortuitos, los hechos de que la suma de las diferencias por exceso respecto de 180°, no discrepe mucho de la suma de las diferencias por defecto; así como que el número de triángulos en que se verifica lo primero, sea casi el mismo que aquel en que sucede lo segundo. De aquí resulta que si designamos por m el valor medio del error angular con abstraccion del signo; por ω el error angular medio final, atendiendo á los signos: por ε_1 y ε_2 respectivamente las sumas de los errores positivos y negativos; y por R la relacion entre los números de triángulos n_1 y n_2 cuyos errores son de distinto signo, se tendrá en los n triángulos de la red trigonométrica:

$$m = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{3\,n} \qquad \omega = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{3\,n} \qquad R = \frac{n_1}{n_2}$$

y el mejor indicio cuando $\omega = 0$, y $R = 1$. En el valor de R toma-

[m. no debe exceder de la aprox. del instr. dividido por el número de repet.

−	+
1.2	8.5
4.7	2.7
9.6	10.8
6.9	3.8
	5.3
22.″4	31.″1

rémos siempre por numerador el número mas pequeño, á fin de que esta relacion nunca resulte mayor que la unidad.

En la cadena que forma nuestro ejemplo, los errores positivos dán por suma 31.″1, y los negativos 22.″4: el número de triángulos de error positivo es 5, y el de los que tienen error por defecto es 4, de donde resulta $\omega = 0.''32$ y $R = 0.8$, valores bastante próximos á los límites ántes indicados, para juzgar favorablemente del mérito de la triangulacion. Como tambien resulta $m = 1.''98$, se ve que la correccion x hallada para coordinar los cálculos, es algo menor que el valor medio del error angular, y que por consiguiente fué muy razonable nuestra suposicion.

$\varepsilon_1 = 31.1$
$-\varepsilon_2 = -22.4$
$8.''7$
$\div (3 \times 9 = 27)$
$= 0.''32 = \omega$
$R = \frac{4}{5} = 0.8$
$\varepsilon_1 = 31.1$
$\varepsilon_2 = 22.4$
53.5
$\div (3 \times 9 = 27)$
$= 1.''98 = m$

96º En la triangulacion que ha servido de ejemplo se hicieron doce repeticiones de cada ángulo con teodolitos que aproximaban á 10″ la lectura angular. Como tipo de operaciones mas comunes, voy ahora á presentar algunos triángulos de la última cadena que he medido haciendo uso de un teodolito pequeño cuya aproximacion era solo de 1′, y en la que tomé los ángulos de tres ó cuatro veces, siguiendo el método de repeticion que se ha expuesto en la página 75. La base de esta triangulacion, que consta como ejemplo en la página 18, es la linea *J P* (fig. 46ª), de 11457ᵐ0, que une los cerros llamados de *San José* y de *las Palmas*. En la tabla siguiente, que contiene cuatro triángulos de la red, la última columna presenta las longitudes de los lados opuestos á los ángulos corregidos, y son los resultados del cálculo preliminar.

La triangulacion de que forman parte estos triángulos, fué bastante extensa en todos sentidos; pero suponiendo que solo constase de los cuatro triángulos cuyos elementos se ven en la tabla, la figura 46ª manifiesta que formarian una verdadera cadena en la cual no es posible aplicar los métodos de discusion y correccion que se aplicaron en el primer ejemplo. En efecto, aquellos procedimientos parten de la posibilidad de calcular un mismo lado por dos vías diferentes, lo que tiene lugar siempre que la triangulacion forma una red trigonométrica; pero no puede verificarse en una simple cadena como en el caso actual. Ademas de esto, como ninguno de los vértices de este ejemplo, segun los datos que constan arriba, se presta á la comprobacion de sumar todos los ángulos observados al derredor de un punto para comparar la suma á 360°, resulta que la única rectificacion hecha para obtener los ángulos corregidos, consiste en reducir la de cada triángulo á la suma 180°, distribuyendo entre ellos el error. De esta manera se han obtenido las cantidades de la última columna.

VÉRTICES.	LETRAS.	Angulos observados.	Angulos corregidos.	LADOS OPUESTOS.
Cerro de San José........	J	62° 19′ 56″	62° 19′ 46″	$MP = 11993^m.7$
Cerro de las Palmas.....	P	59 53 39	59 53 29	$JM = 11715.3$
Cerro de San Márcos...	M	57 46 55	57 46 45	$JP = 11457.0$
		180° 00′ 30″	180° 00′ 00″	
Cerro de las Palmas.....	P	39 27 37	39 27 19	$MR = 7665.5$
Cerro de San Márcos...	M	56 40 31	56 40 13	$PR = 10078.6$
Cerro del Rosal..........	R	83 52 47	83 52 28	$MP = 11993.7$
		180° 00′ 55″	180° 00′ 00″	
Cerro de las Palmas.....	P	28 39 30	28 39 34	$AR = 8086.5$
Cerro del Rosal..........	R	114 37 50	114 37 54	$AP = 15326.6$
Cerro de la Yerba-Anis	A	36 42 28	36 42 32	$PR = 10078.6$
		179° 59′ 48″	180° 00′ 00″	
Cerro de la Yerba-Anis	A	90 3 1	90 3 5	$RY = 9682.2$
Cerro del Rosal..........	R	33 18 43	33 18 46	$AY = 5317.7$
Cerritos....................	Y	56 38 6	56 38 9	$AR = 8086.5$
		179° 59′ 50″	180° 00′ 00″	

No es muy frecuente que las triangulaciones se extiendan en forma de cadenas en un solo sentido; pero sin embargo, en el Capítulo siguiente, despues de tratar lo relativo al cálculo de las coordenadas de los vértices, indicaré un método que he aplicado alguna vez para coordinar en casos análogos los resultados obtenidos por caminos diferentes.

CAPITULO VII.

CÁLCULO DE LAS COORDENADAS DE LOS VÉRTICES.

97º Todo lo que se ha dicho en los Capítulos anteriores nos pone en estado de poder asignar á cada vértice trigonométrico una situacion perfectamente definida con relacion á los demas; pero en todos casos es muy conveniente, y en algunos del todo necesario, determinar la posicion de cada uno de los puntos trigonométricos con entera independencia de los otros. Esto se consigue por medio de las anotaciones adoptadas en la Geometría analítica, esto es: refiriendo las posiciones á dos lineas fijas que se toman por ejes de coordenadas.

Aunque cualquiera sistema de lineas puede llenar igualmente bien el oficio de ejes de coordenadas, se adoptan de preferencia la meridiana y su perpendicular en atencion á que presentan desde luego un sistema de ejes rectangulares, que simplifica los cálculos, y á que la orientacion de los lados trigonométricos se refiere á aquellas lineas. Vimos ya, en efecto (pág. 94), que conociendo el azimut de un lado de la cadena, pueden deducirse con la mayor facilidad los de todos los demas, puesto que hasta ahora, hemos admitido la hipótesis del paralelismo de las meridianas entre sí, así como el de sus perpendiculares. Todo consistirá, pues, en trazar sobre el cróquis la meridiana y la perpendicular de cada vértice, y en combinar por adicion ó sustraccion el azimut conocido de uno de los lados, con los ángulos de la red. Así, por ejemplo, en la figura 46ª el azimut medido directamente es el del lado $P\,J$; y para obtener los de todas las lineas que parten de P, no se tendrá que hacer otra cosa mas que restar sucesivamente los ángulos que tienen ese punto por vértice. Designando por u el azimut medido se tendrá:

$$\text{az. } P\,M = u - J\,P\,M$$
$$\text{az. } P\,R = u - J\,P\,R = \text{az. } P\,M - M\,P\,R$$
$$\text{az. } P\,A = u - J\,P\,A = \text{az. } P\,R - R\,P\,A$$

Para poder continuar con los triángulos que sigan, se calcula el azimut inverso de uno de los lados, de $A\ P$ por ejemplo:

$$\text{az. } A\,P = \text{az. } P\,A + 180^\circ$$

y siguiendo el mismo método, puede obtenerse por comprobacion el azimut del lado primitivo, de esta manera:

$$\begin{aligned}
&\text{az. } A\,Y = \text{az. } A\,P - P\,A\,Y \\
&\text{az. } Y\,A = \text{az. } A\,Y + 180^\circ \\
&\text{az. } Y\,R = \text{az. } Y\,A - A\,Y\,R \\
&\text{az. } R\,Y = \text{az. } Y\,R - 180^\circ \\
&\text{az. } R\,M = \text{az. } R\,Y + Y\,R\,M \\
&\text{az. } M\,R = \text{az. } R\,M - 180^\circ \\
&\text{az. } M\,J = \text{az. } M\,R - R\,M\,J + 360^\circ = \text{az } MR + JMR \\
&\text{az. } J\,M = \text{az. } M\,J - 180^\circ \\
&\text{az. } J\,P = \text{az. } J\,M - M\,J\,P
\end{aligned}$$

El último valor es el azimut inverso del primitivo u, y por consiguiente deberá resultar igual á él, con diferencia de 180°.

De esta manera con la meridiana y perpendicular que pasan por cada vértice, quedan formados tantos triángulos rectángulos como lados tiene la red, y en cada uno se conoce la hipotenusa y los ángulos, siendo uno de ellos el azimut del lado trigonométrico correspondiente. Nada es, pues, mas sencillo que calcular los catetos de esos triángulos, ó sea las *proyecciones* de los lados trigonométricos sobre la meridiana y su perpendicular; proyecciones que vienen á ser las diferencias de coordenadas de los vértices unidos por cada uno de los lados.

98º El orígen de las coordenadas se elige arbitrariamente, y por lo comun es el mas importante de los vértices, á no ser que se quiera referir la cadena á la posicion de un punto fijado de antemano, en cuyo caso lo que debe hacerse es determinar la situacion de uno de los vértices trigonométricos por lo ménos, respecto de aquel punto, problema que no viene á ser mas que una simple trasformacion de coordenadas, para pasar de un sistema rectangular á otro tambien rectangular de ejes paralelos á los primeros; y todo queda reducido á añadir una cantidad constante á las coordenadas calculadas respecto de cualquiera de las estaciones trigonométricas, tomada al principio por orígen.

Por lo general se toma la meridiana por eje de ordenadas, y su perpendicular por eje de absisas; y así, designando por k la longitud de un lado cualquiera y por u su azimut, la diferencia de absisas y ordenadas de sus extremos, se tiene por las fórmulas siguientes:

$$x = k \text{ sen. } u \qquad y = k \cos. u$$

Los signos de x é y serán los que corresponden al *seno* y al *coseno* del azimut. Segun el modo que he adoptado de contar este ángulo, resulta que el *seno* es positivo en los dos primeros cuadrantes y negativo en los dos últimos; miéntras que el *coseno* es positivo en el primero y el cuarto, y negativo en el segundo y el tercero. Para mayor claridad pondré en forma de tabla las signos y los valores de las lineas trigonométricas, para los diversos azimutes que suponen el punto en cada uno de los cuatro cuadrantes.

CUADRANTES.	AZIMUTES.	x	y
I ó bien *N. O.*	$u < 90°$	$+ k$ sen. u	$+ k$ cos. u
II ,, *S. O.*	$u > 90$	$+ k$ sen. $(180° - u)$	$- k$ cos. $(180° - u)$
III ,, *S. E.*	$u > 180$	$- k$ sen. $(u - 180°)$	$- k$ cos. $(u - 180°)$
IV ,, *N. E.*	$u > 270$	$- k$ sen. $(360° - u)$	$+ k$ cos. $(360° - u)$

Por ejercicio tomemos provisionalmente por orígen el pnnto R de la figura 46ª, y calculemos las coordenadas de los vértices situados á su derredor que ofrecen ejemplos de los cuatro casos. El azimut medido es el del lado $J P$, y resultó de 50° 36′ 30.″ Con este y los ángulos corregidos que constan en el registro que termina el Capítulo anterior, se obtiene:

az. $P J =$	230° 36′ 30″
$J P M =$	— 59 53 29
$M P R =$	— 39 27 19
az. $P R =$	131° 15′ 42″
az. $R P =$	311 15 42

Con este azimut y los ángulos corregidos al derredor de R, se calculan los azimutes de todos los lados que parten de R, á saber:

az. $R\ Y =$ 99° 12′ 22″; az. $R\ A =$ 65° 53′ 36″; az. $R\ P =$ 311° 15′ 42″; az. $R\ M =$ 227° 23′ 14″.

y el cálculo de las coordenadas respecto de R, será:

$R\ Y$........	3.9859749	....	3.9859749
az. $R\ Y$...... sen......	9.9943696	cos.......	9.2040833—
	3.9803445		3.1900582—
	$x = +\ 9557^{\text{m}}5$		$y = -\ 1549^{\text{m}}0$
$R\ A$........	3.9077614	....	3.9077614
az. $R\ A$...... sen......	9.9603693	cos.......	9.6111813
	3.8681307		3.5189427
	$x = +\ 7381^{\text{m}}3$		$y = +\ 3303^{\text{m}}3$
$R\ P$........	4.0033992	....	4.0033992
az. $R\ P$...... sen......	9.8760477—	cos......	9.8192141
	3.8794469—		3.8226133
	$x = -\ 7576^{\text{m}}1$		$y = +\ 6646^{\text{m}}9$
$R\ M$........	3.8845400	....	3.8845400
az. $R\ M$...... sen......	9.8668460—	cos......	9.8306144—
	3.7513860—		3.7151544—
	$x = -\ 5641^{\text{m}}4$		$y = -\ 5189^{\text{m}}8$

En estos cálculos se toman los logaritmos de los lados, tales como resultan de la resolucion definitiva de los triángulos, con el objeto de evitar los pequeños errores que podrian originarse del diverso grado de aproximacion numérica, y tambien para evitar trabajo innecesario.

Se pasa en seguida á otro de los puntos tales como P ó M, cuyas coordenadas se tienen ya calculadas, á fin de hallar las de los vértices que faltan, como sucede con el punto J. El az. $P\ R$ combinado con los ángulos en P, dará: az. $P\ J = 230°\ 36'\ 30''$ y con este elemento y la longitud del lado, se hallan las diferencias de coordenadas de sus extremos, que serán — $8854^{\text{m}}3$ de proyeccion en la perpendicular, y — $7270^{\text{m}}8$ de proyeccion en la meridiana. Estas diferencias combinadas con las coordenadas de P, producen: $x = -\ 16430^{\text{m}}4$ é $y = -\ 623^{\text{m}}9$ para el punto J. De la misma manera se prosigue en toda la cadena.

Los números precedentes son las coordenadas referidas al vértice

R; pero si quisiéramos cambiar de orígen, restariamos de estas las coordenadas del nuevo orígen atendiendo á los signos. Supongamos, por ejemplo, que con el objeto de que todas las ordenadas resulten del mismo signo, creyéramos conveniente adoptar el punto *P* por orígen. Como las coordenadas de este referidas á *R*, son............ $x = -7576^{m}.1$, $y = +6646^{m}.9$, obtendriamos:

VÉRTICES.	x	y
J..............	— 8854ᵐ3..................	— 7270ᵐ8
P..............	0. 0..................	0. 0
A..............	+14957. 4..................	— 3344. 0
Y..............	+17133. 6..................	— 8195. 9
R..............	+ 7576. 1..................	— 6646. 9
M..............	+ 1934. 7..................	—11836. 7

Desde luego se comprende que no es necesario que el orígen pase precisamente por un punto trigonométrico; y aun es conveniente elegirlo de manera que todas las coordenadas resulten positivas, en atencion á que hay entónces ménos peligro de equivocar los signos cuando aquellas tengan que combinarse. Así, por ejemplo, adoptando por ejes la meridiana que pasa por el punto mas oriental *J*, y la perpendicular que pasa por el mas meridional *M*, se conseguirá el objeto indicado. El orígen que resulta de la interseccion de ambas lineas, se hallará $4565^{m}.8$ al Sur de *J*, y $10789^{m}.0$ al Oriente de *M*, que son las proyecciones del lado *J M* sobre la meridiana y su perpendicular. De aquí se deduce que las coordenadas de este nuevo orígen respecto del que pasa por *P*, son: $x = -8854^{m}.3$,............ $y = -11836^{m}.7$, y haciendo la trasformacion se obtiene:

VÉRTICES.	x	y
J..............	0ᵐ0..................	4565ᵐ8
P..............	8854. 3..................	11836. 7
A..............	23811. 7..................	8492. 7
Y..............	25987. 9..................	3640. 8
R..............	16430. 4..................	5189. 8
M..............	10789. 0..................	0. 0

99º La comprobacion del cálculo de las coordenadas consiste en comparar la diferencia de posicion de dos puntos extremos, sirviéndose de distintos lados. Por ejemplo, la suma algebraica de las proyecciones de JP, PA y AY dará la diferencia de coordenadas de los vértices J é Y, la cual tambien puede obtenerse por las proyecciones de los lados JM, MR y RY. Los dos resultados deben ser iguales, prescindiendo de los pequeños errores causados por la aproximacion numérica. En nuestro caso se tendrá:

Proyeccion de	JP	+ 8854.m3...	+7270.m8	Proyeccion de	JM	+10789.m0...	—4565.m8
,,	PA	+14957. 4...	—3344. 0	,,	MR	+ 5641. 4...	+5189. 8
,,	AY	+ 2196. 2...	—4851. 9	,,	RY	+ 9557. 5...	—1549. 0
		25987. 9	— 925. 1			25987. 9	— 925. 0

El resultado de esta prueba, que debe hacerse ántes de combinar las proyecciones para hallar las coordenadas de los vértices, indica que no ha habido equivocacion alguna en el cálculo.

La concordancia de los resultados debe existir siempre que la triangulacion sea una cadena como la que sirve de ejemplo; pero puede haber otros casos en que no exista, aun cuando el cálculo esté libre de error. Esto suele verificarse cuando se comparan las coordenadas de dos puntos distantes, deducidas por medio de dos ó mas cadenas independientes, como sucederia si partiendo de un mismo punto situado, por ejemplo, en un perímetro muy extenso, se formasen dos cadenas de triángulos dirigidas en sentidos opuestos, y que volviesen á concurrir en otro punto distante del primero. En este caso, aunque la base de ambas triangulaciones fuese la misma, las pequeñas modificaciones de los ángulos que son necesarias para reducir á 180° la suma de los de cada triángulo, originarian tambien ligeras variaciones en las distancias, y por consecuencia, se hallaria en general alguna diferencia entre las coordenadas del vértice extremo y comun á las dos cadenas.

La falta de armonía entre los resultados, aun en la misma cadena trigonométrica, puede tambien provenir de esta otra causa. Algunos ingenieros son de opinion que el cálculo de los azimutes de los lados debe hacerse valiéndose de los ángulos *observados*, y no de los corregidos como lo hice en el ejemplo precedente. Para proceder así se fundan en el hecho de que la correccion de los ángulos para reducirlos á la suma teórica, siempre se hace con mas ó ménos arbitrariedad. Este hecho es innegable y mas de una vez lo he manifestado así; pero tambien es cierto que siendo los errores de observacion ya positivos ó ya negativos, es muy probable que en el conjunto de los lados de una triangulacion se verifique una compensacion mas ó ménos completa, cuyo efecto inmediato es el de no alterar sensiblemente las direcciones de los mismos lados. Aun cuando resultase alguna ligerísima alteracion, simpre la figura que se obtenga será *cerrada*, es decir: sujeta á la condicion geométrica de que la suma de sus ángulos interiores sea igual á $(n - 2) \times 180°$, siendo n el número de lados; condicion que no puede existir sino accidentalmente, cuando no es de 180° la suma de los ángulos de cada triángulo elemental.

100º Sin hacer mencion de otros casos análogos en que pueden hallarse diferencias entre las coordenadas de un punto distante, obtenidas por diversos sistemas de lineas y ángulos, paso á exponer el método de correccion que he usado algunas ocasiones para distribuir el error entre todas las partes elementales de cada sistema. Supongo para esto que tanto los lados como los ángulos necesitan correccion, siendo constante la de los segundos y proporcional á su longitud la de los primeros.

Sean X' Y' respectivamente las diferencias de absisas y ordenadas entre los puntos A y B (fig. 17ª), obtenidas por un sistema de lados trigonométricos $A\,M$, $M\,N$, $N\,B$; y X'', Y'' las mismas diferencias obtenidas por otro sistema $A\,P$, $P\,Q$, $Q\,B$. Sea, ademas, n el número de lados del primer sistema, y n' el del segundo. Como las diferencias de coordenadas provienen de la suma algebraica de las proyecciones, tendrémos:

PRIMER SISTEMA.	SEGUNDO SISTEMA.
$X' = x'_1 + x'_2 + \dots\dots\, x'_n$	$X'' = x''_1 + x''_2 + \dots\dots\, x''_{n'}$
$Y' = y'_1 + y'_2 + \dots\dots\, y'_n$	$Y'' = y''_1 + y''_2 + \dots\dots\, y''_{n'}$

Si las operaciones fueran perfectas, deberian haber resultado las ecuaciones $X' - X'' = 0$; $Y' - Y'' = 0$. Así es que para satisfacerlas establezcamos las condiciones:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta X' + \Delta X'' = X' - X'' \\ \Delta Y' + \Delta Y'' = Y' - Y'' \end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

en las que designo por $\triangle$ la correccion que debe sufrir la cantidad á la cual va antepuesta. Como estas correcciones son las resultantes de las que corresponden á todas las proyecciones, considerando á las correcciones de estas últimas como cantidades diferenciales á causa de su pequeñez, tendrémos:

$$\Delta X' = \mathrm{d}\, x'_1 + \mathrm{d}\, x'_2 + \ldots\ldots \mathrm{d}\, x'_n \qquad \Delta X'' = \mathrm{d}\, x''_1 + \mathrm{d}\, x''_2 + \ldots\ldots \mathrm{d}\, x''_n.$$
$$\Delta Y' = \mathrm{d}\, y'_1 + \mathrm{d}\, y'_2 + \ldots\ldots \mathrm{d}\, y'_n \qquad \Delta Y'' = \mathrm{d}\, y''_1 + \mathrm{d}\, y''_2 + \ldots\ldots \mathrm{d}\, y''_n.$$

Segun vimos en otra parte, las fórmulas que dán las proyecciones, son:

$$x = k \text{ sen. } u \qquad\qquad y = k \cos. u$$

siendo u el azimut contado desde $0°$ hasta $360°$, y k el lado trigonométrico. Por la diferenciacion se obtienen fácilmente de las anteriores, estas otras:

$$\mathrm{d}\, x = + y\, \mathrm{d}\, u + x \frac{\mathrm{d}\, k}{k}$$
$$\mathrm{d}\, y = - x\, \mathrm{d}\, u + y \frac{\mathrm{d}\, k}{k}$$

La cantidad d u representa la correccion angular expresada en partes del radio, porque proviene de la diferenciación de una línea trigonométrica, y d k la correccion del lado k. Estas últimas debiendo ser proporcionales á la longitud de los lados, la relacion $\frac{\mathrm{d}\, k}{k}$ es constante. Designándola por r, y aplicando las fórmulas anteriores á todas las diferencias elementales de coordenadas, se obtiene:

$$\Delta X' = + (y'_1 + y'_2 + \ldots\ldots y'_n)\, \mathrm{d}\, u + (x'_1 + x'_2 + \ldots\ldots x'_n)\, r = + Y'\, \mathrm{d}\, u + X'\, r$$
$$\Delta Y' = - (x'_1 + x'_2 + \ldots\ldots x'_n)\, \mathrm{d}\, u + (y'_1 + y'_2 + \ldots\ldots y'_n)\, r = - X'\, \mathrm{d}\, u + Y'\, r$$

Del mismo modo hallariamos:

$$\Delta X'' = + Y''\, \mathrm{d}\, u + X''\, r \qquad\qquad \Delta Y'' = - X''\, \mathrm{d}\, u + Y''\, r$$

con lo que las ecuaciones (1) de condicion, serán:

$$(X' + X'')\, r + (Y' + Y'')\, \mathrm{d}\, u = X' - X''$$
$$(Y' + Y'')\, r - (X' + X'')\, \mathrm{d}\, u = Y' - Y''$$

en las que todo es conocido con excepcion de d u y r, que pueden determinarse por su combinacion. Designando para abreviar por X é Y respectivamente los resultados medios, y por $\triangle X$, $\triangle Y$ las semidiferencias obtenidas, esto es:

$$X = \tfrac{1}{2}(X' + X'') \qquad \Delta X = \tfrac{1}{2}(X' - X'')$$
$$Y = \tfrac{1}{2}(Y' + Y'') \qquad \Delta Y = \tfrac{1}{2}(Y' - Y'')$$

las ecuaciones precedentes vendrán á ser:

$$X r + Y \mathrm{d} u = \Delta X$$
$$Y r - X \mathrm{d} u = \Delta Y$$

cuya resolucion dará independientemente:

$$r = \frac{X \Delta X + Y \Delta Y}{X^2 + Y^2} \qquad \mathrm{d} u = \frac{Y \Delta X - X \Delta Y}{X^2 + Y^2} \text{......} \quad (2)$$

Una vez calculadas r y d u, que siempre son pequeñísimas fracciones, se puede corregir cada una de las diferencias elementales, valiéndose para ello de logaritmos de cuatro cifras decimales solamente, por las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d} x &= x r + y \mathrm{d} u \\ \mathrm{d} y &= y r - x \mathrm{d} u \end{aligned}\right\} \text{..........................} \quad (3)$$

Para facilitar el cálculo logarítmico de r y d u, si llamamos K la distancia de los puntos extremos A y B, y U el azimut de uno respecto del otro, se tiene en el triángulo rectángulo $A\ B\ C$.

$$\tan.\ U = \frac{X}{Y} \qquad K = \frac{X}{\text{sen. } U} = \frac{Y}{\cos.\ U} \text{..............} \quad (4)$$

y entónces las ecuaciones (2) serán:

$$r = \frac{X \Delta X + Y \Delta Y}{K^2} \qquad \mathrm{d} u = \frac{Y \Delta X - X \Delta Y}{K^2} \text{......} \quad (5)$$

Apliquemos estas fórmulas. Si en los triángulos que han servido de ejemplo para el cálculo de coordenadas, hubiéramos hecho uso de los ángulos *observados* tales como constan en el registro que termina el Capítulo precedente, habriamos hallado algunas diferencias entre las coordenadas del punto extremo Y (fig. 46ª), segun que se determinasen por la parte P, A, Y, ó por M, R, Y. Si proyectásemos separadamente sobre los ejes, los lados JP, PA, AY, y en seguida JM, MR, RY, obtendriamos los siguientes resultados prescindiendo de las fracciones de metro.

Por JP,	$x'_1 = + 8854^m$	$y'_1 = + 7271^m$	Por JM,	$x''_1 = + 10789^m$	$y''_1 = - 4566^m$
Por PA,	$x'_2 = + 14958$	$y'_2 = - 3342$	Por MR,	$x''_2 = + 5642$	$y''_2 = + 5189$
Por AY,	$x'_3 = + 2177$	$y'_3 = - 4852$	Por RY,	$x''_3 = + 9557$	$y''_3 = - 1551$
	$X' = + 25989^m$	$Y' = - 923^m$		$X'' = + 25988^m$	$Y'' = - 928^m$

Las sumas algebraicas de estas proyecciones representan las diferencias de coordenadas de los puntos J é Y, y se ve que no resultan enteramente iguales á causa de haber usado los ángulos observados. Las discordancias no pueden calificarse de muy considerables si se atiende á que la distancia que hay entre los dos puntos excede de seis leguas; pero sin embargo, distribuyamos la correccion entre todos los vértices aplicando las fórmulas (4) y (5), y en seguida las (3).

$X = + 25988^m.5$	$Y = - 925^m.5$	X.......... 4.41478	.... 4.41478
$\triangle X = +\ 0.5$	$\triangle Y = +\ 2.5$	Y.......... 2.96638—	sen. U 9.99972
		tan. U...... 1.44840—	K 4.41506
		$U = 92° 2' 22''$	

$X \triangle X = + 12994.2$		$Y \triangle X = - 462.7$	
$Y \triangle Y = - 2313.7$		$X \triangle Y = - 64971.2$	
10680.5.........	4.02857	— 65433.9.........	4.81580—
K^2.........	8.83012	K^2.........	8.83012
r......	5.19845	d u..........	5.98568—
$r = + 0.0000158$		d $u = - 0.0000968$	

El valor de d u dividido por sen. $1''$ dará $19.''96$, ó sea $20''$ por correccion angular, y como el teodolito solo daba directamente $1'$, puede admitirse que d u es inferior al error posible de observacion. En cuanto á $r = \frac{dk}{k}$ es solo de un poco mas de un decímetro en diez mil metros, por lo cual inferimos que las discordancias se explican bien por estos pequeños errores.

Con los valores hallados se corrige cada una de las coordenadas ó proyecciones elementales como sigue:

PROYECCIONES DE *J P*.		PROYECCIONES DE *J M*.	
$x\,r = +\,0^m.14$	$y\,r = +\,0^m.12$	$x\,r = +\,0^m.17$	$y\,r = -\,0^m.07$
$y\,\mathrm{d}u = -\,0.70$	$x\,\mathrm{d}u = +\,0.86$	$y\,\mathrm{d}u = +\,0.44$	$x\,\mathrm{d}u = +\,1.05$
$\mathrm{d}x = -\,0.56$	$\mathrm{d}y = +\,0.98$	$\mathrm{d}x = +\,0.61$	$\mathrm{d}y = +\,0.98$
$x = +\,8854.0$	$y = +\,7271.0$	$x = +\,10789.0$	$y = -\,4566.0$
8854. 6	7270. 0	10789. 6	4565. 0

De igual manera se corrigen todas las demas proyecciones, teniendo siempre cuidado de hacer la correccion sustractiva para el sistema que dió resultados mayores, y que es el primero en nuestro caso. Las proyecciones corregidas son:

PRIMER SISTEMA.	m	m	SEGUNDO SISTEMA.	m	m
Proyecciones de *J P*......	+ 8854. 6......	+ 7270. 0	Proyecciones de *J M*......	+ 10789. 6......	— 4565. 0
„ *P A*......	+ 14957. 4......	— 3343. 4	„ *M R*......	+ 5641. 6......	+ 5189. 6
„ *A Y*......	+ 2176. 5......	— 4852. 1	„ *R Y*......	+ 9557. 3......	— 1550. 1
	+ 25988. 5 (m)	— 925. 5 (m)		+ 25988. 5 (m)	— 925. 5 (m)

Se ve que las sumas concuerdan perfectamente. En todos estos cálculos debe tenerse mucho cuidado con el juego de los signos.

Despues de hecha la correccion se combinan las proyecciones para determinar las coordenadas de cada vértice. En este ejemplo, tomando el punto *P* por orígen, resulta:

VÉRTICES.	x	y
J.............	— 8854m.6	— 7270m.0
P.............	0. 0	0. 0
A.............	+ 14957. 4	— 3343. 4
Y.............	+ 17133. 9	— 8195. 5
R.............	+ 7576. 6	— 6645. 4
M.............	+ 1935. 0	— 11835. 0

Si se comparan estos valores con los del núm. 98º, que se obtuvieron haciendo uso de los ángulos corregidos, se verá que las diferencias son casi insignificantes.

101º La teoría de las coordenadas va á permitirme dar una resolucion mas general del problema de los tres vértices, expuesto en las páginas 82 y siguientes. La nueva solucion tiene por objeto hallar directamente las coordenadas del punto que se desea enlazar con la cadena trigonométrica, y es fácilmente aplicable al caso en que se hayan observado no solamente tres, sino un número mayor de vértices, lo cual debe hacerse siempre que sea posible, tanto para evitar la indeterminacion del problema, que aunque muy remota, puede presentarse segun consta en la pág. 84, como para obtener comprobacion y de consiguiente mas confianza en los resultados.

Antes de emprender el cálculo numérico que desarrollaré en seguida, debe hacerse la construccion gráfica indicada en la página 86, con el objeto de medir sobre el cróquis las coordenadas aproximativas del punto que se quiere ligar á la triangulacion. Basta para esto trazar la meridiana y la perpendicular de alguno de los vértices observados, lo que es fácil, puesto que suponemos conocidos los azimutes de todos los lados, y tirar perpendiculares á estas lineas desde el punto que se trata de determinar. Las longitudes de las perpendiculares representarán las diferencias de absisas y ordenadas de ambos puntos, las cuales combinadas con las coordenadas del vértice trigonométrico darán á conocer la posicion aproximativa del otro punto. Si la construccion se ejecuta con cuidado y la escala del cróquis no es muy pequeña, se podrán determinar las coordenadas del punto con aproximacion de 8 á 10 metros generalmente, y en seguida se corrigen de la manera que voy á exponer.

Sean $(x_1\ y_1)$, $(x_2\ y_2)$, $(x_3\ y_3)$ las coordenadas de los puntos A, B, C respectivamente (fig. 48ª), y $(x\ y)$ las coordenadas *aproximativas* del punto D, desde el cual se han medidos los ángulos α y β. Si estas coordenadas fueran exactas, el azimut u_1 del primer punto A se calcularia por la ecuacion:

$$\tan. u_1 = \frac{x_1 - x}{y_1 - y} \qquad (1)$$

y la distancia $A\ D = k_1$ seria:

$$k_1 = \frac{x_1 - x}{\text{sen. } u_1} = \frac{y_1 - y}{\cos. u_1} \qquad (2)$$

Designando por d x y d y las correcciones incógnitas que deben sufrir las coordenadas aproximativas, las exactas serán $x + \mathrm{d}\,x$, $y + \mathrm{d}\,y$, con lo cual el azimut correcto se convertirá en $u_1 + \mathrm{d}\,u_1$. Diferenciando la primera ecuacion se tiene:

$$\frac{\mathrm{d}\,u_1}{\cos.^2 u_1} = \frac{(x_1 - x)\,\mathrm{d}\,y - (y_1 - y)\,\mathrm{d}\,x}{(y_1 - y)^2} = \frac{(x_1 - x)\,\mathrm{d}\,y - (y_1 - y)\,\mathrm{d}\,x}{k_1{}^2 \cos.^2 u_1}$$

de donde la correccion del azimut expresada en segundos, resulta:

$$\mathrm{d}''\,u_1 = \frac{(x_1 - x)\,\mathrm{d}\,y - (y_1 - y)\,\mathrm{d}\,x}{k_1{}^2 \operatorname{sen.} 1''}$$

Haciendo por abreviacion

$$p_1 = \frac{x_1 - x}{k_1{}^2 \operatorname{sen.} 1''} \qquad q_1 = \frac{y_1 - y}{k_1{}^2 \operatorname{sen.} 1''} \ldots\ldots\ldots\ldots\ (3)$$

la expresion del azimut corecto será:

$$u_1 + \mathrm{d}u_1 = u_1 + p_1\,\mathrm{d}\,y - q_1\,\mathrm{d}\,x$$

De igual manera hallariamos que los azimutes exactos de B y C son respectivamente.

$$u_2 + p_2\,\mathrm{d}\,y - q_2\,\mathrm{d}\,x$$
$$u_3 + p_3\,\mathrm{d}\,y - q_3\,\mathrm{d}\,x$$

Como las diferencias sucesivas de estos azimutes deben dar los ángulos observados α y β, podrémos determinar las incógnitas $\mathrm{d}\,x$ y $\mathrm{d}\,y$ estableciendo las ecuaciones de condicion:

$$\left.\begin{array}{l} u_1 - u_2 + (p_1 - p_2)\,\mathrm{d}\,y - (q_1 - q_2)\,\mathrm{d}\,x - \alpha = 0 \\ u_2 - u_3 + (p_2 - p_3)\,\mathrm{d}\,y - (q_2 - q_3)\,\mathrm{d}\,x - \beta = 0 \end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ (4)$$

que suministran ambos valores.

Tal es con muy corta diferencia la resolucion dada por Gauss; (*)

(*) Carta de Gauss á Schumacher inserta en el periódico intitulado *Astronomische Nachrichten*, tom. I, pág. 80.

pero por muchas aplicaciones que he hecho de las fórmulas, encuentro mas conveniente dar á los valores p y q otra forma que simplifica el cálculo. Introduciendo en ellos el valor de k en funcion de la diferencia de absisas, se halla fácilmente:

$$p_1 = \frac{\text{sen.}^2\, u_1}{(x_1 - x)\ \text{sen.}\ 1''} = (5.31443)\ \frac{\text{sen.}^2\, u_1}{x_1 - x}$$

$$q_1 = \frac{\text{sen.}^2\, u_1}{(x_1 - x)\ \text{tan.}\ u_1\ \text{sen.}\ 1''} = \frac{p_1}{\text{tan.}\ u_1}$$

De esta manera se evita el cálculo de k, y se tiene ademas la ventaja de que los demas logaritmos que entran en los valores de p y q se tienen ya por el cálculo de la fórmula (1).

Numerando los puntos observados como lo están en la figura, por el órden en que se van presentando de izquierda á derecha, vemos que para cada uno de ellos, designando en general por n el número que le corresponde, deberán calcularse las fórmulas:

$$\left.\begin{aligned} \text{tan.}\ u_n &= \frac{x_n - x}{y_n - y} \\ p_n &= (5.31443)\ \frac{\text{sen.}^2\, u_n}{x_n - x} \\ q_n &= \frac{p_n}{\text{tan.}\ u_n} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

y en seguida se establecen las ecuaciones (4) de condicion. Solo el cálculo de u_n demanda logaritmos de siete decimales: para los otros valores bastan logaritmos de cuatro ó cinco.

102º. Es preciso tener mucho cuidado con el juego de los signos para dar á cada azimut calculado el valor que le corresponde. La tangente de u_n resultará positiva ó negativa segun que las diferencias de absisas y ordenadas de que depende, tengan el mismo signo ó signos contrarios. Si ambas diferencias son positivas, el azimut se tomará menor que 90°, porque el punto observado estará en el primer cuadrante, respecto del que sirve de estacion; y si las dos son negativas deberá tomarse el azimut mayor que 180° y menor que 270°, puesto que el punto se hallará en el tercer cuadrante. En el caso de que tan. u_n resulte negativa, es necesario ver si el signo proviene de $x_n - x$ ó de $y_n - y$: proviniendo de que $x_n - x$ sea negativa, el azimut será mayor que 270°; porque el punto estará en el último cuadrante. Si el signo negativo proviene de la diferencia de ordenadas $y_n - y$, el punto observado estará en el segundo cuadrante y su azimut será mayor que 90° y menor que 180°. Todo esto no es mas que la aplicacion de las reglas sobre los signos de las lineas trigonométricas segun el cuadrante en que se consideran, y no puede originar duda ni error alguno. En cuanto á los signos de las p y las q, nótese que como sen. ^2u es siempre positivo, el signo de p es el de la diferencia de absisas, y el de q el de la diferencia de ordenadas. pues así nos lo manifiesta el valor de q en

la ec. (3) ó de la (5) puesto bajo la forma $q_n = (5.31443) \frac{\text{sen}^2 u_n (y'-y)}{(x_n - x)^2}$

Si se reflexiona que en las triangulaciones el objeto final del problema consiste en determinar las coordenadas de las diversas estaciones, esta resolucion es acaso mas breve y sencilla que la expuesta en la pág. 82, sobre todo cuando se observan mas de tres puntos; porque en aquella es preciso combinarlos de tres en tres, miéntras que en esta por n puntos observados se tendrán $n - 1$ ecuaciones de condicion de la forma (4), todas las cuales se pueden utilizar en la determinacion de d x y d y casi sin aumento alguno de trabajo. A la verdad, puesto que dos ecuaciones únicamente son bastantes para determinar las correcciones, la tercera y siguientes que convierten el problema en mas que determinado, no quedarán en general exactamente satisfechas por los valores de dx y dy deducidos de las primeras, á causa de la existencia de los pequeños errores de la observacion y aun de los datos mismos; pero combinando todas las ecuaciones de condicion se obtendrán los valores mas plausibles de las incógnitas, que aunque no satisfagan con entera precision las ecuaciones de que provienen, solo darán lugar á pequeños residuos, debiendo considerarse como resultados medios de los valores que se obtendrian por diversas combinaciones que de dos en dos se hiciesen de todas las ecuaciones de condicion. Cuando no se atribuya el mismo grado de confianza á todos los ángulos medidos, ya sea por haberse tomado en circunstancias desiguales, ó simplemente por no haberse observado un mismo número de veces, si se quiere proceder con toda exactitud, debe multiplicarse cada ecuacion de condicion por un factor proporcional al grado de confianza atribuido al ángulo que figura en ella. Un ejemplo completamente detallado dará á conocer las ventajas de esta resolucion. El siguiente presenta el caso en que observé cuatro puntos cuyos nombres, coordenadas y números de órden constan á continuacion.

		x	y
Núm. 1.........	Cerro de Santiago.........	— 3069ᵐ3.........	— 2062ᵐ3
„ 2.........	Cerro de Tlaxahuan......	0. 0.........	0. 0
„ 3.........	Cerro del Toro.............	+ 12. 1.........	+ 5600. 7
„ 4.........	Cerro del Anís.............	— 4621. 8.........	+ 7049. 6

Los ángulos medidos fueron:

Entre 1 y 2.........	$\alpha =$ 55° 32′ 19″	por 4 observaciones.	
Entre 2 y 3.........	$\beta =$ 103 4 37	por 2	„
Entre 3 y 4.........	$\gamma =$ 60 18 15	por 2	„

Por la resolucion gráfica de la pág. 86 encontré que las coordenadas aproximativas del punto de estacion eran: $x = -2160^{\text{m}}$ é $y = +2270^{\text{m}}$.

	1	*2*	*3*	*4*
$x_n - x =$	— 909ᵐ3	+2160ᵐ0	+2172ᵐ1	—2461.8
$y_n - y =$	—4332. 3	—2270. 0	+3330. 7	+4779.6
$x_n - x$......	2.9587072—	3.3344538	3.3368798	3.3912528—
$y_n - y$......	3.6367185—	3.3560259—	3.5225355	3.6793916
tan. u_n.......	9.3219887	9.9784279—	9.8143443	9.7118612—
$u_n =$	191° 51′ 13″	136° 25′ 21″	33° 6′ 37″	332° 44′ 55″
Const.........	5.31443	5.31443	5.31443	5.31443
sen.² u_n.....	8.62526	9.67686	9.47479	9.32153
$x_n - x$.......	—2.95871—	—3.33445	—3.33688	—3.39125—
p_n......	0.98098—	1.65684	1.45234	1.24471—
tan. u_n......	9.32199	9.97843—	9.81434	9.71186—
q_n......	1.65899—	1.67841—	1.63800	1.53285
$p_n =$	— 9.57	+45.38	+28.34	—17.57
$q_n =$	—45 60	—47.69	+43.45	+34.11

Como el primer ángulo se tomó doble número de veces que los demas, multiplico por 2 la primera ecuacion de condicion, con lo que se obtienen las siguientes: (Esto equivale á establecer tantas ecuaciones idénticas para cada ángulo cuantas son las repeticiones)

$$
\begin{aligned}
-109.8\ \mathrm{d}\,y - 4.2\ \mathrm{d}\,x &= +774'' \\
+17.0\ \mathrm{d}\,y + 91.1\ \mathrm{d}\,x &= -847 \\
+45.9\ \mathrm{d}\,y - 9.3\ \mathrm{d}\,x &= -207
\end{aligned}
$$

La manera mas sencilla de resolver estas ecuaciones consiste en hacer positivos todos los coeficientes de una de las incógnitas y sumar todas las ecuaciones; y en seguida hacer lo mismo respecto de la otra incógnita. De este modo se tendrán las dos únicas ecuaciones que siguen:

$$
\begin{aligned}
+172.7\ \mathrm{d}\,y + 86.0\ \mathrm{d}\,x &= -1828 \\
+80.9\ \mathrm{d}\,y + 104.6\ \mathrm{d}\,x &= -1414
\end{aligned}
$$

Dividiendo cada una de ellas por el coeficiente de d y resulta:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\,y + 0.50\ \mathrm{d}\,x &= -10.59 \\
\mathrm{d}\,y + 1.29\ \mathrm{d}\,x &= -17.48
\end{aligned}
$$

que por adicion y sustraccion dán:

$$
\begin{aligned}
2.00\ \mathrm{d}\,y &= -28.07 - 1.79\ \mathrm{d}\,x \\
0.79\ \mathrm{d}\,x &= -6.89
\end{aligned}
$$

La última dá d $x = -8^{m}.72$, valor que sustituido en la primera produce d $y = -6^{m}.23$. Con estos valores lás coordenadas correctas del punto de estacion serán: $x + \mathrm{d}\,x = -2168^{m}.7$;............ $y + \mathrm{d}\,y = +2263^{m}.8$.

Si no se hubiera multiplicado por 2 la primera ecuacion de condicion, esto es: si se hubieran supuesto todas las observaciones dignas de igual confianza, habriamos obtenido d $x = -8^{m}.44$,........ d $y = -6^{m}.20$, resultados casi idénticos á los anteriores.

Sustituyendo d $x = -8.72$ y d $y = -6.23$ en las tres ecuaciones de condicion obtendrémos:

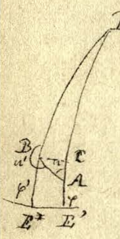
Por la primera $+721$, en lugar de $+774$.	Residuo $= 53''$
Por la segunda -900, en lugar de -847.	Residuo $= 53$
Por la tercera -205, en lugar de -207.	Residuo $= 2$

El promedio de los residuos es 36″, que cabe dentro de los límites del error posible de observacion, puesto que los ángulos se midieron con un teodolito que solo aproximaba á 1′ las lecturas angulares. Por otra parte, los residuos son bastante pequeños para que sea fácil hacerlos desaparecer casi del todo, con solo un incremento de medio metro en la absisa, y un decremento de la misma cantidad en la ordenada del punto de estacion, esto es: adoptando d $x = -8^{m}.2$ y d $y = -6^{m}.7$. Estos últimos valores son, con muy corta diferencia, los que se habrian obtenido aplicando otro método para combinar y resolver las ecuaciones de condicion; pero como los cálculos serian mas complicados, nos atendrémos al procedimiento expuesto, que proporciona un medio sencillo de fijar la posicion del punto con todo el grado de precision que demandan las operaciones topográficas, las que ordinariamente se limitan á la apreciacion final de metros enteros.

104º En todo lo que se ha dicho hasta ahora respecto de orientacion y de cálculo de coordenadas, no nos hemos apartado de la hipótesis del paralelismo de las meridianas entre si, así como del de sus perpendiculares; pero dijimos tambien en otra parte que á causa de la forma esférica de la tierra, todas las perpendiculares trazadas desde diversos puntos de una misma meridiana son lineas que convergen hácia los puntos *Este* y *Oeste* del horizonte, puesto que estos son los polos del círculo meridiano. Por una razon análoga todas las meridianas que se pueden considerar trazadas por distintos puntos de una misma linea dirigida de Oriente á Poniente, son convergentes hácia los polos de la tierra, que lo son tambien del círculo ecuatorial cuyo plano es perpendicular á todos los meridianos. La suposicion del paralelismo no produce error sensible cuando se trata de pequeñas distancias, y aun puede admitirse siempre para el cálculo de las coordenadas sin inconveniente alguno; porque es claro que tal hipótesis equivale á adoptar en el cálculo los ángulos que los diversos lados trigonométricos forman con el meridiano del punto de partida, aunque estos difieran sensiblemente de sus azimutes tales como se observarian en un extremo del lado mismo; pero hay casos en que no se puede prescindir de tomar en cuenta la convergencia de los meridianos sin exponerse á cometer graves equivocaciones.

Si en los extremos de una linea situada próximamente de Oriente á Occidente, se observan los azimutes directo é inverso de la misma, en lugar de encontrar entre ellos una diferencia de 180°, se hallará 180°, mas ó ménos una cantidad, que á la latitud media de la República, puede estimarse en cosa de 1′ por cada legua de distancia, la cual proviene de la convergencia de los dos meridianos. Como las operaciones topográficas en nuestro país abrazan muchas veces extensiones considerables, me parece de todo punto necesario establecer métodos para llevar en cuenta la convergencia, por lo ménos cuando se desea comprobar la exactitud de las operaciones recurriendo á observaciones azimutales directas, ó bien cuando se tiene necesidad de saber cuál es la orientacion de todas las lineas que limitan una figura, como sucede á veces al definir los linderos de una propiedad rústica. Omitiendo aquella correccion podria suceder que siendo buenas las operaciones se encontrase á los dos ó tres miriámetros una diferencia en los azimutes que podria llegar á 8′ ó mas, la que se atribuiria tal vez á error en las observaciones, y en tal caso se deformaria el polígono al quererlo distribuir.

En los tratados de Geodesia se establecen fórmulas sencillas para calcular la convergencia; pero como contienen ciertos datos que comunmente no posee el topógrafo, las he sustituido con otra que sin sacrificio de exactitud, solo demanda el conocimiento de la latitud media de la localidad en que se opera, y esto con aproximacion de la cuarta parte y aun de la mitad de un grado.



Sea P (fig. 49ª) el polo, ó punto de convergencia de las meridianas de A y B; u el azimut del lado $A\,B$; y u' el inverso, ó el azimut de $B\,A$. Llamemos ademas, ϕ y ϕ' respectivamente las latitudes de A y B, que siendo $E\,E'$ el ecuador, serán iguales á los arcos $A\,E'$ y $B\,E$.

En el triángulo esférico $P\,A\,B$, atendiendo á que los lados $P\,A$ y $P\,B$ son complementos de las latitudes ϕ y ϕ' respectivamente, se hallará:

$$\text{sen. } u' = -\text{ sen. } u \frac{\cos.\ \phi}{\cos.\ \phi'}$$

y si designamos por c la convergencia de los meridianos, se tiene:

$$u' = 180° + u + c$$

Tomando el *seno* de este ángulo y teniendo presente que por ser

c muy pequeño puede tomarse la unidad por su *coseno*, y el arco por su *seno*, resultará:

$$\text{sen. } u' = -\text{ sen } u - c \cos. u$$

Igualando los dos valores de sen. u', y llamando d la pequeña diferencia de latitud de A y B, se obtiene:

$$\text{sen. } u + c \cos. u = \frac{\text{sen. } u \cos. \phi}{\cos. (\phi + d)} = \frac{\text{sen. } u \cos. \phi}{\cos. \phi - d \text{ sen. } \phi}$$

Dividiendo los dos términos del segundo miembro por cos. ϕ, resulta:

$$\text{sen. } u + c \cos. u = \frac{\text{sen. } u}{1 - d \tan. \phi} \qquad \frac{a}{1 \pm b} =$$

Como el denominador difiere muy poco de la unidad, elévese al numerador hasta la primera potencia, y entónces:

$$\text{sen. } u + c \cos. u = \text{sen. } u + d \tan. \phi \text{ sen. } u$$

de donde resulta:

$$c = d \tan. \phi \tan. u$$

Para hallar el valor de d, si desde B se traza el arco $B\ C$ perpendicular á la meridiana de A, tendrémos que la latitud del punto C será sensiblemente la misma que la de B, y entónces la distancia $A\ C$ expresada en segundos, será igual á d. En el triángulo $A\ B\ C$ que por su pequeñez puede suponerse plano, llamando k el lado $A\ B$, se tiene:

$$A\ C = k \cos. u$$

y designando por ρ el radio del meridiano terrestre, el número de segundos que abraza la distancia $A\ C$, será: $2\pi\rho = \text{Circ}$ $\pi = \frac{1296000}{2\rho}$

$\pi = 6480\ldots$

$$d = \frac{648000'' \times A\ C}{\pi\ \rho} = \frac{A\ C}{\rho \text{ sen. } 1''} = \frac{k \cos. u}{\rho \text{ sen. } 1''}$$

Sustituyendo este valor en el de c se obtiene:

$$c = \frac{k \text{ sen. } u \tan. \phi}{\rho \text{ sen. } 1''}$$

Recordando que k sen. u es la diferencia de absisas entre A y B, que ántes hemos designado por x, si hacemos $F = \frac{\tan. \phi}{\rho \text{ sen. } 1''}$, la fórmula anterior será finalmente:

$$c = F x$$

Los valores de F dependen de ϕ, y por consiguiente he podido calcular sus logaritmos, que constan en la tabla siguiente, cuyo argumento es la latitud ϕ.

LOGARITMOS DEL FACTOR F.

LATITUD.	Log. F	Dif. por 1′	LATITUD.	Log. F	Dif. por 1′	LATITUD.	Log. F	Dif. por 1′
15° 00′	7.9404	5.0	21° 00′	8.0963	3.7	27° 00′	8.2190	3.1
,, 30	7.9554	4.8	,, 30	.1075	3.7	,, 30	.2282	3.0
16 00	7.9699	4.7	22 00	.1185	3.6	28 00	.2374	3.0
,, 30	7.9839	4.6	,, 30	.1293	3.6	,, 30	.2465	3.0
17 00	7.9977	4.4	23 00	.1399	3.5	29 00	.2554	2.9
,, 30	8.0110	4.3	,, 30	.1503	3.4	,, 30	.2643	2.9
18 00	8.0240	4.2	24 00	.1605	3.4	30 00	.2730	2.9
,, 30	8.0368	4.1	,, 30	.1706	3.3	,, 30	.2817	2.9
19 00	8.0492	4.0	25 00	.1806	3.3	31 00	.2903	2.8
,, 30	8.0613	4.0	,, 30	.1904	3.2	,, 30	.2988	2.8
20 00	8.0732	3.9	26 00	.2000	3.2	32 00	.3073	2.8
,, 30	8.0849	3.8	,, 30	.2096	3.1	,, 30	.3156	2.8
21 00	8.0963		27 00	8.2190		33 00	8.3239	

Admitiendo que por los métodos enseñados en el Capítulo V se pueda medir un azimut con la aproximacion de 2′, es claro que debemos considerar que esta cantidad es el error posible de la observacion directa ya sea por exceso ó por defecto. Si, pues, á cosa de cuatro leguas al Oriente ó al Occidente del punto en que se ha medido el azimut de una linea, se mide tambien el de otra, y se comparan las dos observaciones deduciendo uno de los azimutes por medio del otro y de los ángulos de la cadena, toda diferencia superior á 4′ no debe suponerse originada por el error posible de las medidas directas, sino que fundadamente debe atribuirse, al efecto de la convergencia de los meridianos. En otros términos: debe tomarse en cuenta la convergencia al asignar los azimutes de las lineas establecidas á mas de cuatro leguas al Este ó al Oste del punto en que se haya hecho la orientacion de un polígono, en atencion á que desde esa distancia el error ocasionado por la hipótesis del paralelismo de los meridianos puede considerarse superior al error posible de la observacion directa.

Para aplicar la sencillísima fórmula $c = F x$ debe comenzarse por tomar el logaritmo de F que corresponda á la latitud media del lugar en que se trabaja, en la cual no importa gran cosa cometer un error de varios minutos, y este logaritmo es el que se emplea para toda la cadena. De esta manera no es indispensable calcular una por una las convergencias que corresponden á todos los lados por medio de su proyeccion x, sino que puede tomarse en lugar de esta cantidad, la suma algebraica de las proyecciones comprendidas entre los puntos cuyos meridianos se trata de comparar. Así, por ejemplo, si en la triangulacion representada en la figura 46ª se quisiera calcular la convergencia de los meridianos que pasan por los vértices J y R, tendriamos:

$$\begin{array}{rl} \text{Proyeccion de } J\,M = & +\ 10789^{m} \\ \text{,, \quad ,, } M\,R = & +\ \underline{\ 5641\ } \\ x = & +\ 16430^{m} \end{array}$$

La latitud media de la localidad en que medí aquella cadena es próximamente $\phi = 22°\ 29'$. Obtendrémos pues:

$$\begin{array}{ll} F \ldots\ldots\ldots\ldots & 8.1289 \\ x \ldots\ldots\ldots\ldots & \underline{4.2156} \\ c \ldots\ldots\ldots\ldots & 2.3445 \qquad c = 3'\ 41'' \end{array}$$

En la suposicion del paralelismo hallamos que los azimutes, de los lados que parten de R son los que constan al fin de la pág. 136; pero tomando en cuenta la convergencia seria preciso aumentarles la cantidad c, de suerte que el del lado $R\ Y$, por ejemplo, vendria á ser 99° 16′ 3″. Con el mismo valor de F hallariamos que los meridianos que pasan por los vértices extremos J é Y tienen una convergencia de 5′ 50″, de suerte que si en Y hubiéramos medido el azimut del lado $Y\,R$, deberiamos haber encontrado 279° 18′ 12″ en lugar de 279° 12′ 22″ que resultó por la deduccion partiendo del punto J.

En la fórmula general que dá el azimut inverso:

$$u' = u \pm 180° + c$$

debe atenderse á los signos para evitar equivocaciones. En el segundo término se tomará el signo superior ó el inferior segun que u sea menor ó mayor que 180°, y en cuanto á c se tomará positivo siempre que lo sea x, quiere decir: siempre que el meridiano cuya convergencia se desea hallar esté al Occidente del que sirve de punto de partida. Supongamos, por ejemplo, que en Y se hubiera obtenido por la observacion directa:

$$\text{az. } YR = u = 279^\circ\, 18'\, 12''$$

y que quisiésemos hallar su inverso $u' =$ az. $R\,Y$. Siendo Y el punto de partida, la proyeccion del lado $Y\,R$ sobre la perpendicular á la meridiana, seria negativa, esto es: $x = -\ 9557^m$, y tendrémos:

F..........	8.1298	$u - 180^\circ =$	$99^\circ\ 18'\ 12''$
x..........	3.9803—	$c =$	$-2\ \ \ 9$
c..........	2.1101—	$u' =$	$99^\circ\ 16'\ \ 3''$

que fué el mismo resultado que obtuvimos partiendo de R. J.

CAPITULO VIII.

CONSTRUCCION DEL PLANO DE LA TRIANGULACION.

105º La serie de operaciones descritas hasta aquí nos han proporcionado todos los elementos necesarios para proceder á la construccion del plano, ó lo que es lo mismo, á la formacion de una figura semejante á la que abraza la red trigonométrica. La construccion de los planos, que se designa algunas veces con el nombre de *planografía*, es una operacion realmente muy sencilla en cuanto á su parte teórica; pero cuyo resultado final, aunque depende en gran manera de la habilidad del dibujante, depende tambien de la precision de los instrumentos y de los métodos que adopte, y por eso me parece oportuno trazar algunas reglas para la mejor eleccion de unos y otros, recomendando desde luego al lector la ejecucion material de todas las operaciones, que es el único modo de adquirir la práctica necesaria para reducir al menor valor posible los errores inherentes á toda operacion gráfica.

El simple hecho de que en una red trigonométrica se conozcan por la observacion directa todos los ángulos de los triángulos componentes ó elementales, basta para dar á conocer la facilidad con que puede construirse una figura que le sea semejante, si bien el conocimiento único de aquellos datos no dá los medios de ejecutar la construccion con arreglo á una *escala* ó relacion determinada de antemano. Por el contrario, el conocimiento adicional de las distancias entre los vértices, permite fijar la escala, escoger deliberadamente el tamaño del papel, y finalmente, hacer del plano una copia fiel del terreno, en la cual se pueden estimar no solo las direcciones sino tambien las distancias.

La escala, segun dijimos en otra parte, es la relacion que existe entre la longitud de las lineas en el plano y la correspondiente en el terreno, tomando la primera por unidad, y se representa generalmente por una fraccion de la forma $\frac{1}{r}$. Segun esta definicion, dada la distancia L en el terreno, la equivalente en el papel será: $l = \frac{L}{r}$; y recíprocamente, si l es una linea medida en el plano, representará una longitud $L = l\,r$, refiriéndose siempre l y L á la misma unidad métrica.

La escala $\frac{1}{r}$ puede ser enteramente arbitraria, y para su eleccion se atiende en primer lugar al objeto á que está destinado el plano que se va á construir, y en segundo lugar al tamaño que sea conveniente darlo. Si se trata, por ejemplo, de estudiar un proyecto de conduccion de aguas, del trazo y construccion de un camino, ó de cualquiera otro objeto que demande la estimacion de las distancias con la mayor precision posible, debe prescindirse del tamaño del plano, y elegirse una escala considerable, que permita señalar los menores detalles, aunque para conseguirlo sea preciso hacer la construccion por partes en diversas hojas de papel. Si por el contrario solo se desea representar los accidentes mas notables de un terreno extenso, no hay inconveniente en adoptar una escala mas pequeña; fijando entónces la atencion en la comodidad que resulta de que el plano no sea muy grande. Por lo comun los planos verdaderamente topográficos no se construyen, sino excepcionolmente, con escalas mayores que $\frac{1}{5000}$ ni menores que $\frac{1}{100000}$; y acaso las mas usadas están comprendidas entre $\frac{1}{20000}$ y $\frac{1}{50000}$.

Una vez que en virtud de las consideraciones que preceden, ha elegido el ingeniero la relacion mas conveniente, puede proceder á la construccion gráfica de la *escala decimal*, por medio de trasversales, tal como se enseña en todos los tratados de Geometría, y de esta manera queda en aptitud de tomar sobre ella con un compas, cualquiera distancia que deba figurar en el plano. El objeto de construir la escala decimal es el de evitar la necesidad de ejecutar la division $\frac{L}{r}$ para hallar la magnitud l que debe tener cada linea en el plano; pero atendiendo por una parte á que tales divisiones son sumamente sencillas puesto que el número r consta de uno ó cuando mas de dos guarismos seguidos de *ceros*, siendo muchas veces una potencia cualquiera de 10; y por otra á que en la escala decimal se borran con facilidad las intersecciones de las lineas á causa del uso frecuente de las puntas del compas, se convendrá en que es tal vez preferible eliminar siempre el uso de la escala decimal, sustituyéndola con el *doble-decímetro*, que es una regla de $0^{m}.2$ dividida en milímetros ó en medios milímetros, y cuyos bordes en forma de bisel, permiten la aplicacion inmediata de las divisiones sobre las lineas, y por consiguiente, la apreciacion de cantidades pequeñísimas.

Cuando r es la unidad seguida de ceros, la sencillez de las divisiones por r es tal que no necesita explicacion alguna; y en el caso de que en lugar de la unidad haya otra cifra, se reduce al anterior por medio de sencillas operaciones aritméticas. Así, por ejemplo, si la cifra significativa es 5, la division equivale á multiplicar por 2 y separar el producto tantos guarismos como contenga r, esto es: $\frac{L}{5000}$, $\frac{L}{50000}$, &c., equivalen respectivamente á $0.0002\ L$, $0.00002\ L$, &c.

En otra ocasion (pág. 32) hemos considerado á la décima parte de un milímetro como el límite de la extension que puede apreciarse con alguna seguridad en el plano; y de esto se deduce que al ejecutar las divisiones por r no es prácticamente útil llevar la aproximacion mas allá de la cuarta decimal de metro. Si, por ejemplo, se tuviese una linea de 268^{m}, quedará representada en la escala de

$\frac{1}{10000}$ por 0^m0268; pero siendo la escala de $\frac{1}{50000}$ deberá tomarse 0^m0054 para representarla, aunque la division exacta dé 0^m00536.

En la planografía los instrumentos mas usados son las reglas y las escuadras, ademas de los compases, lápices, gráfios, &c. El manejo de estos instrumentos y la enseñanza de todas sus aplicaciones, mas que á la topografía corresponde á los cursos de delineacion; por consiguiente sin entrar en otros detalles agenos de este lugar, me limitaré á recomendar al dibujante que tenga el mayor cuidado en la eleccion de sus instrumentos, la cual no debe hacerse sin previa comprobacion. La de las reglas consiste en trazar una linea con ellas, é invertir despues la regla, de manera que si al principio estaba á la derecha de la linea, en la segunda posicion quede su mismo borde á la izquierda. Si en los dos casos el borde coincide en toda su extension con la linea trazada, se tiene una prueba de que aquel es bien recto. De una manera análoga se comprueba una escuadra: puesto uno de los lados del ángulo recto en coincidencia con una linea, se traza otra á lo largo del segundo lado; se invierte en seguida la escuadra, y si en su nueva posicion continúa coincidiendo á la vez con ambas lineas, el ángulo de la escuadra será exactamente de 90°.

106º Pasemos ahora á la construccion del plano. Como en la triangulacion se determinan por la observacion directa todos los ángulos y por lo ménos uno de los lados de la red, parece á primera vista que no se necesitarian mas datos para proceder á la formacion de una figura semejante; pero estos elementos que en teoría son los estrictamente necesarios, están muy léjos de proporcionar en la práctica toda la exactitud que se requiere. En efecto, prescindiendo de la precision, siempre limitada aunque suficiente, con que se puede trazar la base, la construccion de los ángulos sobre el papel, aun suponiendo la mayor habilidad de ejecucion, resulta de una exactitud mucho menor que aquella con que se obtienen en el terreno. El mejor método para construir los ángulos es sin duda alguna el de las cuerdas que se explicó en la pág. 76, con motivo de la formacion del cróquis; pero se comprende desde luego que no pudiéndose estimar una cuerda mas que con la aproximacion de $0.^m0001$ que ántes hemos fijado como límite, debe resultar un error angular tanto mayor cuanto mas pequeño sea el radio adoptado en la construccion. Comunmente el radio mas considerable que puede usarse es de 0^m2, y aun en este caso el cálculo indica que en el arco trazado, un espacio angular de 5′ queda representado por una extension que apenas excede de la cuarta parte de un milímetro. En consecuencia la incertidumbre de un diezmilímetro con que se puede apreciar la cuerda, produce un error de 2′ por lo ménos en el ángulo; y fijándose de esta manera el primer punto trigonométrico desde los extremos de la base, su posicion resulta necesariamente mas ó ménos errónea, siendo el error mas y mas perceptible al paso que aumenta la longitud de los lados. Si el error de posicion se limitara solamente al punto así situado, no seria tan grande el inconveniente con tal que la construccion se hiciese con el mayor esmero posible, y que fuesen pequeños los lados trigonométricos; pero sucede todo lo contrario, puesto que el primer punto sirve para establecer el que sigue, este á su vez para situar otro, y así sucesivamente; de tal manera que combinándose y propagándose todos los diversos errores individuales, es natural que influyan notablemente en las posiciones de los últimos vértices de la cadena. Estas consideraciones son en mi opinion suficientes para demostrar los defectos de este procedimiento, que solo puede aplicarse con buen éxito para construir planos en pequeña escala, y siempre procurando hacer uso del mayor radio posible para trazar los ángulos por medio de sus cuerdas. Es tambien el que se aplica de preferencia para la construccion de los cróquis, en atencion á que para estos proporciona la exactitud necesaria, con la gran ventaja de valerse nada mas de los datos que suministran inmediatamente las operaciones de campo.

Eliminada la construccion de los ángulos, el medio que ocurre en seguida naturalmente, es el de servirse de los lados trigonométricos tales como se obtienen por la resolucion de los triángulos. Este método es sin duda preferible al anterior, tanto por su mas fácil ejecucion, como porque las lineas rectas pueden trazarse en general con mas exactitud que los ángulos; pero presenta tambien el gran inconveniente de que cada vértice situado tiene que servir para fijar la posicion del que le sigue, y por tanto deben irse acumulando los pequeños errores inevitables de la construccion. Creo, sin embargo, que un dibujante hábil puede aplicar este método con muy buen éxito, sobre todo para construir las triangulaciones secundarias, cuando habiéndose establecido la posicion de los vértices principales por el procedimiento que voy á indicar, se tiene de ese modo un medio directo de ir comprobando de trecho en trecho la exactitud de la operacion.

Los defectos de los dos métodos precedentes nacen de la dependencia que necesariamente existe entre las posiciones de todos los vértices, y el modo de evitarla consiste en situar cada punto por medio de sus coordenadas. Es indudable, en efecto, que aunque la apreciacion de las coordenadas esté sujeta al mismo límite de incertidumbre que la de una cuerda ó la de un lado trigonométrico, tambien en cambio el error efectivo en la posicion del punto es de la misma magnitud que el que haya en aquella apreciacion, y no puede propagarse, puesto que la situacion de los demas vértices depende únicamente del valor de las coordenadas que les corresponden, sin referencia alguna á los puntos establecidos anteriormente.

107º La construccion por el método de las coordenadas, consiste en trazar sobre el papel una serie de lineas paralelas y equidistantes, divididas en dos sistemas, que son perpendiculares entre sí, y cuyo conjuuto, llamado *cuadrícula*, se compone, por consiguiente, de una serie de cuadrados exactamente iguales. Uno de esos sistemas está destinado á representar las meridianas, el otro sus perpendiculares, y sobre ellos se toman las distancias coordenadas reducidas á la escala del plano. Se concibe desde luego que la exacta construccion de la cuadrícula es el objeto mas importante para alcanzar toda la precision de que es susceptible este método, y por eso me parece necesario asentar algunas reglas para hacer y comprobar su trazo.

Por regla general las lineas de la cuadrícula deben trazarse paralelamente á las orillas del papel, suponiendo el Norte colocado en su parte superior; aunque en muchos casos la forma especial del terreno lo exige de otro modo, sin que esto pueda reputarse por un defecto en los planos. Se comienza por trazar una linea recta $A\ B$ (fig. 50ª), ya sea en el centro del papel ó ya cerca de una de sus orillas, y se divide cuidadosamente en partes iguales $A\ a$, $a\ b$, bc, &c., comunmente de un decímetro. Por cada uno de los puntos de division se levantan perpendiculares á la recta primitiva, y las perpendiculares extremas $B\ C$ y $A\ D$ se dividen tambien en partes iguales á las de aquella. Estos nuevos puntos de division, unidos cada uno á su correspondiente, determinan el segundo sistema de lineas que forma la cuadrícula.

Es conveniente hacer la division de las partes iguales $A\ a$, $a\ b$, *A m*, &c., valiéndose de un doble-decímetro de marfil finamente dividido, y señalando los puntos con un lápiz muy agudo, ó mejor con la punta de una aguja. Las perpendiculares deben trazarse por el método comun, esto es: tomando partes equidistantes $b\,r = b\,s$, y fijando el otro punto *t* de la perpendicular, desde *r* y *s* como centros y con un radio arbitrario tan grande como sea posible; pues aunque en teoría dos puntos cualesquiera determinan la posicion de una recta, en la práctica debe siempre procurarse elegirlos distantes, con el fin de que algun pequeño error que haya en la construccion no se haga mas perceptible al prolongar las lineas.

Las perpendiculares extremas *A D* y *B C* no se pueden trazar comunmente por este método á causa de que estando próximas á las orillas del papel, no queda espacio suficiente para tomar las partes equidistantes que deben servir de centros para trazar los arcos que por su interseccion determinan otro punto de la perpendicular. En tales casos es mejor aplicar este otro procedimiento. Sea *A* (fig. 51ª), el punto en que debe levantarse la perpendicular: se elige arbitrariamente otro punto *B*, y desde este como centro y con el radio *B A* se traza un arco indefinido, una de cuyas partes se ve en *D*, y que corta en *C* á la linea dada. En seguida por *C* y *B* se tira una linea recta que prolongada determina el punto *D* por su interseccion con el arco. Es claro que este punto resuelve la cuestion puesto que el ángulo *D A C* es recto por abrazar sus lados los extremos del diámetro *D C*.

Otro método equivalente al anterior consiste en servirse de tres distancias que están en la relacion de los números 3, 4 y 5. La primera se toma de *A* á *C;* con la segunda y desde *A* como centro se traza un arco indefinido hácia *D;* finalmente, con la tercera y desde *C* como centro se traza otro arco cuya interseccion con el anterior determina el punto *D* que se busca. En efecto, siendo *u* la unidad á que se refieren las tres distancias, estas serán $3\,u$, $4\,u$ y $5\,u$, las cuales verifican la propiedad del triángulo rectángulo, á saber:

$$(3\,u)^2 + (4\,u)^2 = (5\,u)^2$$

Así, por ejemplo, si se adopta por unidad la extension de $0^{m}07$, las tres distancias serán $0^{m}21$, $0^{m}28$ y $0^{m}35$.

La construccion de la cuadrícula puede sujetarse á varias comprobaciones para cerciorarse de su exactitud. En primer lugar los ángulos D y C (fig, 50ª), deben resultar rectos, lo que se comprueba haciendo en esos puntos cualquiera de las construcciones ántes indicadas. En segundo lugar, las partes en que queda dividida tanto la linea $C\,D$, como todas las que le son paralelas, deberán ser precisamente iguales á las divisiones primitivas de $A\,B$; y lo mismo puede decirse de las paralelas á $A\,D$ y $B\,C$. En tercer lugar, puesta una regla en la direccion de una diagonal comprendida entre puntos distantes, tales como a y C, c y D, b y p, b y q, &c., deben hallarse en la misma linea todos los ángulos de los cuadrados intersectados por la regla; y ademas las diagonales de estos pequeños cuadrados deberán ser iguales á $l\,\sqrt{2} = 1.414\,l$, siendo l la longitud de sus lados, ó lo que es lo mismo, la equidistancia de las divisiones primitivas.

108º. Dije al principio que es cómodo tomar siempre 0ᵐ1 por equidistancia; y es claro que siendo $\frac{1}{r}$ la escala del plano, aquella representará $0.1\,r$ metros sobre el terreno. Segun esto, tomando en la cuadrícula un punto conveniente para que sirva de orígen de coordenadas, bastará evidentemente conocer las de un vértice trigonométrico cualquiera, para designar de luego á luego el cuadrado en que deberá quedar situado; pero para evitar todo motivo de equivocacion, pueden asignarse coordenadas á cada uno de los ángulos de los pequeños cuadrados, segun sus distancias al orígen. Suponiendo, por ejemplo, que este se haya establecido en la interseccion de las lineas $b\,t$ y $m\,n$, todos los puntos de la perpendicular que pasa por a tendrán $0.1\,r$ por absisa, y $0.2\,r$ todos los de la que pasa por A. Por idéntica razon tódos los puntos de la linea $A\,B$ tendrán $-0.1\,r$ por ordenada; miéntras que la ordenada comun á todos los de $C\,D$ será $0.2\,r$ En consecuencia las coordenadas de cualquiera de los ángulos de uno de los cuadrados, no son otra cosa mas que las pertenecientes á las dos lineas que se cortan en ese punto, y así obtendrémos,..... $x = -0.2\,r$, $y = +0.1\,r$ para el punto q; $x = +0.2\,r$, $y = 0$ para el punto m; &c.

De este modo, dadas las coordenadas del vértice que se quiere situar en el plano, su comparacion con las de los ángulos de los pequeños cuadrados dará el exceso de aquellas sobre estas; quiere decir, las cantidades que deben tomarse en los lados de uno de los cuadrados para que estas combinadas con las coordenadas del ángulo mas inmediato reproduzcan las del vértice en cuestion. Sea, por ejemplo, $m\,p\,g\,h$ el cuadrado en que se ha reconocido que debe quedar situado el punto v en virtud de la comparacion de sus coordenadas con las que corresponden á los cuatro ángulos m, p, g y h. El exceso de la absisa se tomará con el doble-decímetro de h hácia f y tambien de g hácia e, y se trazará la linea ef sobre la cual debe hallarse el punto. Tomando en seguida el exceso de la ordenada de f hasta v, este último será el punto que se busca.

Aunque todo lo que precede sea sumamente sencillo, tomemos como ejemplo numérico la triangulacion representada en la figura 46ª, las coordenadas de cuyos vértices constan en la pág. 138, referidas al punto P como orígen. Supongamos, ademas, que no teniendo interes alguno en que la escala sea muy grande, no hallamos inconveniente en sujetar el tamaño del plano al del papel con que contamos, admitiendo que la mayor dimension de este fuese de $1^m.2$, y comencemos por determinar la escala por medio de esa condicion. Por el cróquis se ve que la triangulacion se extiende de Oriente á Poniente mas que de Norte á Sur, y como las absisas de los puntos extremos J é Y difieren casi 26000 metros, designando por $\frac{1}{r}$ la escala que se busca, tendrémos la ecuacion: $26000 = 1.2\,r$, de la cual se obtiene $r = 22000$ con muy poca diferencia. Tomando en cuenta el espacio que debe quedar para márgen y para pegar el papel en el restirador, convendrá adoptar $\frac{1}{r} = \frac{1}{25000}$, que es una relacion bastante sencilla.

Siendo de $0^m.1$ las divisiones de la cuadrícula, cada una representará 2500 metros en el terreno, de donde deducimos que se tiene necesidad de 11 espacios de Este á Oeste, y por lo ménos 5 de Norte á Sur, puesto que la mayor diferencia de ordenadas es casi de 12000 metros. Construirémos, pues, la cuadrícula (fig. 53ª) con ese número de espacios. Las coordenadas de los vértices reducidas á la escala adoptada, son:

VÉRTICES.	x	y
J	$-0^m.3542$	$-0^m.2908$
P	0. 0000	0. 0000
A	+0. 5983	−0. 1338
Y	+0. 6853	−0. 3278
R	+0. 3030	−0. 2659
M	+0. 0774	−0. 4735

Como todas las ordenadas son negativas, el orígen P deberá ser el mas alto de los vértices; pero para saber cuál de las meridianas debe tomarse por eje de ordenadas, comparamos la mayor absisa negativa, que es la de *J*, con la mayor positiva, que es la de *Y*, y hallamos que sus valores están próximamente en la relacion de 4 á 7; por lo cual tomarémos por eje la linea que termina el cuarto espacio partiendo de la orilla derecha del papel. De este modo queda fijada la posicion del punto *P*, y en los extremes de las lineas que pasan por él se apuntan los guarismos 00 que indican los ejes. La comparacion de los mayores valores numéricos de las absisas y las ordenadas debe hacerse ántes de construir la cuadrícula, con el fin de fijar de antemano la posicion de los ejes con la aproximacion necesaria, para no exponerse á que alguno de los vértices trigonométricos quede demasiado cerca de las orillas del papel, y entónces las divisiones de los meridianos y sus perpendiculares en partes iguales, se hacen partiendo de los ejes.

Determinado el orígen, situemos por ejercicio la posicion de uno de los vértices, del último *Y*, por ejemplo. Atendiendo al valor de sus coordenadas $x = + 0.6853$, $y = - 0.3278$, vemos que debe hallarse en la sétima serie vertical de cuadrados de la izquierda, partiendo de la meridiana principal, y en la cuarta serie horizontal abajo de la perpendicular á aquella linea. El ángulo *N E* del cuadrado que corresponde á la interseccion de las dos series, tiene por coordenadas $x = + 0^{m}.6$, $y = - 0^{m}.3$; por consiguiente los excesos numéricos de $0^{m}.0853$ en la absisa y de $0^{m}.0278$ en la ordenada, son los que hay que tomar en los lados de este pequeño cuadrado, el primero hácia el Oeste y el segundo hácia el Sur de las dos lineas que lo limitan por el Este y por el Norte respectivamente. De una manera idéntica se situan todos los demas vértices.

La construccion de los planos por el método de las coordenadas, ademas de la gran ventaja que ofrece de poder situar cada punto con entera independencia de los demas, tiene la no ménos importante de permitir la formacion de planos muy extensos sin las dificultades que por esta circunstancia presentan todos los demas procedimientos. Basta construir en cada una de las diferentes hojas de papel de que deba constar el plano, la cuadrícula correspondiente, y en ella los diversos puntos cuyas coordenadas están comprendidas dentro de sus límites. En seguida pueden pegarse unas á continuacion de otras todas las partes del plano, atendiendo á que la linea quo termina una cuadrícula cualquiera, ya sea de Este á Oeste ó de Norte á Sur, debe coincidir con la primera de la cuadrícula siguiente. Para evitar equivocaciones se anotan al pié de las lineas extremas de cada una, las coordenadas que les corresponden, ó bien un número que indique su órden en el sistema general.

109º Sucede á veces que los azimutes de los lados no se refieren inmediatamente al meridiano verdadero ó astronómico, sino á la direccion que señala la *brújula* ó aguja magnética, y por esa razon se denominan azimutes *magnéticos*. Como ántes ó despues de hecha una triangulacion puede medirse el ángulo formado por las dos meridianas astronómica y magnética, ó muchas veces se conoce de antemano en la localidad en que se trabaja, el valor de ese ángulo llamado *declinacion* de la aguja, no hay inconveniente en tomar directamente con la brújula el azimut magnético de uno ó mas lados trigonométricos, los cuales ó se corrigen por el valor de la declinacion, ó se aplican desde luego al cálculo de las coordenadas, tomando en tal caso por ejes la meridiana magnética y una linea perpendicular á esta. La cadena que nos sirve de ejemplo está calculada así, de suerte que al construir la cuadrícula, si se quiere que resulte orientada paralelamente á los lados del papel, debe hacerse la construccion trazando las meridianas magnéticas con una inclinacion de 8° 58′ del Norte hácia el Este respecto de la orilla del papel; porque esta era la declinacion de la aguja en el lugar donde se ejecutó la triangulacion. Si no se hiciere así, deberá trazarse la meridiana astronómica formando el mismo ángulo con las lineas verticales de la cuadrícula; pero del Norte hácia el Oeste. De una manera ó de otra el trazo de la meridiana astronómica es esencial en el plano para señalar la verdadera direccion de la linea *Norte–Sur*, á la cual se refiere la orientacion de aquel.

Tales son en resúmen las sencillas reglas que deben observarse en esta parte de la planografía, á las que debe agregarse la de no hacer construccion alguna miéntras el papel despues de restirado conserve todavía alguna humedad; porque contrayéndose sensiblemente al secarse, puede dar orígen á variaciones en el tamaño de las lineas que deformen la construccion, ó que ya no correspondan á los valores que se deducen de la escala adoptada. En general el papel de cualquiera clase que sea, tiene propiedades higrométricas muy marcadas, y por tanto los planos en vía de construccion deben preservarse cuidadosamente de la accion de la humedad.

CAPITULO IX.

MODIFICACIONES DEL MÉTODO GENERAL DE TRIANGULACION.

110º En los Capítulos que preceden he procurado trazar el conjunto de reglas generales que deben guiar al ingeniero en la medida de una red trigonométrica, y que si se quiere, son por su misma generalidad las mas sencillas; pero algunas de ellas son hasta cierto punto susceptibles de modificacion con el fin de abreviar algunas de las operaciones elementales á que se refieren. En este Capítulo me propongo ocuparme de las principales modificaciones que pueden hacerse del método general, comenzando por la que ha propuesto Mr. Beuvière, geómetra del catastro frances.

El procedimiento de Mr. Beuvière, llamado por su autor *método de lugares geométricos*, tiene por principal objeto evitar el cálculo de los triángulos, determinando directamente las coordenadas de los vértices por medio del conocimiento de los azimutes de los lados y de la longitud de estos, que se toma gráficamente del cróquis. Este último dato no pudiendo ser mas que aproximativo, lo son igualmente los valores que se obtienen para las coordenadas; pero se corrigen en seguida valiéndose de una construccion geométrica de la cual deriva el método su nombre. Entremos en algunos detalles.

Entre las operaciones de campo, la medida de la base y la de los ángulos en nada difieren esencialmente de los procedimientos que con el mismo objeto se han desarrollado en el método comun de triangulacion; aunque en el nuevo es preferible adoptar siempre el modo de medir los ángulos por direcciones tal como se explicó en el núm. 67º, en lugar de repetir cada uno aisladamente. Mr. Beuvière no se ocupa de la eleccion de los vértices bajo el punto de vista de que los triángulos resulten bien configurados, puesto que en todo rigor no forma una verdadera cadena trigonométrica, sino que mas bien fija su atencion en escogerlos de manera que desde cada uno de ellos pueda verse el mayor número posible de puntos, ó lo que es lo mismo, que cada vértice pueda determinarse por medio de varias visuales. Así es que al ocupar cada estacion, se toman todos los ángulos formados en ella por las visuales dirigidas á cuantos puntos puedan descubrirse, y en general debe hacerse de manera que ninguno de los vértices quede determinado por ménos de tres visuales, pues como verémos despues, se tiene de este modo un medio de comprobar la exactitud del resultado final. La figura 54ª dá una idea de la operacion: desde ambos extremos de la base $A\ B$ se han podido dirigir visuales á C, D, E, F, G, H, é I. En seguida desde cada uno de estos se procede de igual manera, observando tanto los puntos anteriores que se descubran, como otros nuevos para proseguir así la operacion hasta su término.

Es claro que con los datos adquiridos y medido el azimut de cualquiera de los lados, fácilmente se obtienen los azimutes de todas las demas visuales procediendo lo mismo que se explicó en el método comun; y una vez construido el cróquis, pueden medirse sobre él, atendiendo á la escala, las longitudes de las visuales mismas con mas ó ménos aproximacion para proceder al cálculo directo de las coordenadas provisionales ó aproximativas de los vértices. Antes de esto, con el azimut de la base $A\ B$ y su longitud, que es la única que se conoce con precision, se calculan las diferencias de coordenadas de sus extremos por el método comun, de manera que las posiciones de esos puntos pueden considerarse exactamente determinadas. Veamos ahora cómo se determina la del punto E, por ejemplo, que está enlazado con A y B por las medidas angulares. Sea k la distancia $A\ E$ medida en el cróquis, y u su azimut: las diferencias de coordenadas de A y E serán:

$$x = k \text{ sen. } u \qquad\qquad y = k \cos.\ u$$

en las que resultará un error debido á la falta de precision con que puede medirse gráficamente la distancia k; pero como el azimut se supone exacto, tendrémos que las fórmulas anteriores, aunque no dén precisamente las coordenadas de E, sí darán las de algun punto de la linea $A\ E$, quiere decir, las del punto cuya distancia á A sea exactamente k. Luego si dando á la longitud aproximativa de la linea $A\ E$ un incremento tal que la convierta en k', volvemos á calcular las fórmulas precedentes con el mismo valor de u, obtendrémos las coordenadas exactas de otro punto de la recta, y estarémos seguros de que en la linea que pasa por los dos puntos así determinados, ó bien en su prolongacion, se hallará la estacion E que se busca.

Tomemos en seguida la distancia $B\ E$ sobre el cróquis, y con el resultado que se obtenga y otro un poco mayor, hagamos el nuevo cálculo de las fórmulas, usando por supuesto el azimut que corresponda á esa direccion. De este modo tendrémos las posiciones de dos puntos de la recta $B\ E$, que debe contener tambien el punto E que se busca, y solo faltará determinar la interseccion de ambas lineas, que es la que resuelve el problema.

Esta última parte de la resolucion es la que se hace por medio de una construccion geométrica muy sencilla. Se traza un cuadrado $a\ b\ c\ d$ (fig. 55ª), cuyos lados sean de $0^{m}1$, y á los que se asignan coordenadas muy poco diferentes de los cuatro resultados obtenidos, con el objeto de que en su interior quepan los cuatro puntos á que aquellos se refieren. Con los excesos de coordenadas se sitúan los dos puntos m y n que corresponden á la primera recta $A\ E$ de la figura 54ª, y en seguida p y q correspondientes á la segunda $B\ E$. La interseccion de las lineas $m\,n$ y $p\,q$ determinará el punto E, y como la construccion se hace en una escala suficientemente grande para que puedan apreciarse por lo ménos los metros enteros, resulta que midiendo las distancias $E\,F$ y $F\,b$ y combinándolas con las coordenadas que se asignaron al vértice b del cuadrado, se obtendrán con bastante exactitud las del punto E.

Supongamos para mayor claridad que el azimut de la linea $A\ E$ fuese de $302°\ 17'\ 20''$, y el de $B\ E$ de $34°\ 31'\ 40''$, tomando el puuto A por orígen de coordenadas, y siendo las de B, $x = -3534^{m}6$, $y = +213^{m}6$. Admitamos ademas que estando construido el cróquis de la triangulacion en la escala de $\frac{1}{30000}$, hallamos con el doble-decímetro $A\ E = 0^{m}101$ y $B\ E = 0^{m}057$. Tomarémos, pues, para la primera linea $k = 0^{m}101 \times 30000 = 3030^{m}$, y para la segunda $k = 0^{m}057 \times 30000 = 1710^{m}$. Aplicando el cálculo con estos valores y con los azimutes que corresponden á las dos direcciones, tendrémos:

3030............3.48144	..........3.48144		1710.............3.23300	...........3.23300	
az. *AE*...sen...9.92704—	....cos...9.72769		az. *B E*...sen...9.75343	.....cos.....9.91585	
3.40848—	3.20913		2.98643	3.14885	
$x = -2561^{m}.4$	$y = +1618^{m}.6$		$x = +969^{m}.2$	$y = +1408^{m}.8$	

El punto m de la primera recta tendrá por coordenadas.......... $x = -2561^{m}.4$, $y = +1618^{m}.6$. Atendiendo á las de B, las coordenadas del punto p de la segunda recta, serán $x = -2565^{m}.4$, $y = +1622^{m}.4$.

Para calcular el segundo punto de cada direccion demos á los valores de k un incremento de 20^{m}, por ejemplo, y hallarémos:

3050............3.48430	..........3.48430	1730.............3.23805	...........3.23805
az. *A E*...sen...9.92704—	...cos...9.72769	az. *B E*....sen...9.75343	....cos....9.91585
3.41134—	3.21199	2.99148	3.15390
$x = -2578^{m}.3$	$y = +1629^{m}.3$	$x = +980^{m}.6$	$y = +1425^{m}.3$

Para el punto n de la primera direccion tendrémos $x = -2578^{m}.3$, $y = +1629^{m}.3$; y para el punto q de la segunda, $x = -2554^{m}.0$, $y = +1638^{m}.9$.

Adoptemos para construir el cuadrado de la figura 55ª una escala muy grande, por ejemplo, de $\frac{1}{300}$ de suerte que su lado de $0.^{m}1$ represente 30^{m}, y asignemos al punto a las coordenadas............. $x = -2550^{m}$, $y = +1610^{m}$. Entónces con los excesos de las coordenadas de m, n, p y q respecto de estas últimas, situemos estos puntos, y tracemos las rectas que por su interseccion determinan el punto E. Bajando la perpendicular $E\ F$, esta y la distancia $a\ F$ sumadas con las coordenadas de a darán las de E, debiendo encontrase $x = -2566^{m}$ é $y = +1621^{m}$ sin tomar en cuenta mas que los metros enteros.

Si el punto que se busca está determinado por mas de dos visuales se hace la misma construccion para cada una, y la comprobacion deberá consistir en que todas las lineas trazadas se corten en un solo punto. En el caso contrario se adopta por valor final el término medio de todos los que se obtengan, y una vez fijada la posicion de un punto, puede servir para situar los que sigan por el mismo procedimiento.

En lugar de calcular la posicion de dos puntos de cada visual, podria hacerse uso de uno solo, puesto que los azimutes se conocen con exactitud. Entónces al hacer la construccion, despues de fijado el punto *m*, por ejemplo, se trazaria por él una linea que formase con *a d* un ángulo igual al azimut de la visual á que pertenece *m*, y lo mismo se haria desde el punto *p* de la otra visual. Los ángulos azimutales pueden construirse directamente sobre los lados *a d* y *b c* del cuadrado, tomando su magnitud por radio de la construccion; y en seguida por *m* y *p* respectivamente se trazan paralelas á las lineas que forman aquellos ángulos. Como siempre la escala se toma muy grande, la construccion de los ángulos azimutales proporciona toda la exactitud que se necesita.

Tal es en resúmen el método de los lugares geométricos: el objeto que se propuso su autor fué sin duda el de facilitar las operaciones trigonométricas, aunque me parece dudoso que pueda considerarse realmente como una simplificacion del método comun la sustitucion del doble cálculo de un triángulo rectángulo y de una construccion geométrica para cada visual, en vez de la resolucion de los triángulos tal como se practica en aquel. Es probable que cada lector forme en este punto su opinion, segun que su inclinacion ó su aptitud le presenten como mas sencillas las operaciones numéricas respecto de las gráficas, ó viceversa.* Lo que sí me parece una positiva ventaja es el modo de tomar los ángulos sin atender por lo pronto á la forma de los triángulos, sino observando cuantos puntos sean visibles desde cada estacion. Este procedimiento, en efecto, no solo suministra repetidas comprobaciones que pueden aprovecharse en muchísimos casos, sino que permite, despues de construido el cróquis, estudiar en él la colocacion de las diversas estaciones para elegir entre ellas las que formen una red trigonométrica de buenas condiciones; estudio que es indudablemente mas fácil sobre el plano que sobre el terreno. Así lo he practicado algunas veces, y hecha la eleccion de la cadena, la he calculado por el método comun. Creo que esta ventaja es por sí sola bastante apreciable para compensar el trabajo que se toma el ingeniero al medir mayor número de ángulos de los que en rigor se necesitan; y por otra parte, los ángulos sobrantes siempre pueden utilizarse como medios de comprobacion, ó para formar triángulos secundarios.

111º Adoptando el pensamiento fundamental de Mr. Beuvière,

* No es posible que el Sr. Beuvière hubiese discurrido un método que á primera vista complica el trabajo de gabinete, sin tener una razon poderosa; yo encuentro esta precisamente en la necesidad que hubo de él para los trabajos del cadastro y levant.to en Francia atendiendo á la clase de personas que ocupan en sus oficinas, á quienes les facilitaba el trabajo para la situacion de nuevos puntos con la indicacion de las visuales ó lados secundarios en

que consiste en suprimir el cálculo trigonométrico, me pareceria en general preferible eliminar tambien la resolucion gráfica sustituyéndola con la aplicacion de los principios elementales de la Geometría analítica. En efecto, cada visual de las que fijan la posicion de un punto, está determinada por su azimut y por las coordenadas de la estacion desde la cual se dirige, ya sea esta última alguno de los extremos de la base, como sucede en nuestro ejemplo, ó ya sea alguno de los puntos cuya posicion se haya determinado ántes por el mismo procedimiento. De aquí se deduce que la ecuacion de cada visual será de la forma:

$$y - y' = (x - x') \cot. u'$$

siendo u' el azimut, y x' y' las coordenadas conocidas de la estacion desde la cual se supone observado el azimut. La segunda visual, cuyo azimut representaré por u'', y que parte del punto que tiene x'' y'' por coordenadas, tendrá por ecuacion:

$$y - y'' = (x - x'') \cot. u''$$

Si para abreviar designamos por b' y b'' las cantidades conocidas, tendrémos:

$$b' = y' - x' \cot. u' \qquad b'' = y'' - x'' \cot. u'' \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

y entónces las ecuaciones de las dos rectas serán:

$$y = b' + x . \cot. u'$$
$$y = b'' + x . \cot. u''$$

que combinadas darán á conocer las coordenadas x y de su punto de interseccion, el cual no es otra cosa mas que la estacion trigonométrica cuya posicion se trata de determinar. Restándolas y sumándolas se obtiene respectivamente:

$$0 = b' - b'' + x (\cot. u' - \cot. u'')$$
$$2 y = b' + b'' + x (\cot. u' + \cot. u'')$$

Trasformando los coeficientes de x con el fin de hacerlos mas propios para el cálculo logarítmico, resulta finalmente:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{(b' - b'') \operatorname{sen.} u' \operatorname{sen.} u''}{\operatorname{sen.} (u' - u'')} \\ y &= \tfrac{1}{2}(b' + b'') + \tfrac{1}{2}(b' - b'') \frac{\operatorname{sen.} (u' + u'')}{\operatorname{sen.} (u' - u'')} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Las ecuaciones (1) y (2) resuelven completamente el problema sin necesidad de cálculos trigonométricos preliminares. Apliquémoslas á nuestro ejemplo recordando que el punto A de la figura 54ª por ser el orígen, tiene nulas sus coordenadas, y las de B son $x'' = -3534^{\text{m}}6$ $y'' = +213^{\text{m}}6$. En cuanto á los azimutes en A y en B, son respectivamente:

$$u' = 302^\circ\, 17'\, 20'' \qquad\qquad u'' = 34^\circ\, 31'\, 40''$$

El cálculo será como sigue, puesto que $b' = 0$.

$$\begin{array}{rl} x'' \ldots\ldots & 3.54834- \\ \operatorname{cot.} u'' \ldots\ldots & 0.16242 \\ \hline & 3.71076- \\ y'' = & +\ 213.6^{\text{m}} \\ -x'' \operatorname{cot.} u'' = & +\ 5137.6 \\ \hline b'' = & +\ 5351.2^{\text{m}} \end{array}
\qquad
\begin{array}{rl} b' - b'' \ldots\ldots & 3.72845- \\ \operatorname{sen.} u' \ldots\ldots & 9.92704- \\ \operatorname{sen.} u'' \ldots\ldots & 9.75343 \\ \hline & 3.40892 \\ \operatorname{sen.} (u' - u'') \ldots\ldots & 9.99967- \\ \hline x \ldots\ldots & 3.40925- \\ x = & -\ 2566.0^{\text{m}} \end{array}
\qquad
\begin{array}{rl} \tfrac{1}{2}(b' - b'') \ldots\ldots & 3.42742- \\ \operatorname{sen.} (u' + u'') \ldots\ldots & 9.59514- \\ \hline & 3.02256 \\ \operatorname{sen.} (u' - u'') \ldots\ldots & 9.99967- \\ \hline & \begin{cases} 3.02289- \\ -1054.1^{\text{m}} \end{cases} \\ \tfrac{1}{2}(b' + b'') = & +\ 2675.6 \\ \hline y = & +\ 1621.5^{\text{m}} \end{array}$$

Este método es tan sencillo y general como puede desearse, y evita completamente la parte gráfica de la resolucion. Cuando se tengan mas de dos visuales que son las estrictamente necesarias, puede obtenerse la comprobacion del primer resultado combinando de dos en dos los datos referentes á cada una, y en el caso de que se hallen algunas pequeñas diferencias se toma el término medio. Es claro que una vez determinadas de esta manera las coordenadas de una estacion trigonométrica, pueden servir como nuevos datos para determinar las de otros puntos enlazados con ella por medio de las observaciones angulares.

La resolucion analítica que acaba de indicarse, ó la original de Mr. Beuvière si se prefiere aquella, me parecen muy aceptables para situar los vértices de las triangulaciones secundarias y aun algunos de la principal, sobre todo cuando habiendo formado y calculado una buena red fundamental, se tiene plena confianza en las coordenadas de los puntos que la forman, puesto que estas sirven de elementos para determinar las de aquellos.

Si se tiene algun interes en conocer las distancias de una estacion á otra, puede conseguirse con mucha facilidad por la fórmula:

$$k = \frac{x - x'}{\text{sen. } u'} = \frac{y - y'}{\cos. u'}$$

Calculemos, por ejemplo, la distancia de *E* á *B*.

$$\begin{array}{rl} x = & -2566^{\text{m}}0 \\ x'' = & -3534.\ 6 \\ \hline x - x'' = & +\ 968^{\text{m}}6 \end{array} \qquad \begin{array}{lr} x - x'' \ldots\ldots\ldots & 2.98614 \\ \text{sen. } u'' \ldots\ldots\ldots & 9.75343 \\ \hline k \ldots\ldots\ldots\ldots & 3.23271 \end{array}$$

$$k = 1708^{\text{m}}9$$

112º Hay otra modificacion de importancia adoptada en las grandes triangulaciones que se ejecutan en los Estados-Unidos por las comisiones exploradoras de las costas (*Coast-Survey*). Su objeto no es el de economizar trabajo, sino el de procurarse comprobaciones en cada elemento de la cadena trigonométrica, lo que se logra formando cuadriláteros en lugar de simples triángulos, como lo indica la figura 56ª La resolucion de los dos triángulos componentes de cada cuadrilátero *A B C D* dá á conocer las diagonales *A C* y *B D*, de modo que la longitud de cada lado *B C* se obtiene por el triángulo *A B C*, así como por el triángulo *B C D*, y ambos resultados se comprueban el uno al otro. La misma figura indica el modo de hacer crecer poco á poco los lados partiendo de una base *a b*, generalmente mucho menor que la longitud media de aquellos, con la ventaja de que los primeros triángulos resulten bien configurados.

La exploracion de las costas por su naturaleza demanda la formacion de cadenas mas bien que de redes trigonométricas, y aun bajo este punto de vista es muy conveniente el cuadrilátero como figura elemental, puesto que permite situar mayor número de puntos que el triángulo, sin que por eso sea preciso extender demasiado las operaciones.

Podrian mencionarse algunos otros procedimientos trigonométricos mas ó ménos interesantes; pero como no importarian verdaderas modificaciones del método general, no creo necesario extenderme mas en esta materia.

CAPITULO X.

APLICACIONES DE LA TRIANGULACION.

113º Hasta aquí hemos estudiado las operaciones trigonométricas considerándolas únicamente bajo el punto de vista de trabajos preliminares, destinados á suministrar lineas y puntos de referencia para las operaciones posteriores del levantamiento de planos; pero como la triangulacion por sí sola puede aplicarse á la resolucion de muchos problemas de importancia práctica, juzgo oportuno dedicar algunas páginas á la exposicion de sus principales aplicaciones.

Una de las que se presentan con mas frecuencia consiste en la determinacion y trazo de una linea extensa entre dos puntos dados; caso que ocurre en la demarcacion de los linderos ó lineas limítrofes entre dos propiedades contiguas, en la apertura de caminos, &c. En estos casos ú otros análagos se conocen por lo comun el punto de partida A (fig. 57ª), y el término B de la linea; pero siendo á veces muy grande la distancia de esos puntos extremos, ó no siendo visibles uno de otro aunque su distancia sea pequeña, no es posible hacer el trazo como se indicó en la pág. 8ª al tratar de las bases. Entónces se establece entre ellos una cadena de triángulos acercándose cuanto sea posible á la direccion de la linea que se busca. La resolucion de estos triángulos suministra todos sus elementos, y si se asigna un sistema arbitrario de coordenadas á uno de los vértices, ó mejor al punto de partida, y se escoge tambien arbitrariamente el eje de las ordenadas de modo que forme un ángulo cualquiera u con el primer lado trigonométrico $A\,D$, se tendrán los datos necesarios para calcular las coordenadas del término B referidas al punto A considerado como orígen. Sean X é Y la absisa y la ordenada de B, ó con mas generalidad, las diferencias de absisas y ordenadas de los puntos A y B: si designamos por K la distancia incógnita $A\,B$ y por U el ángulo que forma con el eje de las ordenadas, tendrémos las dos ecuaciones;

$$X = K \operatorname{sen.} U \qquad Y = K \cos. U$$

de cuya combinacion deducirémos los valores de K y U, á saber:

$$\tan. U = \frac{X}{Y} \qquad K = \frac{X}{\operatorname{sen.} U} = \frac{Y}{\cos. U}$$

La primera de estas fórmulas determina la direccion y la segunda la magnitud de la linea que se quiere trazar. Es claro que para establecer la linea $A\,B$ en el terreno, no es necesario tener trazado de antemano el eje de las ordenadas, pues si llamamos β el ángulo $D\,A\,B$ que aquella forma con el primer lado, se tiene:

$$\beta = U - u$$

Para aplicar las fórmulas supongamos que se tratase de trazar una linea del punto J al punto Y de la figura 46ª Las coordenadas de estos son:

J.........	$x = -\ 8854^{m}3$...........	$y = -\ 7270^{m}8$
Y.........	,, $= +\ 17133.\ 6$...........	,, $= -\ 8195.\ 9$
	$X = +\ 25987^{m}9$	$Y = -\ 925^{m}1$

X......... 4.4147712	....	4.4147712
Y......... 2.9661887—	sen U......	9.9997251
tan. U... 1.4485825—	K......	4.4150461
$U = 92°\ 2'\ 19''$		$K = 26004^{m}4$

En el caso presente, como tomé por ejes la meridiana magnética y su perpendicular, los ángulos u y U serán los azimutes magnéticos del primer lado y de la linea JY respectivamente. Así, para el lado JP se obtuvo $u = 50° \ 36' \ 30''$, por lo cual resulta............ $\beta = 41° \ 25' \ 49''$, que es el ángulo que debe formarse con JP para trazar la recta que se desea.

La demarcacion material de la linea se hace con el teodolito, dirigiendo una visual al punto extremo del primer lado, que es P en nuestro ejemplo y moviendo despues el telescopio en el sentido conveniente hasta que los vernieres indiquen una amplitud angular igual á β. En la nueva direccion del telescopio, y en coincidencia con la retícula, se coloca una señal que pertenecerá á la linea si se hizo con exactitud la apreciacion del ángulo; pero como la aproximacion limitada del instrumento, los errores que pueda haber de excentricidad, graduacion, lectura, &c., no permiten generalmente que sea así, es preciso corregir la señal, pues se comprende que por pequeña que sea su desviacion, llegaria á ser muy notable al prolongar el alineamiento. Sea A (fig. 58ª) el punto de partida y N' la señal que se situó, suponiendo que el ángulo $M A N'$ es igual á β. Con el teodolito se mide repetidas veces este ángulo, y si llamamos β' el resultado que se obtenga, tendrémos que la correccion angular será $\beta - \beta'$, y la señal deberá trasladarse á N en una direccion perpendicular á $A N'$, calculando la distancia $N N'$ por la fórmula......... $N N' = A N' \ (\beta - \beta')$ sen. $1''$, en la cual la pequeña variacion del ángulo se supone expresada en segundos. Una vez rectificada la posicion de la señal pueden situarse otros puntos prosiguiendo el trazo como se dijo en la pág. 8ª

Tambien podrian establecerse puntos intermedios de la recta, bajando de los vértices trigonométricos D, E, (fig. 57ª) las perpendiculares $D d$, $E e$, &c., á su direccion, cuyas longitudes es fácil calcular. Desde luego, la primera será: $D d = A D$ sen. $(U - u)$; y por la misma fórmula pueden obtenerse las demas, solo con sustituir por u el valor que corresponde á cada lado trigonométrico, y combinando los resultados del cálculo con los valores obtenidos anteriormente, como lo indica la figura. Es claro tambien que las direcciones de estas perpendiculares deberán ser tales que formen con los lados ángulos complementarios de $U - u$; por ejemplo, desde D se trazará la linea $D d$ formando con $A D$ el ángulo $90° - \beta$. Las señales deben corregirse si es preciso, por el mismo método que ántes se ha enseñado.

114º La resolucion de todos los problemas elementales de la Geometría analítica, es tambien aplicable á las diversas combinaciones de los datos de una red trigonométrica, en atencion á que la posicion de cada uno de los lados está plenamente caracterizada, ó por las coordenadas de sus dos extremos, ó por las de uno solo y el azimut del lado mismo. En el primer caso la ecuacion del lado tiene la forma:

$x - x' = k \operatorname{sen} u$
$y - y' = k \cos u$
$y - y' = \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u}(x - x')$

$y - y' = (x - x') \cot u$
$y' - y'' = (x' - x'') \cot u$
eliminand $\cot u$

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x')$$

en la cual las coordenadas acentuadas son las que corresponden á los extremos de la linea en cuestion, y las que no llevan acento convienen á cualquiera otro punto de la recta ó de su prolongacion. En el segundo caso la ecuacion, segun vimos en el Capítulo anterior, será:

$$y - y' = \cot.\, u\, (x - x')$$

La identidad necesaria de estas ecuaciones proviene de la relacion que existe entre el azimut u de la linea y las coordenadas de los dos puntos que la limitan, á saber:

$$\tan.\, u = \frac{x' - x''}{y' - y''}$$

En uno y otro caso, representando por b el conjunto de cantidades determinadas, se tendrá:

$$b = y' - \frac{y' - y''}{x' - x''}\, x'$$

$$b = y' - x' \cot.\, u$$

y la ecuacion de la recta es respectivamente:

$$y = \frac{y' - y''}{x' - x''}\, x + b$$

$$y = x \cot.\, u + b$$

La cantidad b es lo que en la Geometría analítica se designa con el nombre de *ordenada en el orígen;* porque es en efecto el valor que adquiere y en el punto en que $x = 0$.

No es mi ánimo entrar aquí en pormenores que pertenecen á aquella parte de la ciencia; porque supongo al lector perfectamente instruido en los elementos de la matemática abstracta, y porque ademas en el Capítulo precedente, con motivo de los lugares geométricos, indiqué una de las numerosas aplicaciones que pueden hacerse de las ecuaciones de los lados trigonométricos, la cual le servirá de norma para casos análogos. Así es que para trazar desde un punto dado una linea que forme con otra cierto ángulo, ó que concurra á otro punto determinado; para hallar la distancia de un punto á una recta, &c., se aplican exactamente las mismas resoluciones que enseñan todos los tratados de Geometría analítica. Unicamente por vía de ejercicio resolverémos el problema siguiente que suele presentarse en la práctica. Dadas dos rectas, determinar la magnitud y direccion de otra que partiendo de un punto dado, vaya á terminar al punto de concurso de las primeras.

Sean $x_0\ y_0$ las coordenadas del punto dado, y las de las dos rectas:

$$y = x \text{ cot. } u' + b'$$
$$y = x \text{ cot. } u'' + b''$$

Su punto de interseccion, segun vimos en otra parte, tendrá por coordenadas:

$$x = (b' - b'') \frac{\text{sen. } u' \text{ sen. } u''}{\text{sen. } (u' - u'')}$$

$$y = \tfrac{1}{2}(b' + b'') + \tfrac{1}{2}(b' - b'') \frac{\text{sen. } (u' + u'')}{\text{sen. } (u' - u'')}$$

La recta que se busca, en el hecho de pasar por el punto dado, y siendo u_0 el ángulo incógnito que forma con la misma direccion á que se refieren u' y u'', tendrá por ecuacion:

$$y - y_0 = (x - x_0) \text{ cot. } u_0$$

Sustituyendo en ella los valores de x é y hallados anteriormente, resulta:

$$\tan. u_0 = \frac{x - x_0}{y - y_0}$$

En cuanto á la magnitud, se tiene en general:

$$K = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

fórmula que puede adaptarse al cálculo logarítmico, trasformándola con ayuda del ángulo u_0, á saber:

$$K = \frac{x - x_0}{\text{sen. } u_0} = \frac{y - y_0}{\cos. u_0}$$

No me parece necesario hacer alguna aplicacion numérica, porque como el lector habrá notado, esta resolucion no es mas que la combinacion de otras que se han aplicado ya.

115º La triangulacion sola es muchas veces suficiente para hacer la planometría de un terreno sin necesidad de otras operaciones secundarias, al ménos cuando no se lleva la mira de configurar los detalles interiores sino únicamente la de hallar la forma y extension del conjunto, caso muy frecuente en la práctica. Basta para esto que la triangulacion se prolongue hasta los límites de la figura, de tal manera que sus últimos vértices se hallen en los ángulos mismos del polígono; porque es claro que la resolucion de la cadena dará á conocer la direccion y magnitud de los linderos, y la planografía la forma del polígno. Si este es demasiado extenso, no es indispensable cubrirlo completamente de una red de triángulos, sino formar una verdadera cadena cerca de sus límites como lo manifiesta la figura 59ª

Cuando es muy sinuoso el perímetro del polígono, es difícil que todos sus lados puedan enlazarse directamente con la triangulacion, ó al ménos seria preciso un gran número de triángulos para conseguirlo. Un método general que en tales casos he seguido con muy buen éxito, y que permite terminar las operaciones de campo con extraordinaria rapidez, consiste en formar en el interior del polígono una serie de triángulos que hasta donde sea posible se acerque al contorno y se apoye en alguno de sus puntos; pero principalmente que tenga por vértices lugares elevados y visibles de una gran parte del perímetro, con el objeto de que desde cualquiera ángulo de este se distingan por lo ménos tres ó cuatro estaciones trigonométricas. De esta manera, despues de recogidos todos los datos pertenecientes á la triangulacion, se recorre el perímetro deteniéndose en cada una de sus inflexiones para medir en ellas los ángulos que forman los tres ó cuatro puntos trigonométricos visibles, á fin de determinar en seguida las posiciones de aquellas aplicando la resolucion que se ha expuesto en las páginas 144 y siguientes, ó bien simplemente la de los tres vértices. La figura 60ª dá una idea del modo de disponer la triangulacion para aplicar este método.

La única objecion que acaso podria hacérsele es la de que la posicion de los puntos del contorno no puede comprobarse cuando solo han podido verse tres estaciones trigonométricas; pero tal objecion no es de mucho peso, en mi opinion, porque en primer lugar el problema de los tres vértices suministra siempre resoluciones muy exactas, y en segundo lugar, porque aun en las peores circunstancias, casi no se concibe la imposibilidad absoluta de medios de comprobacion, como serian dirigir visuales á algunos otros puntos del lindero, medir directamente algunas distancias pequeñas, &c., y sobre todo en tales casos, para alejar todo peligro de equivocacion, lo que debe hacerse es medir los ángulos con el mayor cuidado. Es claro que pudiendo observarse cuatro ó mas vértices de la triangulacion, no debe haber temor de que pase desapercibida alguna equivocacion que se cometa. Como prueba de la velocidad con que es posible operar, mencionaré el hecho de que aplicando este procedimiento he podido terminar en dos meses todas las observaciones para levantar el plano de una propiedad que tenia 37 leguas cuadradas de superficie, con las circunstancias de haber sido en un terreno sumamente escabroso, y de haber tenido que determinar la posicion de mas de 70 mohoneras que fijaban otros tantos ángulos del lindero.

116º Otra de las aplicaciones importantes de la triangulacion cuando se extiende hasta los límites de la figura, es la de calcular su superficie con la mayor facilidad, pues esta es evidentemente la suma de las areas de todos los triángulos. Aunque la superficie de un triángulo puede expresarse en funcion de cualesquiera de los elementos que lo determinan, es conveniente adoptar la fórmula que la expresa en funcion de dos lados y el ángulo comprendido, en atencion á que la resolucion de la red trigonométrica suministra los logaritmos de todos los lados y de los *senos* de todos los ángulos, por lo cual el cálculo queda reducido á una sencillísima operacion numérica. Haciendo, pues, uso de la fórmula $s = \frac{1}{2}\, a\, b$ sen. C, calculemos, por ejemplo, la superficie de la triangulacion representada en la figura 46ª, cuyos elementos constan en la pág. 133.

TRIÁNGULO *Y R A*.

0.5...........	9.6989700
R Y..........	3.9859749
R A..........	3.9077614
sen. *R*........	9.7397378
s..........	7.3324441

TRIÁNGULO *A R P*.

0.5...........	9.6989700
R A..........	3.9077614
R P..........	4.0033992
sen. *R*........	9.9585667
s..........	7.5686973

TRIÁNGULO *P R M*.

0.5...........	9.6989700
R P..........	4.0033992
R M..........	3.8845400
seu. *R*........	9.9975133
s..........	7.5844225

TRIÁNGULO *P J M*.

0.5...........	9.6989700
J P..........	4.0590709
J M..........	4.0687552
sen. *J*........	9.9472535
s..........	7.7740496

Superficie	*Y R A* =	21,500277	metros cuadrados.
„	*A R P* =	37,042246	„ „
„	*P R M* =	38,408071	„ „
„	*P J M* =	59,436000	„ „

Superficie total = 156,386594 metros cuadrados.

Cuando los últimos lados de la triangulacion no son las lineas mismas del polígono, habrá necesidad de calcular por separado la superficie comprendida entre los límites de la red trigonométrica y los de la figura, para añadirla al resultado que suministran los triángulos. Sin embargo, si todos los ángulos del polígono cuya superficie se trata de medir, se han enlazado con la triangulacion, ya sea como vértices de esta, segun se ve en la fig. 59ª, ya sea por medios de referencia ménos directos, tales como los que se han explicado en las páginas 82, 87, 114 y 144, de tal manera que se haya seguido el plan que indica la fig. 60ª, es fácil hallar tambien la superficie aplicando el procedimiento tan sencillo como sistemático y general que voy á exponer.

117º En el hecho de haberse ligado directa ó indirectamente á la triangulacion todos los ángulos ó vértices del polígono, se podrán calcular las coordenadas de cada uno, y con estas la superficie. Sea, en efecto, $A\,B\,C\,D\,E$ (fig. 61ª) un polígono cualquiera, y bajemos de cada uno de sus vértices perpendiculares á uno de los ejes, por ejemplo, al de las absisas. Es evidente que su superficie es igual á la de los trapecios $A\,a\,e\,E$ y $e\,E\,D\,d$, ménos la de los otros trapecios $A\,a\,b\,B$, $b\,B\,C\,c$ y $c\,C\,D\,d$; y como la de cada uno puede expresarse en funcion de las coordenadas de los vértices del polígono, se tendrá designando por s la superficie de este:

$$\begin{aligned} 2s = (Oa - Oe)\,(Aa + Ee) + (Oe - Od)\,(Ee + Dd) &- (Oa - Ob)\,(Aa + Bb) \\ &- (Ob - Oc)\,(Bb + Cc) \\ &- (Oc - Od)\,(Cc + Dd) \end{aligned}$$

Para evitar el uso de tantas letras designemos las coordenadas por los símbolos comunes x é y, y para distinguir el sistema correspondiente á cada uno de los vértices, supongamos que estos se han numerado en el mismo órden que tienen en el alfabeto las letras que los señalan, esto es: el punto A con 1, el punto B con 2,......... el punto E con 5. Poniendo un índice numérico á las coordenadas segun el vértice á que pertenecen, la ecuacion anterior será:

$$\begin{aligned} 2s = (x_1 - x_5)\,(y_1 + y_5) + (x_5 - x_4)\,(y_5 + y_4) &- (x_1 - x_2)\,(y_1 + y_2) \\ &- (x_2 - x_3)\,(y_2 + y_3) \\ &- (x_3 - x_4)\,(y_3 + y_4) \end{aligned}$$

que haciendo las multiplicaciones y reduciendo, puede escribirse así:

$$2s = x_1\,(y_5 - y_2) + x_2\,(y_1 - y_3) + x_3\,(y_2 - y_4) + x_4\,(y_3 - y_5) + x_5\,(y_4 - y_1) \dots\dots (1)$$

Este resultado suministra la regla siguiente. *La doble superficie de un polígono es igual á la suma algebraica de los productos que resultan de multiplicar la absisa de cada vértice por la ordenada del vértice que le precede ménos la del que le sigue.*

La fórmula anterior puede escribirse tambien de esta otra manera:

$$2s = y_1 (x_2 - x_5) + y_2 (x_3 - x_1) + y_3 (x_4 - x_2) + y_4 (x_5 - x_3) + y_5 (x_1 - x_4) \ldots\ldots (2)$$

que equivale á una regla análoga, á saber: *La doble superficie de un polígono es igual á la suma algebraica de los productos que se obtienen multiplicando la ordenada de cada vértice por la absisa del punto que le sigue, ménos la del que le precede.*

Al aplicar cualquiera de las dos fórmulas es preciso no solo atender á los signos de las coordenadas, sino observar estrictamente las reglas del álgebra sobre los signos al hacer las sustracciones y las multiplicaciones para asignar á cada producto el que le corresponda. La superficie que se obtiene resulta con el signo positivo ó con el negativo, segun el órden en que se hayan numerado los vértices, pues es evidente que al hacerlo puede suponerse que se recorre el perímetro teniendo el polígono siempre á la izquierda, como en la figura, ó bien en sentido contrario, quiere decir, conservando constantemente el polígono á la derecha.

118º Aunque las reglas precedentes nada dejan que desear bajo el aspecto de la sencillez, puede darse otra forma á las ecuaciones (1) y (2), ó por mejor decir, á la expresion general de que ambas se derivan. Nótese para esto que si en la figura 61ª se recorre el perímetro dejando siempre á la izquierda el polígono, al pasar de D á E y á A las absisas van aumentando, y por el contrario van disminuyendo si se pasa de A á D por B y C. Los trapecios pertenecientes á los dos primeros lados son los aditivos al hallar la superficie, y los que corresponden á los tres últimos AB, BC y CD son los sustractivos. En consecuencia, si numeramos siempre los vértices en el órden en que van presentándose cuando se recorre el contorno conservando el polígono á la izquierda, podrá expresarse la superficie en funcion de las diferencias de absisas, de tal manera que siempre resulte positiva, y que la superficie de cada trapecio elemental se obtenga con el signo que le corresponde en la combinacion. Escribamos para esto la fórmula como sigue:

$$\begin{aligned} 2s = (y_1 + y_2)(x_2 - x_1) + (y_2 + y_3)(x_3 - x_2) + (y_3 + y_4)(x_4 - x_3) \\ + (y_4 + y_5)(x_5 - x_4) \\ + (y_5 + y_1)(x_1 - x_5) \end{aligned}$$

En cada producto parcial figuran la suma de las ordenadas que pertenecen á los extremos de cada lado del polígono, y la diferencia de las absisas correspondientes á los mismos puntos, restando siempre cada absisa de la que le sigue en el sentido de la marcha sistemática que he supuesto al derredor del polígono. De este modo cuando se camina del Este al Oeste van aumentando las absisas, y aquellas diferencias son positivas; por el contrario, caminando del Oeste al Este las absisas disminuyen, y por consiguiente las diferencias resultan negativas. Esto se nota perfectamente en la figura 62ª que tiene numerados sus vértices, y en la que se ve que entre las estaciones 4 y 5, así como entre las 6 y 1, y 1 y 2 los trapecios deben ser sustractivos.

La semisuma de las ordenadas de los extremos de una linea, es evidentemente igual á la ordenada de la mitad de la linea y podriamos designarla con el nombre de *ordenada media*. Segun esto, si se divide por 2 la fórmula precedente se tendrá un resultado que puede reducirse á esta regla: *La superficie de un polígono es igual á la suma algebraica de los productos que se obtienen multiplicando la ordenada media de cada lado por la diferencia de absisas de sus extremos, restando siempre cada una de la que le sigue.*

Una regla muy semejante á la anterior puede derivarse de la consideracion de que caminando del Sur hácia el Norte, las ordenadas van creciendo, y si se camina en sentido contrario, van decreciendo. Por consiguiente, si cada ordenada se resta de la que le precede, se obtendrán diferencias negativas en el primer caso, y positivas en el segundo; y como las figuras 61ª y 62ª indican que esos signos serian los mismos que los de los trapecios formados por las absisas correspondientes á los extremos de cada lado, si designamos por *absisa media* la semisuma de estas, podrémos establecer esta otra regla. *La superficie de un polígono es igual á la suma algebraica de los productos que resultan de multiplicar la absisa media de cada lado por la diferencia de ordenadas de sus extremos, restando siempre cada una de la que le precede.* Esta regla podria tambien obtenerse por la fórmula general de la página anterior, haciendo las multiplicaciones, y sacando la suma de las absisas, como factor, en cada producto parcial.

Cualquiera de las reglas establecidas se aplica fácilmente sin necesidad de construir previamente la figura ó plano del polígono, con tal que se hayan numerado los vértices por su órden progresivo. Apliquemos, por ejemplo, la penúltima regla á los datos siguientes:

VÉRTICES.	x	y
1..........	0ᵐ0...........	0ᵐ0
2..........	+ 14957. 4...........	— 3344. 0
3..........	+ 17133. 6...........	— 8195. 9
4..........	+ 7576. 1...........	— 6646. 9
5..........	+ 1934. 7...........	— 11836. 7
6..........	— 8854. 3...........	— 7270. 8

Es conveniente disponer el cálculo en forma de tabla separando los productos positivos de los negativos, de este modo:

$\frac{1}{2}(y_n + y_{n+1})$	$x_{n+1} - x_n$	PRODUCTOS POSITIVOS.	PRODUCTOS NEGATIVOS
— 1672.0	+ 14957.4		25, 008773
— 5770.0	+ 2176.2		12, 556674
— 7421.4	— 9557.5	70, 930030	
— 9241.8	— 5641.4	52, 136690	
— 9553.7	— 10789.0	103, 074869	
— 3635.4	+ 8854.3		32, 188922
		+ 226, 141589	69, 754369
		— 69, 754369	
	Superficie del polígono =	+ 156, 387220	

La superficie ha resultado positiva porque la numeracion de los vértices se hizo recorriendo el perímetro con el polígono á la izquierda como se dijo al principio.

Por regla general, siempre es preciso hacer tantas multiplicaciones como ángulos tiene el polígono; pero si en este caso particular hubiéramos aplicado alguna de las primeras reglas ó fórmulas (1) y (2), se habria evitado una multiplicacion á causa de que el orígen estando en uno de los vértices, tiene este nulas sus coordenadas.

119º El polígono cuya superficie hemos calculado es el que representan las figuras 46ª y 53ª Antes la habiamos ya determinado por medio de sus triángulos componentes, y se notará una diferencia de 626 metros cuadrados entre los dos resultados. Aunque no sea este el lugar oportuno para entrar en consideraciones respecto del grado de exactitud con que es posible obtener una superficie, como es probable que el lector, poco habituado aún á esta clase de cálculos, se sorprenda de hallar tal diferencia en la aplicacion de dos métodos que deben considerarse como los mejores, conviene advertirle desde ahora que solo accidentalmente puede esperarse una concordancia perfecta al determinar una superficie por procedimientos diversos, en atencion á que los factores de que se deriva son siempre cantidades cuya aproximacion se lleva hasta cierto límite solamente, y que muchas veces basta tomar una decimal mas ó ménos para hallar resultados muy distintos, y cuyas diferencias crecen necesariamente con las superficies á causa de la generacion de estas. Hay ademas otro motivo de discordancia: en la primera determinacion hicimos uso del cálculo logarítmico, y debe tenerse presente que por medio de los logaritmos no se pueden obtener con toda exactitud números muy grandes, al ménos si aquellos tienen solo siete cifras decimales. En general puede decirse que los logaritmos solo dán con precision los números compuestos de tantos guarismos como cifras decimales tienen, de modo que para calcular superficies muy considerables, me parece preferible prescindir del cálculo logarítmico siempre que se pueda disponer de otros medios. Por otra parte, en el caso actual, la diferencia de 626 metros cuadrados, ó sea la superficie de un pequeño cuadrado cuyos lados son de 25^{m}, puede reputarse como absolutamente nula respecto de la del polígono, que tiene muy cerca de nueve leguas cuadradas.

CAPITULO XI.

PRINCIPIOS GENERALES ACERCA DE LOS MÉTODOS QUE SE APLICAN EN LA PLANOMETRIA PARCIAL.

120º Habiendo terminado ya la exposicion de las reglas referentes á las operaciones de la planometría general, pasemos á ocuparnos de los procedimientos que tienen por objeto determinar la situacion de todos los puntos del terreno que deban figurar en el plano.

El curso de los rios, las inflexiones de los caminos, los límites y divisiones naturales ó artificiales de las tierras, &c., forman polígonos irregulares, ó lineas mas ó ménos sinuosas cuyos elementos es necesario conocer para fijar su posicion respecto de los vértices trigonométricos; y aunque dije al principio que tratándose de extensiones de terreno muy cortas, no eran absolutamente indispeusables las triangulaciones, para considerar aquí el caso mas general, supondré que se han establecido puntos trigonométricos bastante cercanos unos de otros para que puedan servir de base y comprobacion á las demas operaciones del levantamiento.

Sea *A B* (fig. 63ª), un lado de la triangulcion, ó con mas generalidad, una linea enlazada con ella, y á la cual se quieren referir los puntos *C*, *D*, *E*, *F*, &c., perteneciente á una linea poligonal. La posicion de cualquiera de estos puntos, de *C* por ejemplo, puede determinarse de varios modos:

1º Supongamos trazada la linea *A B* llamada *directriz*, y bajemos de los puntos *C*, *D*, *E*, &c., las perpendiculares *C c*, *D d*, *E e*, &c. Si se miden las distancias *A c* y *C c*, *A d* y *D d*, *A e* y *E e*, &c., ó lo que es lo mismo, la absisa y la ordenada de cada punto respecto de *A B* como eje y de *A* como orígen, podrán situarse en el plano con arreglo á la escala que se haya adoptado.

2º Midiendo en *A* el ángulo *C A B* que forma el primer punto de la linea poligonal, con la base ó directriz *A B*, y tambien la distancia *A C*, se tendrán los datos necesarios para fijar la posicion de *C*. De la misma manera podrian determinarse todos los otros puntos; pero por lo comun, una vez situado el primero, es preferible trasladarse á él para tomar el ángulo *A C D* y medir la distancia *C D*; en seguida á *D* para medir el ángulo *C D E* y la linea *D E*; y proseguir así hasta el fin.

3º Se podrian situar igualmente los puntos de la linea quebrada *C D E F*...... si desde *A* y *B* se toman los ángulos *C A B* y *C B A*, *D A B* y *D B A*, &c., que forma cada uno de ellos con la directriz.

121º Estos tres métodos que se aplican en la planometría parcial, se llaman: el primero, de *coordenadas rectangulares*; el segundo de *rumbos y distancias*, aunque acaso deberia denominarse con mas propiedad de *coordenadas polares*, por ser un ángulo y una linea los elementos que sirven para fijar la posicion de cada punto; el tercero se llama método de *intersecciones*.

La eleccion de uno ú otro de estos procedimientos muchas veces no es arbitraria, sino que depende en gran parte de las circunstancias especiales de cada caso. Así, por ejemplo, el método de coordenadas rectangulares seria preferible cuando la linea poligonal fuese muy sinuosa ó compuesta de muchos lados pequeños, y que se pudiese elegir la directriz bastante próxima á ella, á fin de que no fuesen muy grandes las perpendiculares que hay necesidad de medir. Si por el contrario, la linea poligonal constase de pocos elementos, y cada uno de cierta extension, deberia preferirse el método de coordenadas polares, al ménos si todos sus vértices eran cómodamente accesibles. En terrenos húmedos, pantanosos, ó por cualquiera otra causa, de difícil acceso, el método de intersecciones es casi el único que puede aplicarse.

Si se consideran los tres procedimientos bajo el aspeto de su facilidad relativa de ejecucion, la comparacion resulta evidentemente en favor del de intersecciones, en atencion á que hay necesidad de medir muchas ménos lineas que en cualquiera de los otros, y de consiguiente su aplicacion es ménos laboriosa y mas rápida. Viene en seguida el de coordenadas polares, y por último el de coordenadas rectangulares, el cual á causa del gran número de medidas lineales que demanda, casi no se emplea mas que para el levantamiento de polígonos pequeños y poco sinuosos, tales como el que representa la figura 64ª En ella se ha supuesto que la directriz es la diagonal del polígono trazado entre los puntos A y B mas distantes, y que de todos los otros se han bajado perpendiculares á su direccion.

Bajo el punto de vista de la exactitud relativa que pueda proporcionar cada uno de los tres métodos, me parece que, en general, debe considerarse que el de coordenadas rectangulares es el mas desventajoso, porque en la práctica del levantamiento de los detalles nunca es posible hacer la medida de las lineas con la misma precision que si se tratara de la base de una cadena trigonométrica. Respecto de los otros dos métodos, su bondad relativa depende en gran parte de los instrumentos con que se opera, y de las circunstancias especiales de cada caso. El de intersecciones presenta sobre el de coordenadas polares, la ventaja de que las posiciones de los puntos dependen de un corto número de lineas directrices que generalmente se escogen en buenas condiciones procurando que queden bien enlazadas entre sí; y en todo rigor debe considerarse que este método no es mas que una triangulacion en la cual se suprime la observacion del tercer ángulo de cada triángulo. Ademas de esto, la posicion de cada punto se obtiene independientemente de las de los demas; de suerte que aun existiendo un error en alguna de ellas, no hay que temer su propagacion en el resto del contorno poligonal. No sucede así en el método de coordenadas polares, puesto que cada punto situado, sirve á su vez de polo para situar el que sigue, y por consecuencia el error que exista en uno solo, influye en todos los demas. Sin embargo, en este procedimiento se tienen medios inmediatos de comprobacion, ya sea que se levante el plano de una linea sinuosa comprendida entre dos puntos cuya posicion sea bien conocida, ya sea que se aplique al levantamiento de un polígono cerrado, porque en el primer caso, la última linea medida ó el último punto situado deben coincidir con aquel cuya posicion se conoce, ó con el punto de partida si se trata del segundo caso. En el método de intersecciones la gran dificultad consiste en conseguir que las visuales que determinan la posicion de cada punto no se corten muy oblicuamente, que es la condicion esencial para la bondad del resultado. (*Vease el núm. 40.*)

De todo lo expuesto puede deducirse que ambos métodos presentan ventajas é inconvenientes; pero teniendo un buen instrumento angular, el de intersecciones parece preferible al de coordenadas polares, sobre todo si se logra que las visuales dirigidas desde los extremos de las directrices no se corten en ángulos muy agudos, y si ademas se procura que los puntos no queden situados por ménos de tres visuales, con el fin de tener comprobacion en cada uno.

122º La dificultad de medir con toda precision las lineas de la planometría parcial, proviene principalmente de los obstáculos locales inevitables. Se recordará, en efecto, que como lo que trata de determinarse es la proyeccion del terreno, y muy pocas veces es posible hallar extensiones horizontales suficientemente grandes para medir las directrices, y mucho ménos los lados mismos del polígono, resulta que es de todo punto indispensable hacer las reducciones al horizonte, bien sea conociendo los ángulos de inclinacion del terreno, ó bien llevando la cadena horizontal durante la medida. El primer procedimiento es solo apreciable en aquellos casos en que el declive es sensiblemente uniforme, y entónces se emplea el método enseñado en la página 16; pero por lo comun las ondulaciones del terreno son muy variadas, y seria casi imposible proceder de esa manera. Lo que se hace generalmente es mantener la cadena horizontal, estimando su horizontalidad á la simple vista. Si se practica la medida descendiendo por una linea inclinada, la persona que va adelante levanta la cadena, sirviéndose, si es preciso, de un jalon que le sirva de apoyo, y la que va atras coloca el extremo que tiene, en el punto en que ha terminado la primera. Si por el contrario, se mide ascendiendo, la persona que va detras es la que levanta el decámetro, cuidando siempre de colocar su extremidad en la vertical del punto en que terminó la persona que va adelante. Cuando la pendiente del terreno es muy fuerte, esta manera de medir es sumamente molesta, y debe procurarse usar una cadena de una longitud muy corta y que pese poco, como sucede con los resortes de acero, con el objeto de evitar hasta donde es posible la catenaria, que disminuyendo notablemente el tamaño de la cadena, es un nuevo manantial de error.

Si á las dificultades enunciadas se agrega otro género de obstáculos como son la interposicion de malezas, rocas, &c., que entorpecen mas ó ménos la marcha de los operadores, y que se oponen muchas veces á que la cadena se conserve bien en linea recta, se comprenderá sin esfuerzo alguno que es imposible esperar en esta clase de operaciones el mismo grado de exactitud que en las trigonométricas, cuyos resultados todos dependen de la medida de una sola linea, y de observaciones angulares que pueden hacerse siempre con la mayor precision. De aquí proviene que, por regla general, siempre que el ingeniero tenga la libertad de elegir sus medios de accion, debe decidirse por aquellos procedimientos que demanden ménos medidas de lineas, aunque sea á costa de mayor número de medidas angulares.

En otra ocasion daré á conocer un instrumento llamado *telémetro* ó *estadia*, que tambien sirve para medir distancias y que remplaza ventajosamente á la cadena métrica, sobre todo cuando los terrenos son muy accidentados.

123º Habiendo dado ya una ligera idea de los tres métodos generales que se aplican en las operaciones secundarias de la planometría, agreguemos que las mas veces no se emplea uno solo de esos procedimientos, sino que se combinan todos ellos segun las circunstancias. Así, por ejemplo, para levantar el plano de un polígono tal como el que representa la figura 65ª, puede formarse el triángulo $A\,B\,C$, y sobre sus lados como directrices, aplicar á cada parte del contorno el método que se juzgue mas á propósito. En la figura se ha supuesto que la parte $C\,D\,E\,F\,B$ se ha levantado por coordenadas rectangulares; la parte $A\,G$........ $K\,B$ por coordenadas polares; y finalmente el resto por intersecciones.

Se comprenderá desde luego que no es indispensable que las directrices sean lados trigonométricos, ni mucho ménos que se apoyen precisamente en los lados del polígono: basta solo que sean lineas enlazadas entre sí, y con la triangulacion si la hubiere, y establecidas de manera que se presten con facilidad al uso á que se les destina, segun el método de levantamiento que haya de aplicarse. En general, como se ha dicho ántes, una directriz que debe servir de eje para las coordenadas rectangulares, se elegirá lo mas inmediato que sea posible á los lados del polígono, ya sea en su interior ó en su exterior; miéntras que si su objeto es servir de base para las intersecciones, se atenderá preferentemente á que las visuales que determinan cada punto resulten con las condiciones favorables que se han prescrito. En los polígonos de lados numerosos y muy pequeños, ó en los terminados por lineas curvas, se establece por lo comun una serie de directrices que formen otro polígono auxiliar mas regular inscrito ó circunscrito al primero, y despues de enlazados sus vértices por el método de intersecciones ó por el de coordenadas polares, se recorren los lados levantando y midiendo las ordenadas que fijan las sinuosidades ó las principales inflexiones del polígono primitivo.

Acaso los métodos que se combinan con mas frecuencia son los de coordenadas polares y rectangulares. Para levantar el plano de un camino ó de un rio (fig. 66ª), se hace esta combinacion estableciendo alineamientos rectilineos por el eje del primero, ó por las orillas del segundo; y despues de medidos y ligados entre sí por el procedimiento de coordenadas polares, se emplean como ejes de absisas, para configurar las pequeñas inflexiones de la vía ó del curso de agua en su caso. La misma combinacion se adopta para levantar planos de poblaciones: las directrices se establecen á lo largo de las calles (fig. 67ª) procurando que formen polígonos cerrados á fin de obtener comprobaciones, y en seguida se bajan perpendiculares á sus lados desde las esquinas de las manzanas, desde las sinuosidades de las aceras, &c., las que una vez medidas, permiten la construccion del plano.

Siempre que se haga uso de directrices para levantar el plano de un polígono cualquiera, deben trazarse en el terreno por el método de la pág. 8ª cuando su longitud sea tal que pueda originarse algun error de importancia al ejecutar la medida sin el trazo previo; pero si no exceden de 300 ó 400 metros, no hay inconveniente en señalar con banderas únicamente sus extremos, y al hacer la medida, estas sirven de puntos de mira para no salirse del alineamiento. De las dos personas que llevan la cadena, la de atras, guiándose por la bandera, va indicando á la de adelante la direccion en que debe colocar sus fichas.

Al tomar las dimensiones de todos los detalles, para no hacer medidas inútiles, es prciso que tenga presente el ingeniero que ciertos objetos no pueden figurar en el plano, sobre todo cuando la escala de este ha de ser pequeña. En efecto, suponiendo siempre que 0^m0001 sea el límite de la extension apreciable á la simple vista, resulta que con la escala $\frac{1}{r}$ no podrán estimarse cantidades inferiores á $0.0001\, r$. Si r, por ejemplo, es igual á 40000, las inflexiones de los linderos, las ordenadas, ó cualesquiera otros objetos de ménos de 4^m, no podrán apreciarse en el plano, y en consecuencia será inútil medirlos. Sin embargo, se exceptúan de la regla general ciertos detalles que por su importancia no deben suprimirse aunque se alteren un poco sus dimensiones, como son los caminos que se indican por medio de dos lineas paralelas distantes una de otra cosa de medio milímetro por lo ménos; los rios cuyo curso se configura con una linea mas ó ménos gruesa; los edificios notables que se indican aunque sea con un punto, &c. Es claro, por supuesto, que cuando la escala lo permita, todos los objetos deben sujetarse en el plano á sus dimensiones relativas.

124º Al principio de este libro se dijo que aun cuando el terreno cuyo plano se trataba de levantar no tuviese mucha extension, era conveniente comenzar por la medida de algunos triángulos para tener puntos de rectificacion y tambien para facilitar las operaciones posteriores. Probablemente el lector impuesto ya de todo lo relativo á las triangulaciones, habrá comprendido la utilidad de aquella prescripcion; pero hay casos en que las triangulaciones regulares son realmente impracticables. En los terrenos llanos muy abundantes en vegetacion, y aun en los montañosos cubiertos de bosques, sucede á veces que la vista queda obstruida por todas partes; y seria necesario emprender grandes desmontes para procurarse un horizonte despejado en las direcciones indispensables para la formacion de triángulos de buena forma. Si toda la dificultad consistiese únicamente en la configuracion, no deberia vacilar el ingeniero en hacer la triangulacion, pues aunque sus triángulos resultasen con ángulos muy agudos ó muy obtusos, siempre obtendria las posiciones de algunos puntos por un procedimiento que aun en malas circunstancias debe reputarse superior á cualquiera de los de la planometría parcial en que intervienen muchas medidas de lineas. Pero suele suceder que los obstáculos son de tal naturaleza, que sin emprender grandes gastos y sin destruir la vegetacion, no es posible triangular el terreno, y entónces no queda mas recurso que aprovechar las direcciones que presenten ménos dificultades para formar una red ó un canevá poligonal como el que representa la figura 68ª Se miden todos los lados y todos los ángulos de los polígonos elementales, los cuales se enlazan entre sí hasta donde se pueda, con el fin de procurarse medios de comprobacion. Por ejemplo, si partiendo de A, se han medido las lineas AB, BC, CD y DE, se tendrán los puntos D y E que son comunes á otros polígonos, y cuyas posiciones al construir el plano, deben coincidir con las que se obtengan por las lineas BF, FG, GH, HI, ID y por IJ, JE. Cuando se ha conseguido un enlace tan íntimo como sea posible, estas lineas poligonales hacen las veces de los lados trigonométricos, quiere decir, sirven ya sea inmediatamente de directrices, ó ya como apoyos de estas para configurar los detalles que haya en el interior de cada uno de esos grandes polígonos. Algunos geómetras aseguran que por medio del sistema poligonal se logran resultados comparables en exactitud con los que se obtienen por los procedimientos trigonométricos. Estos últimos son sin duda mas sencillos; pero aquel es acaso el único aplicable en las circunstancias que se han mencionado, y que se presentan con frecuencia en nuestras costas cubiertas siempre de una exhuberante vegetacion.

125º Las ideas generales que he procurado desarrollar acerca de los métodos que se emplean en el levantamiento de planos de corta extension, bastan para concebir que una cadena métrica y un teodolito son los instrumentos que pueden usarse en todos casos; pero entre los angulares, que se designan con el nombre genérico de *goniómetros*, hay otros muchos instrumentos que aunque inferiores al teodolito, se usan frecuentemente por ser mas portátiles, y porque suministran el grado de exactitud suficiente en la mayor parte de las operaciones secundarias. En los Capítulos siguientes me propongo dar á conocer los principales goniómetros, y como el lector está ya familiarizado con el mas perfecto de ellos que es el teodolito, no creo necesario entrar en muchos detalles. Sin embargo, para sistematizar todo lo concerniente á los demas, al ocuparme de cada uno describiré brevemente su construccion, sus rectificaciones, la manera de usarlo, y por último, el modo de hacer la planografía ó la representacion gráfica de las operaciones á que se aplique, procurando evitar repeticiones inútiles hasta donde sea posible.

CAPITULO XII.

DE LA ESCUADRA.

126º El mas sencillo de todos los goniómetros, y tambien el de uso mas limitado es el que se designa con el nombre de *escuadra de agrimensor*, ó simplemente de *escuadra*. Consiste en un cilindro ó en un prisma octagonal de 0^m10 á 0^m15 de altura, y 0^m08 ó 0^m10 de diámetro, provisto de otro cilindro hueco *E* (fig. 69ª), que sirve para fijarlo en una estaca ó en un tripié *F*. A lo largo de las generatrices del cilindro principal tiene *pínulas* que son unas aberturas largas y estrechas que sirven para dirigir las visuales. Cada pínula se compone de dos aberturas diametralmente opuestas: aquella *A B* en que se aplica la vista es mas angosta que su correspondiente, y esta última tal como *C D* un poco mas ancha, tiene un hilo, un cabello ó una cerda que es la que determina la visual en un plano que pasa por el eje del cilindro. Las mejores escuadras tienen cuatro pínulas que forman ángulos de 45°, y las comunes tienen solamente dos, perpendiculares entre sí.

Para comprobar el instrumento se le coloca en *D* (fig. 70ª) sobre una línea *A B*, y despues de hacerlo girar de manera que una de sus pínulas coincida con la recta *A B*, cortando con el hilo la señal *B*, se dirige una visual por la otra pínula, y se establece en esa direccion otra señal *C*. En seguida se hace girar la escuadra de tal modo que la pínula dirigida á *B* pase á *C*, y si en esta nueva posicion la otra visual pasa tambien por *A B*, se tendrá la prueba de que ambas pínulas se cortan en ángulo recto. En el caso contrario debe desecharse la escuadra puesto que no tiene medios para hacerle la correccion que necesita.

Como la escuadra se aplica especialmente al levantamiento de planos pequeños siguiendo el método de coordenadas rectangulares, indicarémos el modo de trazar con ella, desde un punto dado, una perpendicular á una directriz.

Sea *C* (fig. 71ª), el punto y *A B* la directriz. Se colocará la escuadra en *d* sobre la recta y cerca del punto en que se juzga que debe caer la perpendicular. En seguida se hace coincidir una de las pínulas con la recta *A B*, y por la otra que le es perpendicular, se dirige una visual sobre la que se fija un punto *c*, y como suponemos haberse situado el instrumento muy cerca del pié de la perpendicular, puede apreciarse fácilmente, sea á la simple vista, sea midiéndola, la pequeña distancia *C c* que es necesario mover la escuadra para situarla en *D*. De este modo despues de dos ó tres tanteos se logra la coincidencia de las pínulas rectangulares con *C* y con *A B* á la vez, y teniendo así el punto *D*, se traza la perpendicular.

Si por el contrario, se desea levantar una perpendicular desde un punto dado en la recta, se procede como hemos visto al hablar de la rectificacion de la escuadra. De una manera análoga se forman ángulos de 45° ó de 135° cuando la escuadra tiene cuatro pínulas.

127º Para levantar con este instrumento y la cadena el plano de un polígono *A B C......... P A* (fig. 72ª) el procedimiento general consiste en inscribirle ó circunscribirle otro polígono auxiliar, cuyos ángulos sean de 45°, de 90° ó de 135°, y cuyos lados tengan la mayor longitud posible aunque acercándose al perímetro del primero; y en recorrer despues estos lados levantando y midiendo las ordenadas que fijan los vértices, así como las absisas, y teniendo cuidado de anotar los puntos en que los lados del polígono auxiliar corten á los del otro. La figura indica estas operaciones con suficiente claridad para que creamos excusado entrar en mas pormenores, y solo añadirémos que cuando en el interior del polígono haya algunos objetos que deban figurar en el plano, tales como edificios, caminos, &c., se establecen nuevas lineas enlazadas con puntos ya fijados, las cuales se toman tambien por directrices ó ejes de coordenadas.

Si algunos vértices distan poco de los lados del polígono auxiliar, puede evitarse muchas veces el uso de la escuadra procediendo así. En la figura 73ª A es uno de los vértices y $B\ C$ una parte de la directriz. Al ir midiendo esta última, se deja el decámetro tendido en la direccion de su longitud, y se fija en A el extremo de otra cadena ó de una cinta comun dividida, la cual se lleva hácia $B\ C$, observando en qué puntos F y E del decámetro queda comprendida la distancia $A\ F = A\ E$ de la cinta. Se divide $E\ F$ en dos partes iguales y se tendrá inmediatamente el pié D de la ordenada $A\ D$. Este método, que dá la exactitud necesaria en los casos comunes, permite trabajar con mas rapidez.

Aunque la medida de las ordenadas debe hacerse al mismo tiempo que se miden los lados del polígono auxiliar, es conveniente no interrumpir esta última operacion al pié de cada perpendicular; porque es un hecho constante que si se mide una linea cualquiera de una sola vez, y en seguida se divide en varias partes que se miden por separado ó independientemente unas de otras, los dos resultados no concordarán casi nunca, dando una discordancia superior á la que producirian dos medidas generales de la misma linea. Esto se explica por la estimacion de las fracciones de metro en cada parte de la linea, y tambien por no comenzar acaso cada medida parcial exactamente en el mismo punto en que termina la anterior. Así, pues, para evitar este motivo de error es preferible medir las ordenadas dejando el decámetro tendido á lo largo de la directriz y anotando en él los puntos en que caen los extremos de las perpendiculares.

Para terminar lo relativo á este método de levantar planos de polígonos, añadiré que cuando estos forman parte de una operacion general apoyada en triangulaciones, se debe referir algun punto del perímetro á un vértice trigonométrico por lo ménos, valiéndose de cualquiera de los tres procedimientos que se aplican en la planometría parcial. Por lo comun se adopta el de coordenadas polares cuando la estacion trigonométrica no dista mucho del polígono, estableciendo entre uno de sus puntos y el trigonométrico una ó mas lineas que se miden, así como los ángulos que forman entre sí, y el que la primera forma con un lado de la triangulacion. Si los vértices de esta se encuentran á alguna distancia, es mejor situar desde dos de ellos por intersecciones un punto del polígono, ó bien otro cualquiera inmediato que sea fácil enlazar despues con las directrices. Es claro que siendo visibles desde algun punto del polígono tres ó mas vértices trigonométricos, puede hacerse la referencia aplicando las resoluciones propias á este caso y que constan en los Capítulos precedentes.

128º El apunte ó registro de las operaciones debe contener las directrices medidas con los ángulos que forman entre sí, las ordenadas con el signo que les convenga, para lo cual puede establecerse por regla que sean positivas las que queden á la derecha de la directriz en el sentido de la marcha que se sigue al medirla, y negativas las levantadas hácia la izquierda. Para recordar la direccion en que se recorren las directrices, convendrá tambien indicarla en el registro por medio del órden en que se escriban las letras que designan cada linea; por ejemplo, $A\,B$ expresará una directriz recorrida de A hácia B, miéntras que $B\,A$ indicará una marcha inversa. En la columna de las «Notas» se harán todas aquellas aclaraciones que se estimen útiles para evitar todo motivo de duda ó de confusion, explicando tambien la clase de los terrenos, la forma y dimensiones de los edificios, rios, caminos, puentes, &c. Por lo comun, sea cual fuere el método de levantamiento que se siga, en el libro destinado al registro se hacen los apuntes en las páginas de la izquierda, y en las de la derecha se va formando á la vista un cróquis como el que representa la figura 72ª en el que se dibujan, con la aproximacion que se pueda, todos aquellos objetos que si bien no son de tal importancia que merezcan configurarse geométricamente, se quiere, sin embargo, que aparezcan en el plano para dar una idea mas perfecta del terreno. Presentaré como modelo una parte del registro correspondiente al cróquis de la figura 74ª

POLIGONO $M N O$......... LEVANTADO CON ESCUADRA.

Angulos de las directrices.	Directrices y absisas.	Ordenadas positivas	Ordenadas negativas.	NOTAS.
$A = 135°$	$A\,a = 30^m27$ $A\,m = 65.42$ $A\,n = 203.31$ .... $A\,B = 858.90$	 $m\,M = 72^m51$	 $n\,N = 29^m47$	El punto a está á la orilla del camino que tiene 15^m de ancho. El punto B queda sobre el lado $O\,P$ del polígono.
$B = 135°$	$B\,p =$ $B\,C = 402.13$	$p\,P =$		C es vértice del polígono.
$C = 135°$	$C\,q = 154.25$ $C\,D = 334.73$	$q\,Q =$		....
$D = 90°$	$D\,r = 195.32$ $D\,s = 407.73$ $D\,E = 746.21$	$r\,R = 29.13$	 $s\,S = 32.49$	
$E = 225°$	.... $E\,F = 287.08$	....	....	
$F = 90°$	.... $F\,G = 717.19$	....	....	
$G = 90°$	.... $G\,A = 445.30$	....	....	
	$A\,b = 78.67$ $A\,c = 186.52$	$b\,B' = 17.84$ $c\,C' = 72.25$		$A\,F$ es una directriz auxiliar para la casa y las inflexiones del camino.

129º Para construir el plano se procede de una manera análoga á la operacion misma del terreno, haciendo el doble–decímetro las veces del decámetro, y el trasportador ó mejor la tabla de cuerdas, las de la escuadra. Antes de proceder á la planografía debe comprobarse la medida de las lineas, para lo cual se atenderá á que sea cual fuere la forma con que haya resultado el polígono auxiliar formado por las directrices, siempre es posible reducirlo á un rectángulo, suponiendo algunas de ellas prolongadas. Así en la figura 74ª si se prolonga $A\,B$ á uno y otro lado, y por G se le baja una perpendicular: si por F se traza una paralela á $A\,B$ hasta encontrar la prolongacion de $C\,D$, se tendrá el rectángulo $M'\,N'\,O'\,P'$ cuyos lados pueden calcularse por medio de los del polígono auxiliar. Se tiene, en efecto, que como de las prolongaciones resultan triángulos isóceles–rectángulos tal como $A\ G\ M'$, si se designa por a la hipotenusa, que se conoce por ser directriz, y por z uno de los lados, se tendrá siempre la relacion $a^2 = 2\,z^2$, ó bien:

$$z = \frac{a}{\sqrt{2}} = 0.70711\ a$$

z = m a   m = 0.70711

De este modo, las directrices por una parte, y por otra el cálculo de las prolongaciones darán los lados de la figura rectangular que resulta, y en la cual debe verificarse la igualdad de los lados opuestos como una prueba de que no ha habido error en las medidas. Casi nunca se obtienen resultados enteramente iguales; pero esta comprobacion dá á conocer si la discordancia es bastante pequeña para que se la pueda considerar comprendida dentro de los límites de los errores tolerables, y del todo inevitables en esta clase de operaciones, ó bien si es necesario rectificar la medida. En nuestro caso, representando por m el factor 0.70711, se tiene:

$A\ B =$	$858^{\text{m}}90$	$D\ E =$	$746^{\text{m}}21$	
$m \times B\ C =$	284. 35	$m \times E\ F =$	202. 94	
$m \times G\ A =$	314. 88	$m \times F\ G =$	507. 38	
$M'\ N' =$	$1458^{\text{m}}13$	$O'\ P' =$	$1456^{\text{m}}53$	Diferencia $= 1^{\text{m}}60$

$C\ D =$	$334^{\text{m}}73$			
$m \times B\ C =$	284. 35	$m \times F\ G =$	$507^{\text{m}}38$	
$m \times E\ F =$	202. 94	$m \times G\ A =$	314. 88	
$N'\ O' =$	$822^{\text{m}}02$	$M'\ P' =$	$822^{\text{m}}26$	Diferencia $= 0^{\text{m}}24$

Estas diferencias, á causa de su pequeñez, se esplican muy bien por los errores inherentes á las operaciones comunes, en las cuales segun dijimos, nunca puede procederse con toda la escrupulosidad con que se miden las bases trigonométricas. La experiencia enseña que en las medidas hechas con el decámetro comun de eslabones aunque se practiquen con bastante cuidado y en muy buenas circunstancias, siempre puede cometerse un error de $\pm \frac{1}{5000}$ por lo ménos, de la longitud de las lineas, de suerte que dos medidas diferentes de la misma distancia pueden diferir entre sí hasta $\frac{2}{5000}$, ó sea 0.0004, sin que por eso deba decirse que son malas las operaciones. En las de la planometría parcial el error aumenta rápidamente con las dificultades del terreno, y hay casos en que indudablemente excede de 0.002, ó lo que es lo mismo, de 1 en 500 metros.

En el ejemplo actual las diferencias halladas desaparecerian enteramente aun cuando se construyese el plano en una escala muy grande, tal como la de $\frac{1}{5000}$; pero esto no obstante trazarémos la manera de distribuir el error. Las diferencias finales debe suponerse que provienen de la acumulacion de los pequeños errores que van cometiéndose en todos los lados; así es que si se tiene igual confianza en todas las medidas, lo mas razonable es repartir el error proporcionalmente entre las lineas, tomando por valor exacto el término medio de los dos resultados. Segun esto adoptarémos................ $M' N' = O' P' = 1457^m33$ y $N' O' = M' P' = 822^m14$.

Si ahora designamos por a la suma de las directrices que como $A B$ forman parte del lado del rectángulo, y por b la de las lineas como $A G$, que forman las hipotenusas, se tendrá que el lado del rectángulo obtenido, será:

$$l = a + m b \qquad m = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

Representando por L el término medio de los resultados, que suponemos ser el valor exacto del mismo lado, por x la correccion de a, y por y la de b, se tiene:

$$L = a + x + m(b + y)$$

de donde resulta:

$$L - l = x + m y$$

Como por otra parte se tiene: $l : L :: a : a + x$, se formará esta otra ecuacion:

$$a L = (a + x) l$$

que combinada con la anterior produce:

$$x = \frac{L - l}{l} a \qquad y = \frac{L - l}{l} b$$

$a : L :: a : a + x \qquad x = \frac{L-l}{l} a$

$l : L :: b : b + y \qquad y = \frac{L-l}{l} b$

En nuestro ejemplo y relativamente al lado $M' N' = l$, para corregir los lados $A B = a$ y $B C + A G = b$, se tiene:

$$L - l = -0^{m}80 \qquad \frac{L - l}{l} = -0.00055$$

$$x = -0.00055 \times 858.9 = -0^{m}47$$
$$y = -0.00055 \times 599.2 = -0.\ 33$$
$$\overline{-0^{m}80}$$

La suma de las correcciones dá precisamente la semidiferencia hallada. Es claro que y debe repartirse proporcionalmente entre $B C$ y $A G$. Los lados corregidos serán, pues:

$$A B = 858^{m}4$$
$$B C = 401.\ 9$$
&c. &c.

Cuando el error es algo considerable se deben corregir tambien proporcionalmente todas las absisas, puesto que la suma de ellas es la que forma la directriz. No creo necesario ocuparme de estos cálculos, que se ejecutan lo mismo que los precedentes.

Se ha supuesto aquí que las diferencias provienen solo de los lados, lo cual supone que sean exactos los ángulos formados con la escuadra. Esto no siempre se verifica, especialmente si las lineas son algo largas, pues las pínulas producen incertidumbre en las visuales, y por delgados que sean los hilos, su espesor ocupa á cierta distancia un espacio muy apreciable. Por eso me parece que si se tiene mas confianza en una parte de la operacion que en otra, fundadamente se deberá hacer sufrir á esta última una correccion algo mas fuerte, sobre todo si las discordancias no son muy considerables.

Ademas, en el método de correccion que se ha seguido, una linea tal como $B C$, que puede proyectarse sobre los dos lados contiguos del rectángulo, sufre en realidad dos correcciones, y en último resultado ya no se verifica exactamente la igualdad de los lados opuestos, porque alterándose ligeramente los ángulos formados con la escuadra, no puede admitirse ya que aquellas lineas son las hipotenusas de triángulos isóceles-rectángulos.

130º Ya que se han corregido todas las lineas del polígono auxiliar, se comienza por ellas la construccion. Supongamos que se haya adoptado la escala de $\frac{1}{10000}$: entónces el lado *A B* quedará representado por 0m0858, que se tomará con el doble-decímetro, y en los extremos se formarán ángulos de 135°, cuya cuerda es 1.8478 tomando la unidad por radio de la construccion, ó bien 0m3696 siendo el radio de 0m2. Se tomará *B C* = 0m0401, y se construirá en *C* otro ángulo de 135°, prosiguiendo lo mismo en el resto del polígono hasta terminar en *A*. Si todo se ha hecho con cuidado la figura *cerrará* bien, esto es: la linea que forma con *F G* un ángulo recto irá á dar precisamente á *A*, y será de 0m0445.

Debe tenerse presente que los ángulos que se inscriben en el registro son los *interiores* del polígono; de modo que aunque en el punto *E* se formó exteriormente uno de 135°, se ha apuntado 225° que es lo que al anterior le falta para 360°. Como siempre se forman en este método ángulos múltiplos de 45°, pondré á la vista las cuerdas correspondientes á un radio de 0m2. Suponemos que los ángulos se construyen menores que 180°, lo que siempre es posible. (*Vease el núm. 68º*)

ÁNGULOS.	CUERDAS.
45°............	0m1531
90	0. 2828
135	0. 3696

Luego que se han trazado las directrices se van tomando en ellas las absisas, levantando con una escuadra las ordenadas correspondientes, con arreglo á la escala y á los signos que indica el registro. De este modo se tienen los vértices del polígono, y todos los demas objetos que se han referido á las lineas auxiliares, las cuales se borran cuando se ha terminado el dibujo de lo restante con ayuda del cróquis.

131º Ademas de su aplicacion principal al levantamiento de planos, la escuadra se presta á la resolucion de algunos problemas sencillos que suelen presentarse en la práctica, como son los siguientes.

1º *Trazar una linea entre dos puntos A y B* (fig. 75ª) *invisibles uno de otro.* Se tirará la recta *A b* acercándose lo mas que sea posible á la direccion que se busca, para lo cual se manda hacer en *B* una señal cualquiera, como descargar una arma de fuego, &c., y se mide la distancia $A\,b$ así como $b\,B$ perpendicular á esta. Con estos datos se pueden situar cuantos puntos se quieran de la recta, elevando en algunos de $A\,b$ las perpendiculares $c\,C$, $d\,D$, &c., cuyos valores resultan de la semejanza de los triángulos, á saber:

$$c\,C = A\,c \times \frac{b\,B}{A\,b} \qquad d\,D = A\,d \times \frac{b\,B}{A\,b}$$

Tambien se tiene: tan. $B\,A\,b = \frac{b\,B}{A\,b}$, fórmula que una vez calculada permite trazar la linea definitiva $B\,A$ formando el ángulo $B\,A\,b$ con la provisional; pero este procedimiento demanda el uso de un goniómetro que se preste á la medida de ángulos pequeños.

Este mismo problema puede resolverse con ayuda de dos ó tres jalones solamente con tal que desde algunos puntos intermedios puedan verse los extremos de la linea. En efecto, situándose en un punto C (fig. 76ª), cerca del alineamiento, se manda colocar en D un jalon en coincidencia con la señal B. Es claro que si $C\,D$ fuese parte de la linea que se busca, trasladándose á D, el jalon C se veria coincidiendo con A. Como por lo comun no es así, lo que debe hacerse es quitar el jalon C, y mandarlo colocar en E sobre la direccion $D\,A$. Pasando despues á E, si el jalon D no cubre la señal de B, se le sitúa en F, y se prosigue así hasta encontrar dos puntos G y H, desde cada uno de los cuales se vea el otro en coincidencia con un extremo de la linea.

2º *Trazar por un punto C* (fig. 77ª) *una paralela ó una linea dada $A\,B$.* Desde el punto dado se bajará una perpendicular $C\,D$ á la linea, y en el extremo C se formará el ángulo recto $D\,C\,E$. Si la escuadra permite formar ángulos de 45°, puede buscarse en la linea dada un punto F desde el cual se descubran C y A bajo ese ángulo, y pasando en seguida á C se traza la linea $C\,E$ formando el mismo ángulo con $C\,F$.

Tambien con la cadena solamente se resuelve con facilidad este problema, pues basta trazar desde el punto dado C (fig. 78ª) una linea cualquiera $C\,D$, y por su medio O y otro punto cualquiera F de la recta trazar otra linea indefinida sobre la cual se toma......... $O\,G = O\,F$. Es claro que la linea $C\,G$ es la que se busca.

3º *Trazar una linea salvando un obstáculo C* (fig. 79ª) *que impide el alineamiento.* Para hallar la prolongacion de la recta $A\,B$, podria procederse como en el problema anterior trazando la paralela $F\,G$, y estableciendo en seguida el punto E donde se formaria con $E\,G$ un ángulo recto. Tambien puede formarse el ángulo........... $A\,B\,D = 135°$, y en D uno recto tomando despues $D\,E = B\,D$. No quedará mas que trazar $E\,H$ formando con $D\,E$ un ángulo de 135°. Otro método igualmente fácil consiste en situar otro punto J de la linea, para lo cual basta prolongar $B\,D$ hasta I, formar en este punto otro ángulo recto y medir $I\,J = B\,I$.

4º *Determinar una distancia A B* (fig. 80ª) *inaccesible.* En el punto B elévese una perpendicular á la visual dirigida á A; y sobre ella tómese una distancia cualquiera $B\,D$, que se divide en dos partes iguales en O. Desde el punto D trácese una perpendicular á la linea $B\,D$, y caminando en su direccion fíjese el punto E desde el cual se vea la señal O en coincidencia con A. La distancia $D\,E$ será igual á la que se busca.

Teniendo una escuadra que dé ángulos de 45º, puede resolverse el mismo problema de este otro modo: despues de trazada la perpendicular $B\,D$ recórrase hasta encontrar un punto C desde el cual se descubra con la escuadra el punto A bajo un ángulo $A\,C\,B = 45°$. Se tendrá entónces $B\,C = A\,B$.

La escuadra es un instrumento molesto en su manejo y poco exacto en sus resultados; así es que su uso se limita al levantamiento de planos de muy corta extension. Si me he detenido algo en todas estas operaciones, es solo porque siendo evidentemente practicables con instrumentos de mas precision, lo que se ha dicho aquí servirá de referencia en lo sucesivo y se evitarán repeticiones.

No cerraré este Capítulo sin hablar de un modo de levantar planos que no exige mas que el uso de la cadena, aunque solo es aplicable á polígonos pequeños y sencillos. Consiste en descomponer el polígono dado en triángulos por medio de lineas que parten ya sea de sus vértices ó bien de un punto cualquiera tomado en su interior; y en medir despues con la cadena los tres lados de cada triángulo. Es evidente, en efecto, que esos datos son bastantes para poder construir cada triángulo componente y por consecuencia el polígono mismo con arreglo á una escala. En el caso mas general, se tienen que medir todos los lados del polígono y ademas sus diagonales, por lo cual se comprende fácilmente que este procedimiento no debe usarse mas que para figuras de muy pocos lados, de corta extension y en terreno desprovisto de obstáculos.

CAPITULO XIII.

DEL GRAFOMETRO Y DEL PANTOMETRO.

132º Otro goniómetro que se aplica tambien á la medida de terrenos pequeños es el *grafómetro*. Comunmente consta de un semicírculo dividido $A\ B\ C$ (fig. 81ª), y á veces de un círculo entero. Tiene dos pínulas fijas en A y C, perpendiculares á su plano, y otras dos móviles D y E, que van unidas á una alidada cuyos extremos tienen vernieres para apreciar las fracciones de la graduacion. Todo el sistema se apoya en una *rodilla* F para fijarlo al tripié.

Para comprobar el instrumento se mueve la alidada hasta que las pínulas D y E estén en la misma direccion que A y C, y se hacen coincidir perfectamente las visuales, de manera que el hilo de una de las pínulas cubra exactamente al de la otra. En esta posicion un vernier debe señalar 0° y el otro 180°. Si esto no se verifica, se lee su indicacion, la cual es el error inicial del instrumento que debe llevarse en cuenta.

Un ángulo se mide con el grafómetro dirigiendo la pínula fija á una de las señales, valiéndose del movimiento general del instrumento, y la móvil á la otra. El ángulo que dá el vernier es el de objetos, ó bien su suplemento, segun que se haya procedido en el órden de la graduacion ó en sentido inverso. Conviene hacerlo de las dos maneras para obtener un resultado medio mas independiente de los errores de la division, y aun de la centracion cuando el grafómetro no tiene círculo completo, pues en tal caso en cada observacion angular no puede leerse mas que un vernier, y de consiguiente no se elimina el error de exentricidad.

Aunque las pínulas son bastante largas, hay veces que los objetos que se observan, por estar situados á alturas muy desiguales, no pueden verse al traves de las aberturas cuando el limbo está sensiblemente horizontal. En tal caso es preciso colocar el plano del instrumento en el de los objetos, por medio del movimiento é inclinaciones que pueden dársele con la rodilla *F;* y despues de medido el ángulo inclinado y los de altura de las dos señales, se reduce á su proyeccion horizontal, por el método de la pág. 56ª El mismo movimiento permite colocar el limbo en un plano vertical para medir los ángulos de altura ó de depresion.

133º Hay otro instrumento llamado *pantómetro*, cuyo uso es análogo al del grafómetro, cuando tiene pínulas; aunque á veces las pínulas están sustituidas por un telescopio pequeño, como sucede en el que representa la figura 82ª El pantómetro se compone de dos cilindros del mismo diámetro, que se mueven uno sobre otro por medio del tornillo *T*, y de los cuales el uno lleva la graduacion y el otro los vernieres. Se fija en el tripié como el grafómetro por medio de una rodilla, la cual se compone de una esfera que se aloja en el hueco de dos piezas metálicas que puedan acercarse ó alejarse por medio del tornillo *F*, de suerte que apretándolo se paraliza el movimiento de la rodilla, sin impedirse el de todo el instrumento al derredor del pequeño cilindro *G*. Cuando se afloja el tornillo, la esfera se mueve libremente dentro de la cavidad que la contiene, disposicion que permite dar á la columna diversos grados de inclinacion y por consiguiente nivelar el instrumento, valiéndose del nivel *D E*. En la parte superior del pantómetro está el telescopio dotado de un movimiento perpendicular al plano que contiene la graduacion. A veces tambien tiene una brújula pequeña para hacer las orientaciones.

Por esta breve descripcion se comprende que el pantómetro construido de esta manera es preferible al grafómetro comun, en atencion á que dá los ángulos ya reducidos al horizonte; y puede decirse que es un teodolito mas portátil y ménos perfecto que los que se han descrito en el Capítulo IV. Sus rectificaciones son semejantes á las del teodolito, por lo que no creo necesario repetirlas.

El grafómetro y el pantómetro siendo instrumentos mas perfectos que la escuadra, tienen un uso mas extenso, pudiendo emplearse para cualquiera de los tres métodos de levantamiento que hemos explicado. Si se quiere hacer uso del de coordenadas polares para levantar el plano del polígono representado en la figura 83ª, se toma cualquiera de sus vértices por punto de partida, A, por ejemplo, y se mide el ángulo en A y la distancia AB: el ángulo en B y la distancia BC: el ángulo en C y la distancia CD, prosiguiendo así hasta medir el ángulo en L y la distancia LA.

Si se pudieran suponer perfectas todas las operaciones, no seria necesario medir ni el último ángulo L, ni el último lado LA, puesto que situados ya A y L, se podria terminar la construccion del plano, uniéndoles simplemente con una linea; pero como tal hipótesis nunca debe admitirse, siempre es necesario procurarse la comprobacion de medir los últimos elementos, pues si la operacion se ha ejecutado bien, construyendo en L el ángulo observado, la linea que lo forma irá á terminar precisamente al punto de partida A, y la distancta LA valuada con la escala será igual á la que se ha medido.

Todos los datos se van apuntando en el registro, teniendo cuidado de inscribir en él los valores de los ángulos *interiores* del polígono, aunque sean mayores que 180° como sucede en F, G y L. Si se tiene que referir la medida á una triangulacion, es preciso medir tambien la distancia de algun vértice del polígono al punto trigonométrico P mas inmediato, así como el ángulo QPA formado por uno de los lados de la red con la linea de referencia PA, y de esta manera se consigue no solo el enlace de la operacion parcial con la general, sino tambien la orientacion de todos los lados del polígono, puesto que con esos elementos, cada uno resulta con una posicion perfectamente determinada respecto de la direccion del lado trigonométrico PQ cuyo azimut es conocido. Siempre que sea posible es conveniente medir tambien otra distancia tal como PF y el ángulo QPF, que son datos adicionales propios para suministrar medios de comprobacion, pues es claro que el punto F situado por medio de los alineamientos poligonales AB, BC,...... EF debe coincidir con el mismo punto, deduciendo su posicion del ángulo QPF y de la distancia PF, ó si se quiere, de las dos lineas AP y PF.

La forma siguiente me parece propia para el registro, acompañándola siempre del cróquis del polígono.

POLIGONO n^o......... LEVANTADO CON PANTOMETRO.

Estaciones.	Puntos observados.	ANGULOS.	DISTANCIAS.	NOTAS.
A	*L* *P* *B*	10° 00′ 00″ 97 15 30 129 21 00	*A P* = 279m.4 *A B* = 361. 7	*P* es punto trigonométrico. El ángulo.............. *Q P A* = 81° 17′
B	*A* *M* *C*	00 00. 00 79 34 00 130 42 30	*B C* = 432. 5	*B M* y *M N* son lineas auxiliares para configurar las inflexiones del arroyo. *BM*=407m.2 y *MN*=281m.1. *B M N* = 134° 33′.
C	*B* *D*	30 00 00 152 26 30	*C D* = 203. 6	
....	....	....	....	
L	*K* *A*	20 00 00 241 54 30	*L A* = 157. 3	

En lugar de inscribir los ángulos del polígono solamente, se han inscrito las lecturas angulares obtenidas para cada punto observado. Aquellos se deducen restando una de otra las dos lecturas correspondientes á las visuales dirigidas á los vértices anterior y posterior respecto del que se trata. El ángulo *A* del polígono será por ejemplo: $A = 129° 21' 00'' - 10° 00' 00'' = 119° 21' 00''$. En *B* se tendrá: $B = 130° 42' 30''$, En *L* resulta:............................ $L = 241° 54' 30'' - 20° 00' 00'' = 221° 54' 30''$.

Un medio de hallar frecuentes comprobaciones que se recomienda por la facilidad de su ejecucion, consiste en elegir en el interior del polígono un punto que sea visible desde varios de sus vértices; y entónces al estacionar en cada uno de ellos se le dirige una visual, como se ha hecho en el ejemplo anterior respecto del punto *P* desde *A* y *F*. Luego que se ha construido el polígono, si se trazan desde los vértices las direcciones de esas visuales, todas deberán concurrir en un solo punto si no hay error en las posiciones de aquellos.

Algunas veces en lugar de medir todos los ángulos y lados de un polígono es mas cómodo proceder de esta manera. Se escoge un punto central *A* (fig. 84ª), y desde él se dirigen visuales á todos los vértices, tomando los ángulos que estas forman entre sí, y se miden despues las distancias *A B*, *A C*, *A D*,...... *A G*. Es evidente que esos datos son los suficientes para poder construir el plano del polígono. Este método que se ha llamado de *radiacion*, aunque en realidad no es mas que una modificacion del de coordenadas polares, se aplica especialmente cuando el polígono tiene pocos lados, ó bien cuando su contorno es de difícil acceso ó presenta obstáculos que dificultan su medida.

134º La planografía de un polígono levantado por el método de coordenadas polares se ejecuta trazando lineas proporcionales á los valores de las distancias, y construyendo los ángulos que forman entre sí. Se comienza por situar el punto ó los puntos que se hayan referido inmediatamente á la triangulacion, si la hubiere, como A en la fig. 83ª, esto es: sobre la linea $P\ Q$, que por ser lado trigonométrico lo suponemos ya situado en el plano, se forma el ángulo $Q\ P\ A$, y se toma la distancia $P\ A$ con arreglo á la escala. Establecido así el primer punto del polígono, es necesario comprobar el valor de los ángulos ántes de proseguir la construccion. Se sabe para esto, que siendo n el número de lados, la suma de todos los ángulos *interiores* deberá ser $s = (n - 2) \times 180°$. Como por lo general los ángulos medidos no satisfacen esta ecuacion á causa del error de las observaciones, que comunmente es tanto mayor cuanto mas imperfectos son los instrumentos que se han empleado, la suma s' que se obtiene difiere de s una cantidad $\pm\ e$, la cual debe dividirse por partes iguales entre todos los ángulos, de modo que la correccion de cada uno será $\mp\ \frac{e}{n}$. Conocidos los valores de los ángulos así corregidos, y situado el primer vértice A como se ha dicho, se formará el ángulo $P\ A\ B$, y tomando la distancia $A\ B$ con arreglo á la escala, quedará establecido el segundo vértice B. En seguida se trazará desde B una linea indefinida que forma con $A\ B$ el ángulo B del polígono, y se toma la distancia $B\ C$ que determina el punto C, prosiguiendo lo mismo hasta el último vértice L. Si tanto las operaciones del campo como la construccion del plano están libres de algun error de importancia, trazando por L una recta que forme con $K\ L$ el ángulo L del polígono, esta linea irá á terminar al punto A, y la distancia $L\ A$ apreciada con la escala deberá dar precisamente su valor en el terreno. Se dice en tal caso que el polígono *cierra* bien.

Si la linea $L\ A$ es mayor ó menor que la distancia que representa, ó bien si sucede que la recta que forma con $K\ L$ el ángulo L

no va á concurrir al vértice A, es claro que hay algun error en las operaciones, y deberá buscarse la causa ya sea en la construccion del plano ó en las observaciones del campo. Si revisada la construccion se vuelve á encontrar diferencia, y esta es de consideracion, será preciso repetir la planometría del polígono para descubrir las distancias ó los ángulos incorrectos; pero si es pequeña puede creerse con fundamento que no hay errores de importancia en los datos del terreno, y como los que se notan suponemos que están comprendidos dentro de los límites de aproximacion que dan los instrumentos, debe recurrirse á la correccion gráfica de la construccion que paso á indicar.

Sea $A\,B\,C\,D\,E\,F$ el contorno que no cierra en virtud de los pequeños errores de observacion, dando la pequeña diferenoia $F\,A$, que en la fig. 85ª se ha exagerado para darle mas claridad. No habiendo fundamento alguno para atribuir á una parte del polígono mayor error que al resto, se dividirá la diferencia final $A\,F$ entre todos los lados proporcionalmente á su valor, de este modo: Sean l_1, l_2,..... l_n los lados del polígono, y c_1, c_2,..... c_n las correcciones que les corresponden. Hagamos AF valuado con la escala, igual á c_n, y llamando p el perímetro del polígono $l_1 + l_2 + \ldots\ldots l_n$, tendrémos para el primer lado $A\,B$: $p : c_n :: l_1 : c_1$, de donde resultará: $c_1 = \frac{c_n}{p}\, l_1$. Para el segundo lado $B\,C$ se tendrá igualmente: $p : c_n :: l_1 + l_2 : c_2$, ó bien $c_2 = \frac{c_n}{p}\,(l_1 + l_2)$. Prosiguiendo así hasta el penúltimo lado, la correccion del vértice E será:....... $c_{n-1} = \frac{c_n}{p}\,(l_1 + l_2 + \ldots\ldots\ldots l_{n-1})$

Conocidos los valores numéricos de las correcciones, se trazarán por todos los vértices del polígono lineas paralelas á $A\,F$, y sobre estas se tomarán las distancias $B\,B' = c_1$, $C\,C' = c_2$,.............. $E\,E' = c_{n-1}$, de manera que el polígono corregido será............ $A\,B'\,C'\,D'\,E'$.

Supongamos un pentágono cuyos lados sean:

$$\begin{aligned} A\,B &= 175^{m}.2 \\ B\,C &= 341.7 \\ C\,D &= 289.6 \\ D\,E &= 274.5 \\ E\,A &= 124.3 \\ \hline p &= 1205^{m}.3 \end{aligned}$$

Si al hacer la construccion el último lado en lugar de concurrir al primer vértice A, termina en un punto cuya distancia al primero, tomada en la escala es de 8^m, en virtud de las fórmulas anteriores se tendrá: $\frac{c_n}{p} = 0.0066$, y las correcciones serán:

$$
\begin{aligned}
B\,B' &= 175^m2 \times 0.0066 = 1^m16 \\
C\,C' &= 516.\ 9 \times 0.0066 = 3.\ 41 \\
D\,D' &= 806.\ 5 \times 0.0066 = 5.\ 32 \\
E\,E' &= 1081.\ 0 \times 0.0066 = 7.\ 13 \\
F\,A &= 1205.\ 3 \times 0.0066 = 8.\ 00
\end{aligned}
$$

Estas son las cantidades que deberán moverse los vértices paralelamente á $A\,F$ para hacer cerrar el polígono, las cuales tendrán que reducirse al valor de la escala. Es claro que segun sea esta, variará el tamaño de cada correccion en el plano, de suerte que el mismo error numérico puede ser muy notable en una escala grande ó pasar desapercibido en una muy pequeña. En la de $\frac{1}{20000}$ el mayor error $A\,F$ seria solo de 0^m0004 sobre el papel, y los demas en su mayor parte inapreciables, miéntras que en la de $\frac{1}{5000}$ el mismo error quedaria representado por 0^m0016, es decir, seria bastante notable. Esto indica que los planos que han de construirse con escalas grandes deben levantarse generalmente con mas cuidado, midiendo tanto los ángulos como los lados con mas precision que cuando han de construirse con escalas muy pequeñas.

En la construccion de un polígono levantado por coordenadas polares, tal como la hemos explicado, se ve que aun suponiendo bastante exactos los datos del terreno, el menor error que se cometa al construir los ángulos ó al tomar alguna de las distancias con el doble–decímetro influye necesariamente en todos los demas vértices, aumentándose sus efectos al paso que crece el número de lados. Si al fijar, por ejemplo, la direccion de $A\,B$ (fig. 86ª), se desvía un poco la linea de modo que su extremo vaya á situarse en B', como en este punto se debe construir sobre $A\,B$ el ángulo $A\,B\,C$, resultará que ese ángulo se formará en B', y el punto que deberia estar en C se colocará en C'; y aun cuando las distancias y los ángulos se construyan exactamente, el contorno $A\,B'\,C'\,D'$ se irá alejando mas y mas del verdadero $A\,B\,C\,D$, solo á consecuencia del error primitivo en la direccion de $A\,B$. Un efecto análogo, aunque por lo general de menor influencia, se produciria en virtud de un pequeño error que se cometiera al trasportar sobre el plano alguna de las distancias.

135º Estos inconvenientes crecen comunmente al paso que son mas pequeños y numerosos los lados del polígono, y pueden en gran parte disminuirse, bien sea situando cada vértice independientemente de los demas, para lo cual es preciso referirlos á un sistema de ejes de coordenadas, bien sea determinando el ángulo que forma cada lado del polígono con una direccion arbitraria, y construyendo en seguida todos esos ángulos en un solo punto. Si se ha enlazado alguno de los vértices con la cadena trigonométrica midiendo el ángulo que forma un lado del polígono con alguno de los de la triangulacion cuyo azimut se conozca, pueden tambien deducirse los azimutes de las lineas poligonales aplicando los mismos procedimientos de la página 134ª Si no se ha hecho triangulacion puede observarse directamente el azimut de un lado del polígono, ó bien suponerse trazada desde cualquiera de sus vértices una linea que forme con el lado adyacente del polígono un ángulo arbitrario, la cual se toma por uno de los ejes de coordenadas, situando el orígen en cualquiera de sus puntos, aunque es mas cómodo suponerlo en el mismo vértice por donde pasa la linea ó eje. Con este ángulo arbitrario y los del polígono, se determina el que cada lado poligonal forma con el eje, y en seguida nada es mas sencillo que calcular las coordenadas de todos los vértices. Como ya se han visto en el Capítulo VII varios ejemplos de este género, aplicaré el método á un polígono de pocos lados para no alargar demasiado las operaciones. El registro siguiente se refiere al cuadrilátero representado en la figura 87ª

PLANO LEVANTADO POR EL MÉTODO DE COORDENADAS POLARES.

ÁNGULOS.	LADOS.	NOTAS.
$A = 67° 15' 20''$	$AB =$ 831ᵐ3	El azimut de D medido desde A es:
$B = 122 \quad 6 \quad 40$	$BC =$ 604. 0	$u = 47° 10' 40''$
$C = 113 \quad 12 \quad 00$	$CD =$ 1026. 4	
$D = 57 \quad 25 \quad 50$	$DA =$ 1469. 9	

Como en este caso se conoce el azimut del lado AD, podrémos suponer trazada la meridiana NS formando con $A\,D$ el ángulo u, y será cómodo tomar esa linea por eje de ordenadas situando el orígen en el punto A. Segun esto, aplicando las reglas de la página 134ª, los azimutes de los demas lados son:

$$\begin{aligned} \text{az. } A\,B &= u + 360^\circ - A \\ \text{az. } B\,C &= u + 180 \quad - (A + B) \\ \text{az. } C\,D &= u + 360 \quad - (A + B + C) \end{aligned}$$

Antes de proseguir hagamos notar que si se tomó la meridiana por eje, fué únicamente porque se conocia el azimut de $A\,D$; pero nada habria impedido imaginarse trazada por A ó por otro de los vértices una linea que se supusiera formar con $A\,D$ un ángulo cualquiera a, y deducir lo mismo que se ha hecho hasta aquí, los ángulos que forman los demas lados con las paralelas al eje arbitrario. El polígono, á la verdad, no quedaria orientado; pero se podria efectuar con igual facilidad su construccion, que es la que deseo explicar. La ventaja de la orientacion es la que comunmente hace tomar la meridiana por eje.

Para ejecutar los cálculos numéricos de la deduccion de los azimutes, veamos primero si necesitan correccion los ángulos observados del polígono. Sumando los valores que constan en el registro, se obtiene $s' = 359^\circ\ 59'\ 50''$, de donde se deduce que el error total es $e = -10''$, y por consiguiente la correccion que debe sufrir cada ángulo es de $+\ 2.''5$ solamente. A causa de su corto número de lados es por lo que he escogido este polígono como ejemplo; pero como lo levanté con teodolito repitiendo los ángulos, el error final es muy pequeño, y no debe este caso servir de norma para los levantamientos comunes. Un error de $1'$ por ángulo se considera como muy buen resultado, y comunmente se admiten hasta $3'$ ó $4'$ y á veces mas, segun la calidad del instrumento con que se haya operado.

Haciendo las correcciones y calculando los azimutes se tendrán los resultados siguientes, prescindiendo de las decimales de segundo:

$$\begin{aligned} \text{az. } A\,B &= 339^\circ\ 55'\ 17'' \\ \text{az. } B\,C &= 37 \quad 48 \quad 35 \\ \text{az. } C\,D &= 104 \quad 36 \quad 32 \\ \text{az. } D\,A &= 47 \quad 10 \quad 40 \end{aligned}$$

136º Veamos ahora el modo de valerse de estos ángulos formados por los lados poligonales con una linea cualquiera, para hacer la planografía de la figura, logrando disminuir en gran parte los inconvenientes que ántes se han señalado en el procedimiento comun de construccion. Por un punto cualquiera O (fig. 88ª), se traza una recta $O N$ que representa la direccion de la linea que se ha tomado por eje en los cálculos precedentes, y sobre ella se construyen los ángulos hallados, á saber: $N O b$ igual al ángulo $N A B$ de la figura anterior; así como $N O c$, $N O d$ y $N O d'$ iguales respectivamente á los que forman los lados $B C$, $C D$ y $A D$ del polígono con el mismo eje. En seguida, despues de fijar el punto A en que se quiere que comience la construccion, se traza por él una paralela á $O b$, y en ella se toma la longitud del primer lado con arreglo á la escala, lo cual determina el punto B. Por este último se traza una paralela á $O c$, y en ella se fija el punto C por su distancia á B. Finalmente, por C se traza la paralela á $O d$, sobre la cual se toma la distancia $C D$. La construccion se comprueba trazando por D una paralela á $O d'$, la cual deberá terminar en el punto de partida A, y la distancia $A D$ debe resultar igual á la linea medida en el terreno.

Suele encontrarse en el comercio un papel propio para aplicar este sistema de construccion, porque tiene litografiado un círculo de cosa de $0^m 2$ de radio, y dividido en pequeñas fracciones de grado. Este círculo hace las veces de un buen trasportador. En cuanto á las paralelas se trazan sirviéndose de las reglas destinadas á ese objeto entre los instrumentos de delineacion, ó bien por medio de una escuadra, uno de cuyos lados se hace coincidir con la linea, y que en seguida se desliza á lo largo de una regla qne se pone en contacto con su otro lado, hasta que el primero llegue al punto por el cual debe tirarse la paralela.

Las ventajas de este método respecto del que se ha explicado en las páginas precedentes, provienen de que la linea $N O$ sobre la cual se construyen los ángulos, pudiendo ser generalmente tan larga como se quiera, permite tambien adoptar un radio grande para tomar las cuerdas, si se sigue este procedimiento; y aun haciendo uso del trasportador, pueden señalarse todos los ángulos casi sin tener que moverlo. En el otro método no puede ser así, sobre todo si son pequeños los lados del polígono, pues aun suponiendo que en todos casos pudieran prolongarse, habria que temer en cada vértice alguna pequeña desviacion al hacer las prolongaciones.

Otro modo de hacer la construccion, que es todavía preferible al que acaba de indicarse, es el de situar cada punto por medio de sus coordenadas, las cuales, segun se ha visto en el Capítulo VII, pueden calcularse fácilmente puesto que se conocen todos los lados del polígono y los ángulos que forman con la linea que se ha tomado por eje. No creo necesario repetir aquí lo que con este motivo se dijo en el Capítulo citado; pero si el lector desea ejecutar los cálculos para los vértices del polígono que nos sirve de ejemplo, deberá hallar:

VÉRTICES.	x	y
A............	0^m0............	0^m0
B............	— 285. 4............	+ 780. 8
C............	+ 84. 9............	+ 1258. 0
D............	+ 1078. 1............	+ 999. 1

Con los valores de las coordenadas se hace la construccion siguiendo las mismas reglas que se establecieron en la página 161 y siguientes.

Siempre que se desea operar con toda la exactitud posible se adopta este procedimiento; pero como cuando los polígonos tienen muchos lados, el cálculo directo de las coordenadas seria muy dilatado, se acude para abreviarlo, á las Tablas que van al fin de este libro y cuyo uso se explicará en el Capítulo siguiente. En general, debemos decir que en los diversos métodos de construccion las probabilidades de error crecen al paso que aumenta el número de ángulos que hay necesidad de formar, y por eso se recomienda que en la planografía se prefiera siempre la construccion de lineas á la de ángulos, aunque sea á costa de algun trabajo de cálculo.

137º Nos ocuparémos ahora del levantamiento por el método de intersecciones. Dijimos en otro lugar que el procedimiento general consiste en medir una ó mas bases que se enlazan entre sí y con la cadena trigonométrica si la hubiere, y en observar desde sus extremos los ángulos que forman con ellas las visuales dirigidas á todos los vértices del polígono. De este modo cada punto queda situado por medio de dos visuales cuando ménos, las cuales se procurará que se corten en ángulos no muy agudos, y que se acerquen siempre que sea posible, á ser perpendiculares entre sí, para lo cual debe hacerse con el mayor cuidado la eleccion de las bases. Es claro que en todos aquellos casos en que puedan dirigirse mas de dos visuales á un mismo punto, debe hacerse así, porque esta operacion adicional comprueba las precedentes dando mayor seguridad á los resultados. Muchas veces dos ó mas puntos cuya posicion se determina por intersecciones, sirven en seguida de estaciones para situar nuevos puntos de la misma manera, lo cual equivale á una verdadera triangulacion en que solo se observan dos ángulos de cada triángulo; en tales casos es cuando importa mucho mas que esos puntos queden determinados por varias visuales, á fin de que no haya temor de que una equivocacion cualquiera vaya á alterar las posiciones de los nuevos objetos que se refieren á ellas.

El método de intersecciones es sin duda alguna el que permite mas rapidez en la ejecucion de las operaciones de campo, y el único cómodamente aplicable cuando el contorno del polígono es inaccesible ó muy escabroso: ejecutado sin perder de vista las prevenciones que se han establecido, proporciona tambien muy buenos resultados; pero tiene el inconveniente de que cuando se quieren deducir las distancias entre los vértices del polígono, así como los ángulos interiores de este, es preciso resolver muchos triángulos, por lo cual no conviene ponerlo en práctica, al ménos en grande escala, mas que cuando el objeto principal del levantamiento sea el de configurar violentamente los detalles del terreno sin que se crea necesaria la determinacion de otros elementos, ó bien cuando no se pueda disponer de mucho tiempo para ejecutar las operaciones del campo.

El registro debe contener los nombres de las estaciones, los puntos que desde ellas se observan y las indicaciones correspondientes del goniómetro, asentando en la columna de las «Notas» la longitud de las bases y el enlace que tienen entre sí, y en su caso, con la triangulacion. En la página siguiente pondré como ejemplo el registro referente á la figura 89ª

Sirviéndose solo de los datos recogidos en el terreno, la construccion del plano es muy sencilla, pues se reduce á trazar las bases por medio de sus longitudes y sus ángulos, ó mejor por medio de sus coordenadas como se ha explicado ya, y en seguida á construir en sus extremidades los ángulos formados por las visuales dirigidas á los demas puntos. La construccion de esos ángulos debe hacerse por el método de las cuerdas si se desea alcanzar mayor exactitud.

PLANO LEVANTADO POR EL MÉTODO DE INTERSECCIONES.

Estaciones.	Puntos observados.	ÁNGULOS.	NOTAS.
A	*B*	00° 00.′0	La linea *A B* es una base de $524^{m}9$.
	C	62 58. 5	Su azimut medido en *A* es de.........
	E	230 9. 0	189° 50′.
	H	292 11. 0	Los puntos *J*, *K*. *H* y *E* son mohoneras limítrofes de los terrenos inmediatos.
B	*J*	00 00. 0	
	K	101 15. 5	
	C	146 26. 5	
	A	192 32. 0	
	H	251 35. 0	
C	*J*	00 00. 0	
	K	25 28. 0	
	D	203 25. 0	
	A	270 33. 5	
	H	299 36. 0	
	B	341 30. 5	
D	*E*	00 00. 0	
	A	31 35. 0	
	C	56 31. 0	
K	*B*	00 00. 0	
	J	52 1. 0	
H	*J*	00 00. 0	
	B	35 39. 5	

Cuando se quiere construir el plano valiéndose de las coordenadas de los vértices, será necesario calcular primero los triángulos formados por la base y cada uno de los puntos observados desde sus extremidades, y en seguida con los lados y los ángulos puede procederse como se dijo en el núm. 135, refiriendo las posiciones á dos líneas arbitrarias, ó bien á la meridiana y su perpendicular si se ha medido directamente el azimut de alguna de las bases ó de las visuales. En la figura 89ª, por ejemplo, tomando por orígen el punto *A*, las coordenadas de *H* se obtendrán por medio de la resolucion siguiente:

$$A\,H = \frac{A\,B\ \text{sen.}\ A\,B\,H}{\text{sen.}\ (A\,B\,H + B\,A\,H)} \qquad x = AH\,\text{sen.}(u + BAH) \qquad y = AH\cos.\,(u + BAH)$$

en la que se ha designado por u el azimut conocido de la base *A B*.

Si se quieren determinar, ademas, las distancias entre los vértices, ó lo que es lo mismo, los lados del polígono, se aplicará la resolucion que dimos en el núm 24º, puesto que para un lado tal como EH, en el triángulo AHE, el cálculo anterior dá los lados AE y AH, y la observacion directa el ángulo comprendido A.

En lugar de seguir este camino, me parece preferible aplicar á este caso las fórmulas (1) y (2) del núm. 111º, puesto que cada visual está caracterizada por las coordenadas de su punto de partida y por su azimut, ó en general, por el ángulo que forma con el eje arbitrario que se haya elegido. De este modo se obtienen directamente las coordenadas de cada punto visado, y en seguida las distancias de vértice á vértice por el método de la pág. 176, lo mismo que los ángulos del polígono, que no son otra cosa mas que las diferencias de los ángulos que los diversos lados van formando con el eje, designados por U en la página citada.

La ley de 2 de Agosto de 1863 previene que en las medidas de los terrenos de propiedad pública se formen los planos ó cróquis, inscribiendo en ellos las longitudes de los lados y las amplitudes de los ángulos del polígono. Estos elementos que se obtienen directamente cuando se sigue el método de coordenadas polares, demandan, por el contrario, los cálculos que se acaban de indicar cuando se aplica el de intersecciones; así es que si este último permite operar en el campo con mas violencia y tal vez con mas seguridad en general, exige, en cambio, trabajos de gabinete mas laboriosos que el primero. En vista de estos hechos, cada geómetra adoptará el sistema que mas convenga á sus circunstancias.

Casi parece inútil añadir que con el grafómetro ó con el pantómetro pueden resolverse los problemas de las páginas 203 y siguientes con mas facilidad que con la escuadra y sin necesidad de ceñirse á la formacion de ángulos de 45°, de 90° ó de 135°. La mayor perfeccion de estos instrumentos, permitiendo mas libertad de accion, se presta á la resolucion de otros varios problemas de que me ocuparé mas adelante.

CAPITULO XIV.

DE LA BRUJULA.

Vease Mem. de l'Off. du Gém. n.°

138? Los goniómetros de que me he ocupado hasta aquí dán directamente el ángulo que forman entre sí las visuales dirigidas á dos ó mas objetos; pero hay un instrumento muy usado en la planometría, llamado *brújula* y tambien *compas azimutal*, que dá los ángulos que forman las visuales con un punto invisible, el cual es el polo magnético, cuya direccion difiere poco de la del meridiano terrestre. La brújula consta esencialmente de una aguja ó barra imantada *A B* (fig. 90ª) que gira libremente sobre un eje de acero colocado en el centro *C* de un limbo ó circunferencia graduada, y de tal manera que ambos extremos de la aguja terminados en punta, pasen muy cerca de las divisiones, aunque sin tocarlas para que no se entorpezca su movimiento. Todo el aparato está contenido dentro de una caja *D* de madera ó de laton, que se fija en un tripié, y va acompañada del mecanismo necesario para establecerse horizontalmente.

Se sabe que una barra dotada de la propiedad magnética y suspendida libremente por su centro, toma una direccion fija en un plano vertical que dista poco del meridiano, y que se llama por esta razon, *meridiano magnético*. Cuando se aparta la barra de esta direccion, dejándola libre en seguida, vuelve á ocuparla luego que, despues de algunas oscilaciones, se restablece el equilibrio. El ángulo que forma esta direccion con el plano del meridiano, ó si se quiere, el azimut de la barra imantada, se llama la *declinacion* de la brújula; ángulo variable no solo en diversos lugares, sino aun en el mismo lugar con el trascurso del tiempo. Actualmente en México la declinacion es de poco mas de 8° hácia el Este, quiere decir, que el meridiano magnético forma ese ángulo con el astronómico, desviándose el primero del Norte al Este, ó bien del Sur al Oeste. A principios de este siglo el baron Alejandro de Humboldt halló 8° 8′, y despues fué aumentando, pues los Sres. D. Miguel Velazquez de Leon y D. Joaquin de Mier y Terán encontraron por mas de 900 observaciones que en 1850 era de 8° 35.′2. En seguida parece haber comenzado á decrecer como lo manifiesta la tabla siguiente que termina con la observacion que hice el 1º de Noviembre de este año (1868) en compañía del ingeniero D. Manuel Fernandez. La última columna de la tabla indica las declinaciones calculadas con un decremento anual de 1.′4 que resulta de la comparacion de las observaciones de 1850 con las de 1868, y se ve que en general las diferencias respecto de las halladas directamente, son bastante pequeñas, pudiendo considerarse comprendidas dentro de los límites del error posible de las observaciones.

DECLINACION ORIENTAL DE LA AGUJA MAGNÉTICA EN MÉXICO.

OBSERVADORES.	AÑOS.	Declinacion observada.	Declinacion calculada.	$o-c$
Humboldt	1804	8° 8.′0...		
Velazquez y Terán	1850	8 35. 2...	8° 35.′2	0.′0
Almazan	1858	8 22. 3...	8 24. 0	—1. 7
Salazar Ilarregui	1860	8 30. 0...	8 21. 2	+8. 8
Diaz Covarrubias	1862	8 20. 5...	8 18. 4	+2. 1
Ponce de Leon	1866	8 8. 5...	8 12. 8	—4. 3
,, ,, ,,	1867	8 9. 3...	8 11. 4	—2. 1
Fernandez y Diaz Covarrubias.	1868	8 10. 0...	8 10. 0	0. 0

Para el resto de la República no se tienen datos exactos, y solo se sabe que hácia el Oriente de la capital la declinacion es menor, y mayor hácia el Occidente. Probablemente en nuestro país las declinaciones magnéticas están comprendidas entre 7° y 12°, como lo manifiesta la figura 91ª que he formado prolongando las curvas observadas en los Estados-Unidos, y que pasan por todos los lugares en que se tiene la misma declinacion.

Si una aguja ántes de magnetizarse estuviese perfectamente equilibrada, de tal modo que apoyada en su centro se situase en un plano horizontal, tomaria una inclinacion muy sensible luego que se le comunicara la virtud magnética; y así el hecho de que sus dos extremidades estuviesen á la altura de la graduacion, no seria una prueba de que esta ó la caja de la brújula fuesen horizontales. Para evitar este inconveniente los fabricantes llevan en cuenta el fenómeno de la *inclinacion*, bien sea haciendo un poco mas pesado el extremo *Sur* de la aguja, ó lo que es mejor, adaptándole una pequeña lámina metálica ó contrapeso que pueda colocarse á diversas distancias del centro, pues es sabido que la inclinacion de la aguja magnética varia con las latitudes, y este segundo medio permitirá hacer la correccion en una region cualquiera. Para conseguirlo se comenzará por nivelar la caja que contiene el limbo, y despues se irá moviendo el contrapeso adicional, hasta que ambas extremidades de la barra se encuentren á la altura de la graduacion, la cual se halla á una distancia del fondo de la caja, igual al tamaño de la espiga ó pivote en que se apoya y gira la aguja.

Es de la mayor importancia que la brújula se mueva libremente sobre su apoyo, por lo cual se emplean sustancias muy duras para construirlo, lo mismo que para hacer la chapa central de la barra que juega sobre el pivote ó eje. Comunmente este último se construye de acero y la chapa de ágata. Los extremos *Norte* y *Sur* de la aguja se distinguen uno de otro en que el primero tiene alguna señal, ornato, &c., ó bien en que está pavonado.

La graduacion del limbo está numerada algunas veces de 0° á 360° partiendo del punto Norte, y otras por cuadrantes partiendo del Norte y del Sur tanto hácia el Este como hácia el Oeste. A un lado de la caja hay un anteojo *G H* (fig. 90ª), provisto de su retícula y dotado de un movimiento vertical, que está colocado paralelamente á la linea *N S* (*Norte–Sur*) marcada en el fondo de la caja. A veces en lugar de telescopio hay un tubo con pínulas. Por lo general en las brújulas inglesas el anteojo ó las pínulas están colocadas en el plano vertical que pasa por *N S*, de modo que estos instrumentos no son excéntricos. Lo mismo sucede respecto de las brújulas que casi siempre tienen los teodolitos ingleses y americanos.

Las brújulas comunes tienen una rodilla semejante á la del grafómetro; pero las de mejor construccion como la que representa la fig. 92ª, están sostenidas por tres ó cuatro piés provistos de tornillos, y tienen ademas dos niveles en posicion rectangular sobre la caja para situarla horizontalmente, procediendo como se ha explicado en la página 60, tanto para nivelar el aparato como para rectificar los niveles mismos. El telescopio $F G$ se mueve en el centro de un limbo vertical graduado $H I$, y tiene los tornillos de presion y aproximacion necesarios para fijarlo y para comunicarle pequeños movimientos. Este último aparato, llamado *eclímetro*, consta comunmente de dos sectores de círculo, y si se quiere no es esencial en la brújula; pero sí muy útil para medir los ángulos de inclinacioa, como se verá en otra parte.

Como la aguja ántes de fijarse en el meridiano magnético hace algunas oscilaciones al derredor de esta direccion, el instrumento tiene un tornillo que la fija en cualquiera posicion levantándola de su eje y apoyándola contra el vidrio que cubre la caja, de manera que para proceder con violencia se observa la amplitud de las oscilaciones, y en seguida se fija la aguja repentinamente hácia el centro del arco recorrido: poniéndola despues en libertad, las oscilaciones que haga tendrán menor extension y cesarán pronto, quedando finalmente la barra en su situacion normal. La misma suspension de movimientos debe usarse para trasportarla, y en general siempre que no se emplee la brújula á fin de que no sufran el eje ó la chapa las consecuencias de un rozamiento continuo ó innecesario.

139º Antes de hacer uso de una brújula es preciso rectificarla. Despues de bien nivelada la caja y corregidos los niveles hasta conseguir que en una revolucion entera al derredor del eje vertical permanezcan las burbujas en los centros de los tubos, se examina si las dos extremidades de la aguja señalan divisiones iguales, mas ó ménos 180° cuando la graduacion no está numerada por cuadrantes. Si se nota alguna diferencia, esta puede provenir de que la barra no es perfectamente recta, de que el pivote que la sostiene no está exactamente en el centro, ó finalmente, de ambos defectos reunidos. En todos casos el error se elimina de esta manera. Sea $A B$ (fig. 93ª) la posicion que debia tener la aguja, y $A' B'$ la que realmente ocupa por el doble motivo de ser curva y de girar al derredor del eje excéntrico C'. Siendo $N S$ el diámetro desde cuyos extremos parte la graduacion, el ángulo correcto que debia señalar seria $N C A = S C B = x$. Como $A B$ y $A' B'$ son paralelas puesto que la brújula se dirige al polo magnético, tendrémos................ $AA' = BB' = e$, que es el error, siendo las indicaciones de los extremos de la aguja $NA' = a$ y $SB' = a'$. Con estas anotaciones se tendrá:

$$x = a + e$$
$$x = a' - e$$

de donde resulta $2\,x = a + a'$, ó bien $x = \frac{1}{2}\,(a + a')$; luego tomando el término medio de las lecturas hechas con las dos extremidades de la barra, se tendrá una indicacion independiente del error.

La segunda rectificacion consiste en examinar si la linea NS es paralela á la linea de colimacion del telescopio. Para esto se dirige una visual á un objeto muy distante, y luego que está cortado por la rectícula se anota la graduacion que señala la aguja. Se mueve despues la caja 180°, esto es, hasta que la indicacion dé el mismo ángulo mas ó ménos 180°, y se vuelve á dirigir el anteojo al mismo objeto: si la retícula lo corta tambien en esta nueva posicion, no habrá defecto de paralelismo, puesto que la distancia de las dos posiciones que ha tomado el telescopio puede considerarse nula respecto de la del objeto. En el caso de que este no quede en coincidencia con los hilos, debe moverse la retícula per medio de sus tornillos una cantidad igual á la mitad de la desviacion observada, repitiendo la experiencia hasta que no haya error apreciable. Destruido de esta manera el error de colimacion en el sentido horizontal, puede quedar sin embargo el de colimacion vertical, de cuya correccion ó eliminacion tratarémos en la última parte de esta obra.

140º La aproximacion angular que se obtiene con la brújula es muy limitada. Generalmente las divisiones solo marcan grados enteros ó cuando mas medios grados, de suerte que hay necesidad de estimar á la simple vista las fracciones de la graduacion; y como casi siempre el limbo tiene 0^m1 de diámetro poco mas ó ménos, resulta que 30′ ocupan la pequeña extension de 0^m00044, ó bien 15′ la de 0^m00022. De aquí se deduce que considerando siempre á 0^m0001 como límite de la extension apreciable, no podrán estimarse con la brújula fracciones angulares inferiores á un octavo de grado, y tal vez con alguna seguridad solo cuartos de grados. El espesor sensible de las puntas de la aguja por finas que sean, y la circunstancia de que es indispensable que queden á una pequeña distancia de la graduacion, contribuyen tambien á hacer mas inciertas las lecturas. Se ha procurado, si no subsanar, al ménos disminuir estos inconvenientes adaptando á la caja de la brújula, dotada á veces de un pequeño movimiento, un arco graduado con su vernier, y entónces si la aguja señala un número g de grados mas una fraccion, se mueve la caja con su tornillo de aproximacion hasta que señale solamente el número g; y la fraccion se obtiene por el vernier que ha medido la pequeña diferencia angular de las dos posiciones de la caja. Otras veces uno de los extremos de la barra magnética lleva un vernier hecho de carton ó de otra sustancia muy poco pesada; pero siempre las pequeñas vibraciones que tiene la aguja se oponen á la apreciacion exacta de las fracciones; así es que por lo general solo se estiman á la simple vista, y esto como dije ántes, con la aproximacion de cuartos de grado, ó cuando mas con la de $8'$ á $10'$.

Hay ademas otra causa de error, aunque de muy poca influencia en nuestras latitudes. Si se fija la caja de una brújula de manera que el telescopio señale una direccion invariable, tal como la del meridiano, y se observan á diversas horas del dia los azimutes magnéticos que indica la aguja, se notarán pequeñas diferencias llamadas *variaciones diurnas*, originadas por un ligero movimiento del extremo Norte de la barra hácia el Oeste. La amplitud de estas variaciones cambia con la posicion de los lugares, siendo sensiblemente nula cerca del ecuador y aumentándose hácia los polos. En Europa y en otras regiones septentrionales las variaciones son hasta de $10'$ á $15'$, llegando á su *máximum* á cosa de las dos de la tarde, hora desde la cual comienzan á decrecer hasta las diez ó las once de la noche, en que vuelven á ser sensiblemente nulas. La aguja permanece casi estacionaria toda la noche hasta el amanecer en que vuelve á comenzar su movimiento hácia el Oeste. En nuestro país faltan observaciones precisas para conocer la amplitud de las variaciones diurnas; pero por nuestra posicion geográfica es de creerse que no excederán de $5'$ ó $6'$, y por consiguiente casi siempre será inútil tomarlas en cuenta á causa de estar comprendido este pequeño arco dentro de los límites de la apreciacion angular que proporciona la brújula.

Lo que nunca debe olvidarse al hacer uso de la brújula, es alejar de ella toda materia ferruginosa, pues es bien conocida la atraccion que ejercen en la aguja; así es que la cadena, las fichas, las llaves, &c., se llevarán á cierta distancia para que el instrumento señale los verdaderos azimutes magnéticos sin desviacion alguna por causas accidentales. En los terrenos que contienen sustancias ferruginosas ó magnéticas es casi imposible el uso de la brújula: despues verémos cómo se conoce la existencia de alguna causa anormal de atraccion.

Todos los defectos que se han mencionado contribuyen á hacer de la brújula un instrumento de poca precision; no obstante lo cual es acaso el que mas se usa en la planometría, ya sea por proporcionar el grado de exactitud que casi siempre se cree bastante en la práctica, ó ya por tener otras ventajas que darémos á conocer en lo sucesivo.

141º Procedamos ahora á explicar su uso. La propiedad de la aguja magnética de dirigirse siempre al mismo punto del horizonte, reunida á la hipótesis admisible del paralelismo de los meridianos, bastan para formarse una idea del modo de utilizar este instrumento en la planometría, pudiéndose obtener directamente con él los *rumbos* ó azimutes magnéticos de los lados de una figura. Supongamos primero que el telescopio ó las pínulas estén en el centro de la caja y sea $A\ B$ (fig. 94ª) la aguja establecida de modo que su centro C corresponda verticalmente al de la estacion. Si puesta en libertad la barra, paralizadas sus oscilaciones y nivelado el instrumento, se mueve la caja hasta que el extremo Norte A señale el *cero* de la graduacion, es claro que el anteojo se encontrará situado en el meridiano magnético, y si se dirige despues á otro punto cualquiera D, el arco recorrido por la caja será $N'\ A$, ó el azimut magnético de la linea $C\,D$ contado desde el Norte. En general, el azimut de una direccion cualquiera es el ángulo comprendido entre el 0° y la punta Norte de la aguja, y si las divisiones están numeradas de izquierda á derecha, los azimutes resultarán contados como lo hemos acostumbrado hasta ahora.

Nótese que al observar un punto tal como D que esté en el cuadrante $N\ O$ (*Nor–Oeste*), como la caja es la que se mueve del Norte al Oeste y la aguja permanece estacionaria, su extremo A quedará en el cuadrante $N'\ E'$ (*Nor–Este*) de la caja, de modo que aparecerán invertidos sus rumbos *Este* y *Oeste*. Por esta razon algunas brújulas, especialmente las inglesas, tienen marcado el Este en el lugar que corresponde al Oeste y viceversa; de esta manera el cuadrante en que está la extremidad Norte de la aguja expresa inmediatamente el que corresponde al punto que observa. Cuando la brújula no tiene invertidas las letras E y O es preciso que las invierta el observador al apuntar los azimutes.

Es muy variado el modo de contar los azimutes: algunos ingenieros los cuentan desde 0° hasta 360° partiendo del Norte, ya sea hácia el Oeste como se ha hecho en este libro, ya sea hácia el Este. Para esto por regla general se sujetan ó al sentido en que esté numerada la graduacion, ó á la costumbre que hayan adquirido. Muchas brújulas tienen numerado su limbo por cuadrantes y entónces es cómodo contar los azimutes solo de 0° á 90° partiendo indiferentemente del Norte ó del Sur; pero en tal caso es preciso anotar tambien el cuadrante en que está realmente el objeto observado, lo cual se hace por medio de las iniciales N ó S, segun sea el punto de partida, quiere decir, el extremo de la aguja con que se lea la graduacion, y las otras O y E que se refieren respectivamente al Oeste y al Este. Un ejemplo dará una idea mas clara de las diversas maneras de contar. Suponiendo que el arco $N' A$ (fig. 94ª) sea de 30°, el azimut de D se puede expresar de todos estos modos: si la graduacion está numerada de 0° á 360° partiendo del Norte y continuando hácia la derecha, se apuntará: az. $CD = 30°$. Si está numerado el limbo tambien de 0° á 360°, pero del Norte hácia la izquierda, se tendrá: az. $CD = 330°$. Si se quiere contar por cuadrantes, lo cual siempre puede hacerse aunque la graduacion corra hasta 360°, se tiene: az. $CD = 30°\ NO$. Si fuere F el punto que se observa siendo $S' B$ tambien de 30°, se tendrá en el primer caso:........... az. $CF = 210°$; en el segundo 150°; y en el tercero 30° SE. Estando el punto en G se tendria en cada uno de los casos que hemos considerado: az. $CG = 150°$, ó bien 210°, ó bien 30° SO. Finalmente, siendo H el objeto observado, se apuntaria respectivamente: az. $CH = 330°$; ó 30°, ó bien 30° NE. Todo esto es extremadamente sencillo y basta ver una brújula para comprenderlo mejor que con las explicaciones mas minuciosas. Es claro que cada ingeniero puede adoptar el sistema que le parezca mas conveniente, con tal que conociendo su brújula, pueda designar inmediatamente el cuadrante en que está el punto que ha observado en vista de la indicacion que haya obtenido.

142º He supuesto hasta ahora que el telescopio de la brújula está colocado en el centro de la caja; mas como muchas veces no es así, veamos cuál es el efecto de su exentricidad. En la figura 95ª el azimut de D es NCD; pero como el anteojo está en E, la indicacion de la aguja será $N' CA$, puesto que la linea $N' S'$ es paralela al eje del telescopio; y se ve que habrá un error........................ $N'CD = CDE = e$. Para calcularlo, el triángulo rectángulo CDE dá: sen. $e = \frac{CE}{CD}$, ó bien expresando en minutos el pequeño ángulo e y llamando k la distancia CD, se tiene: $e = \frac{CE}{k \text{ sen. } 1'}$. En la mayor parte de las brújulas la distancia del centro al eje del anteojo no excede de un decímetro, de modo que suponiendo $CE = 0^m.1$ puede calcularse la tabla siguiente para diversas distancias.

k	e	k	e	k	e
10^m	34′ 23″	50^m	6′ 52″	90^m	3′ 49″
20	17 11	60	5 44	100	3 26
30	11 27	70	4 55	200	1 43
40	8 36	80	4 18	300	1 9

Por estos números se ve que desde 100^m, y acaso desde 50^m en adelante, la correccion es del mismo órden que la aproximacion angular de la brújula; y así puede desecharse casi siempre. Para menores distancias rara vez se usa la brújula, puesto que las directrices tienen ordinariamente mayor longitud; pero en el caso de usarla, lo que debe hacerse es tomar el azimut magnético tanto con el telescopio á la derecha como á la izquierda, y el término medio de los dos resultados, segun se ha visto en la pág. 70, suministrará el ángulo independiente del error de exentricidad.

143º Aunque la brújula dá directamente los ángulos que forman las lineas con el meridiano magnético, es muy fácil deducir los que forman entre sí, pues la operacion se reduce en general á hallar las diferencias de los azimutes de cada direccion, si se cuentan desde 0° hasta 360°. Cuando se cuentan por cuadrantes, si las dos lineas cuyo ángulo se busca están en un mismo cuadrante como CA y CB (fig. 96ª), la diferencia de sus azimutes α y β será el ángulo que forman, esto es: $ACB = \beta - \alpha$. Si una de las lineas CB' está en el cuadrante contiguo, se tendrá: $ACB' = 180° - (\beta' + \alpha)$. Si ambas lineas están separadas por un cuadrante entero como CA y CB'', se tiene: $ACB'' = 180° + (\beta'' - \alpha)$. Por último si las lineas estando en cuadrantes contiguos, la una está al Este y la otra al Oeste, se tendrá: $ACB''' = \beta''' + \alpha$.

144º El paralelismo de los meridianos magnéticos en toda la extension del polígono que se mide, dá á la brújula una gran superioridad sobre los demas instrumentos; porque si se toman los ángulos azimutales en los dos extremos de una linea, deben diferir exactamente 180°, ó bien ser numéricamente iguales cuando se lean por cuadrantes. Si en *A* (fig. 97ª) se tiene la indicacion $SAB = \beta$, al observar en *B* deberá hallarse $NBA = \beta$. La primera observacion se llama *directa* y la segunda *inversa:* cuando se practican las dos, se obtiene inmediatamente una comprobacion que hace al resultado mas digno de confianza, y suministra un medio de descubrir alguna atraccion irregular, como verémos mas adelante.

Otra gran ventaja de la brújula consiste en que basta estacionar en un punto *C* (fig. 98ª), desde el cual se distingan otros dos *A* y *B* conocidos de posicion, para poder determinar la del primero. La resolucion analítica de este caso se dió en el núm. 87º, y la figura actual indica que se resuelve tambien gráficamente con mucha facilidad trazando por los puntos *A* y *B* ya situados en el plano, las dos lineas que formen en *A B* los ángulos α y β medidos en *C*. Para evitar cualquiera equivocacion respecto de la direccion de las lineas, téngase presente que en *A* y *B* deben tomarse los cuadrantes opuestos á los anotados en *C;* el ángulo α por ejemplo, medido en este último punto segun la figura, será *N E* (*Nor-Este*); miéntras que en *A* se construirá *S O* (*Sur-Oeste*). Todo consistirá en cambiar las letras *N* por *S*, *E* por *O* y viceversa. Se ve que este modo de fijar un punto dá absolutamente el mismo resultado que si se hubiese situado por intersecciones desde *A* y *B*, con la ventaja de que no se tiene necesidad de ocupar mas que una estacion.

145º La brújula se usa en la planometría aplicando cualquiera de los tres métodos generales que se han explicado; pero mas comunmente se emplea en su combinacion. A las reglas establecidas en los Capítulos precedentes solo añadirémos como prevenciones generales, que siempre que el terreno lo permita, se escojan directrices de suficiente longitud para no temer el efecto de la exentricidad del telescopio; que cuando desde algunos puntos se descubra un vértice trigonométrico, ó bien cualquiera otro objeto, se le dirijan visuales que sirvan de comprobacion; que se procure siempre tomar desde cada estacion tanto el azimut directo, esto es, el del punto que siga en el sentido de la marcha, como el azimut inverso, ó sea el del lado que preceda; por último, que al leer las indicaciones angulares se coloque la vista perpendicularmente sobre la punta de la aguja, á fin de evitar que con una visual oblicua se vea proyectada en otro punto de la graduacion.

Como modelo de la disposicion del registro para un levantamiento á rumbo y distancia, tomo el siguiente por referirse á un polígono sencillo que forma parte de los numerosos trabajos de este género ejecutados en 1857 por la Seccion Topográfica de la Comision del Valle de México. La figura 99ª es el cróquis de este polígono medido con otros varios para configurar los detalles del pueblo de Mixcoac; pero tanto en el cróquis como en el registro se han suprimido las ordenadas que fijan aquellos detalles respecto de las directrices, pues en la pág. 199 se ha dado ya la forma conveniente para inscribir las ordenadas en las columnas que están despues de la que corresponde á las distancias.

En estas medidas se tomaban los azimutes directo é inverso contados por cuadrantes, estimándose cuartos de grado, y en caso de hallar alguna pequeña diferencia se inscribia el valor medio. Por ejemplo, en la estacion *5* al observar la *6*, el azimut directo fué 64° 45′ *SE*; y en la estacion *6* al visar la *5* se obtuvo 64° 30′ *NO* por azimut inverso, por lo cual el directo adoptado es 64° 37.′5 *SE*.

Las cuatro primeras columnas son las que se llenan con los datos inmediatos del terreno: verémos en seguida cómo se forman las demas y el modo de aplicar los guarismos que contienen, tanto para comprobar y corregir la operacion sin necesidad ni aun del cróquis, como para proceder á la construccion definitiva del polígono.

POLIGONO *n°*......... LEVANTADO CON BRUJULA.

Estaciones.	Puntos observados.	RUMBOS.	Distancias	*N*	*S*	*E*	*O*	NOTAS.
1	2	81° 00′ *NO*	178ᵐ3	27ᵐ89	,,	,,	176ᵐ10	
2	3	70 00 *SO*	129. 5	,,	44ᵐ29	,,	121. 69	
3	4	61 30 *SE*	63. 2	,,	30. 20	55ᵐ63	,,	
4	5	58 30 *SE*	47. 8	,,	24. 97	40. 76	,,	
5	6	64 37.5 *SE*	158. 1	,,	67. 13	143. 16	,,	
6	7	65 37.5 *SE*	245. 4	,,	101. 33	223. 52	,,	
7	8	16 00 *NE*	87. 6	84. 21	,,	24. 14	,,	
8	9	00 00 *N*	59. 9	59. 90	,,	,,	,,	
9	10	52 00 *NO*	132. 3	81. 45	,,	,,	104. 25	
10	1	79 30 *NO*	86. 1	15. 44	,,	,,	84. 70	
		Sumas............	1188ᵐ2	268ᵐ89	267ᵐ92	487ᵐ21	486ᵐ74	
				267. 92			487. 21	
		Diferencias.................		0ᵐ97			0ᵐ47	

Muchas veces se suprime la columna titulada «*Puntos observados,*» porque se supone que desde cada estacion se observa la que sigue; pero esta forma me parece mas general para el caso en que no solo se observen los vértices del polígono, sino algunos otros puntos dentro ó fuera de él.

En el núm. 99º y despues en el 129º se ha visto que sea cual fuere la forma de un polígono siempre puede inscribirse en una figura rectangular, bastando para esto proyectar sus lados sobre dos ejes cualesquiera que se corten en ángulo recto. Este principio que aplicamos á la comprobacion de los levantamientos con la escuadra comparando los lados opuestos del rectángulo que resulta, se aplica tambien de preferencia para comprobar y rectificar las operaciones ejecutadas con la brújula. En efecto, puesto que se conocen los lados k y sus rumbos u, podrán calcularse sus proyecciones........... $x = k$ sen. u, $y = k$ cos. u tomando por eje la meridiana magnética y su perpendicular. Estas proyecciones son las que constan en las cuatro columnas del registro que tienen por título las iniciales de los puntos Norte, Sur, Este y Oeste. Las dos primeras contienen las yy ó sea las proyecciones sobre la meridiana, y las dos últimas las xx ó las proyecciones sobre la perpendicular.

En la triangulacion hemos acostumbrado á contar los azimutes de 0° á 360° partiendo del Norte hácia el Oeste, y vimos allí que basta conocer el valor numérico de un azimut para saber desde luego en qué cuadrante se halla el punto observado; pero el mismo resultado se obtiene con las iniciales que acompañan á los rumbos tomados con la brújula cuando se cuentan por cuadrantes, pues por ejemplo, la abreviatura $N\,O$ indica que el punto correspondiente se halla en el primer cuadrante, y se sabrá desde luego que su y debe contarse hácia el Norte, y su x hácia el Oeste. Las iniciales $S\,E$ indican que la y se ha de tomar hácia el Sur y la x hácia el Este, y así en las otras combinaciones $N\,E$ y $S\,O$. De este modo, calculadas las dos proyecciones de cada lado, se van inscribiendo en las cuatro columnas del registro bajo sus títulos correspondientes, sin que pueda haber equivocacion alguna, teniendo presente que la y se apunta en la columna cuya inicial es la primera del rumbo, y la x en la que tiene por título la segunda inicial del mismo rumbo.

146º Antes de pasar adelante indiquemos un modo de abreviar el cálculo de las proyecciones, pues aunque muy sencillo, es tambien laborioso cuando se trata de polígnos de muchos lados. La tabla que va al fin de este libro con el título de «*Tabla de coordenadas*» (*), está calculada por las fórmulas $x = k$ sen. u, $y = k$ cos. u para todos los valores de k desde 1 hasta 9, y para los de u de 15′ en 15′ que es la aproximacion con que se toman comunmente los ángulos con la brújula.

La disposicion de la tabla es esta: los grados de los azimutes desde 0° hasta 45° constan en la primera linea y los minutos, de cuarto en cuarto de grado, en la primera columna. Desde 45° hasta 90° los grados van en la última linea y los minutos en la última columna. En las columnas segunda y penúltima están las distancias de 1 á 9, y en frente de ellas, y en las dos columnas que corresponden á cada número de grados, constan los valores de las proyecciones x é y. Estos están aproximados hasta la quinta decimal, con el objeto de que puedan obtenerse con exactitud aunque la distancia dada sea considerable.

Supongamos que se quiera saber cuáles son las coordenadas del extremo de una linea de 874.m5 de largo, y cuyo azimut sea de 37° 45′. Como la tabla dá separadamante los valores de x é y para las distancias de 8, de 7, de 4 y de 5, no habrá mas que mover el punto que separa la parte entera de la decimal, para obtener los que corresponden á 80, 800, &c., á 70, 700, &c. Se comenzará, pues, por buscar en la tabla al azimut dado, y se tomarán los valores de las proyecciones para 800, 70, 4 y 0.5 cuya suma suministra los que corresponden á la distancia dada. Hé aquí el cálculo:

k	x	y
Por 800m.............	489.m77.............	632.m55
„ 70	42. 86.............	55. 35
„ 4	2. 45.............	3. 16
„ 0.5.............	0. 31.............	0. 40
Por 874.m5........	x = 535.m39	y = 691.m46

Solo se han aproximado estas cantidades hasta la segunda decimal, siguiendo la regla general de aumentar una unidad á la última cuando la cifra que se desecha es mayor que 5.

(*) Los ingleses la llaman «Traverse table,» denominando *departure* á la absisa y *latitude* á la ordenada; pero me han parecido muy impropias estas denominaciones.

Aunque no es frecuente que los rumbos tomados con la brújula se lean con mas aproximacion que la de un cuarto de grado, la tabla puede servir para otras fracciones mas pequeñas haciendo la interpolacion. Por ejemplo, si con la distancia anterior el azimut hubiera sido 37° 50′, se calcularian las proyecciones para 38° 00′ y se interpolarian entre estas y las precedentes por los 5′ de exceso respecto del primer azimut, de este modo:

k	x	y
Por 800^m	492^{m}53	630^{m}41
„ 70	43. 10	55. 16
„ 4	2. 46	3. 15
„ 0. 5	0. 31	0. 39
Por 874^{m}5	$x =$ 538^{m}40	$y =$ 689^{m}11

La diferencia por 15′ es en la absisa $+$ 3^{m}01, y en la ordenada — 2^{m}35, de modo que por 5′ serán $+$ 1^{m}00 y — 0^{m}78 respectivamente. Los valores que corresponden al azimut 37° 50′ serán, pues: $x =$ 536^{m}39, $y =$ 690^{m}68.

Cuando en la cantidad dada haya *ceros* intermedios, deben tomarse en cuenta como en el caso siguiente. Sean $k =$ 3002^{m}7 y $u =$ 75° 30′.

k	x	y
Por 3000^m	2904^{m}44	751^{m}14
„ 2	1. 94	0. 50
„ 0. 7	0. 68	0. 18
Por 3002^{m}7	$x =$ 2907^{m}06	$y =$ 751^{m}82

Nótese que cuando el azimut, como en este último ejemplo, pasa de 45°, la x corresponde á la y del complemento y viceversa, por lo cual están invertidos los títulos de las columnas en la parte inferior de la página.

147º Por las explicaciones que preceden se comprenderá lo fácil que es llenar las columnas del registro que llevan por títulos las iniciales N, S, E y O, valiéndose de los datos *rumbo* y *distancia* obtenidos para cada lado del polígono. Se comprenderá tambien que las sumas de las cantidades inscritas en las columnas tituladas N y S

dán los lados del rectángulo circunscrito al polígono, y los cuales son paralelos á la meridiana; así como las sumas de los guarismos de las otras dos columnas suministran los lados del mismo rectángulo dirigidos de Oriente á Poniente. Si son iguales entre sí las dos primeras sumas, lo mismo que las dos últimas, ó por lo ménos si difieren muy poco, se deducirá fundadamente que la operacion de campo fué bien ejecutada, y se tendrá la seguridad de que el polígono *cierra* bastante bien.

Este método es precioso, no solo porque inmediatamente dá idea de la bondad de la operacion sin necesidad de la construccion previa del polígono, en la cual influyen siempre los errores gráficos, sino porque permite distribuir entre todas las distancias la pequeña diferencia que casi siempre se halla entre las sumas de sus proyecciones, y suministra desde luego las coordenadas de los vértices para hacer en seguida la construccion.

En el registro que nos sirve de ejemplo se encuentra 0^m97 de diferencia entre los lados del rectángulo dirigidos de Norte á Sur, y 0^m47 entre los dirigidos de Oriente á Poniente. Es de suponerse que esas diferencias provienen de la acumulacion de pequeños errores cometidos en todos los lados, y en igualdad de circunstancias debe admitirse como muy probable que los errores correspondientes á los lados sean proporcionales á sus longitudes. De estas consideraciones se deduce la regla general para distribuir las diferencias finales, formulada en la siguiente proporcion: *La suma de todas las distancias es á la diferencia total de sus proyecciones, como cada distancia es á la correccion que corresponde á su proyeccion.*

Bien

No estoy conforme, pues debe ser: La suma de todas las distancias es á la mitad de la dif. total de las proyecciones como cada distancia es á la correccion que corresponde á su proyeccion.

La distribucion del error, ó sea la *compensacion*, como se llama comunmente, debe hacerse tanto á las proyecciones sobre la meridiana como á las proyecciones sobre su perpendicular, tomando en cada caso la diferencia total correspondiente, quiere decir, la de las columnas N y S en el primer caso, y la de las E y O en el segundo. Designando en general por d una de esas diferencias, por p el perímetro del polígono, ó sea la suma de todas las distancias, y por k cualquiera de ellas, la regla ántes establecida equivale á la fórmula siguiente, en la que c representa la correccion que corresponde á la proyeccion del lado k.

$$c = \frac{d}{p} k$$

Para aplicarla corrijamos las dos proyecciones del primer lado $k = 178^{m}.3$ usando respectivamente $d = 0^{m}.97$ y $d = 0^{m}.47$. La primera correccion será:

$$\frac{0.97}{1188.2} \times 178.3 = 0.000816 \times 178.3 = 0^{m}.15$$

Para la segunda se tiene:

$$\frac{0.47}{1188.2} \times 178.3 = 0.000396 \times 178.3 = 0^{m}.07$$

Como la columna *N* dá una suma mayor que la *S*, y la proyeccion del lado que consideramos se halla en la primera, harémos sustractiva la correccion $0^{m}.15$. Por una razon análoga harémos aditiva la otra correccion $0^{m}.07$, de modo que las proyecciones correctas del primer lado serán $27^{m}.74$ sobre el meridiano y $176^{m}.17$ sobre su perpendicular.

El cociente $\frac{d}{p} = 0.000816$ que representa la correccion por la unidad de distancia, es constante para las cantidades de las dos primeras columnas *N* y *S*; así como 0.000396 lo es para las dos últimas *E* y *O*. Una vez hechas todas las correcciones, la combinacion de las proyecciones correctas sirven para hallar las coordenadas de todos los vértices del polígono referidas á cualquiera de ellos como orígen. Conviniendo en considerar positivas las ordenadas hácia el Norte y las absisas hácia el Oeste, como se hizo en la triangulacion, darémos el signo + á las cantidades de las columnas primera y última, y el signo — á las de las dos intermedias. Tomando, ademas, por orígen la estacion 8, formarémos la tabla siguiente que contiene las proyecciones ya corregidas y las coordenadas de los vértices.

Estaciones.	*N* +	*S* —	*E* —	*O* +	*y*	*x*
1	$27^{m}.74$	,,	,,	$176^{m}.17$	$+ 156^{m}.6$	$+ 189^{m}.0$
2	,,	$44^{m}.40$	,,	121. 74	+ 184. 3	+ 365. 2
3	,,	30. 25	55. 60	,,	+ 139. 9	+ 486. 9
4	,,	25. 01	40. 74	,,	+ 109. 6	+ 431. 3
5	,,	67. 26	143. 10	,,	+ 84. 6	+ 390. 6
6	,,	101. 53	223. 42	,,	+ 17. 3	+ 247. 5
7	84. 14	,,	24. 11	,,	— 84. 1	+ 24. 1
8	59. 85	,,	,,	,,	0. 0	0. 0
9	81. 34	,,	,,	104. 30	+ 59. 8	0. 0
10	15. 37	,,	,,	84. 73	+ 141. 2	+ 104. 3
	$268^{m}.44$	$268^{m}.45$	$486^{m}.97$	$486^{m}.94$		

Se ve desde luego que las sumas de las cantidades de *N* y *S* han resultado ya sensiblemente iguales, lo mismo que las de *E* y *O*. Respecto al modo de calcular las coordenadas, la regla consiste en sumar con sus signos las proyecciones, partiendo del punto que se toma por orígen hasta el que precede al vértice cuyas coordenadas se quieren obtener. Así, por ejemplo, para calcular la ordenada y la absisa de la estacion *4*, tendrémos:

8	+ 59ᵐ85	0ᵐ00
9	+ 81. 34	+ 104. 30
10	+ 15. 37	+ 84. 73
1	+ 27. 74	+ 176. 17
2	— 44. 40	+ 121. 74
3	— 30. 25	— 55. 60
4	$y =$ + 109ᵐ65	$x =$ + 431ᵐ34

Estos cálculos se comprueban continuando las sumas algebraicas hasta volver á llegar al orígen ó punto de partida cuyas coordenadas deben resultar nulas.

4	$y =$ + 109ᵐ65	$x =$ + 431ᵐ34
4	— 25. 01	— 40. 74
5	— 67. 26	— 143. 10
6	— 101. 53	— 223. 42
7	+ 84. 14	— 24. 11
8	$y =$ 0ᵐ0	$x =$ 0ᵐ0

Obtenidas así las coordenadas de todos los vértices se aplican á la construccion del polígono, al cálculo de su superficie, &c.

Tal es la marcha general que debe seguirse al aplicar este sencillo y utilísimo procedimiento; mas si algunas de las lineas ó de los ángulos medidos en el terreno se juzgan dignos de ménos confianza que los demas, puede el ingeniero hacerles sufrir una correccion algo mas fuerte al distribuir la diferencia final, en lugar de hacer la compensacion proporcionalmente al valor de cada distancia. En el polígono que nos sirve de ejemplo, la diferencia de 0ᵐ97 es bastante considerable atendida la pequeñez del perímetro, y acaso pudiera atribuirse con fundamento la mayor parte del error á los rumbos tomados en las estaciones *3* y *4*, porque siendo muy pequeñas las distancias, acaso se haya hecho sentir la influencia de la excentricidad del telescopio de la brújula con que se hizo esta medida. Sin embargo de esto, creo que si no se tiene una fuerte presuncion de la inexactitud de una parte del polígono, lo mas prudente será abstenerse de hacer correcciones arbitrarias, y aplicar de preferencia el método que se ha explicado.

148º Cuando se levanta el plano de un polígono con la brújula por coordenadas polares, parece á primera vista que tambien podria comprobarse la operacion sumando los ángulos interiores, y comparando el resultado con la suma teórica $(n - 2) \times 180°$; sin embargo, nada seria mas falaz que semejante prueba, en atencion á que sirviendo los rumbos observados para deducir los ángulos del polígono, el mismo azimut entra con signos diferentes al deducir dos ángulos contiguos, y por consiguiente desaparece en la suma sin dejar vestigio del error que podria tener. Sea, en efecto, $A\,B\,C\,D$ (fig. 100ª) un cuadrilátero en que se han tomado los rumbos α, β, γ y δ por cuadrantes como lo indica la figura. Sus ángulos interiores serian:

$$\begin{aligned}
A &= 180° - (\alpha + \delta) \\
B &= + (\alpha + \beta) \\
C &= 180° - (\beta + \gamma) \\
D &= + (\gamma + \delta)
\end{aligned}$$

cuya suma siempre es: $A + B + C + D = 360°$, sean cuales fueren los errores de los azimutes observados.

Los errores de los rumbos pueden provenir ó de una simple equivocacion en la lectura, ó de alguna causa de atraccion local que ejerciendo su influencia en la aguja, la desvía de su direccion normal. Si en este último caso la desviacion fuese la misma en todas las estaciones, ni podria descubrirse ni tampoco habria gran interes en hacerlo, puesto que conservando la brújula su paralelismo, aunque la orientacion quedase incorrecta, todas las demas operaciones de campo y de gabinete se harian con la misma facilidad y exactitud. Sin embargo, nunca ó casi nunca es constante la desviacion; porque para que lo fuera seria preciso admitir que la causa que la produce obraba siempre á la misma distancia, lo cual es muy difícil, si no imposible, cuando se sigue con la brújula una linea mas ó ménos sinuosa.

Para descubrir el error de un azimut, ya sea que provenga de una atraccion anormal, ya de una equivocacion de lectura, lo que debe hacerse es tomar siempre los dos rumbos directo é inverso de cada linea, que debiendo ser iguales si se cuentan por cuadrantes, ó suplementarios si se cuentan hasta 360°, se comprueban necesariamente el uno al otro. Supongamos, en efecto, que exista en M (figura 101ª), una masa ferruginosa ú otro centro cualquiera de atraccion que obre sobre la aguja, la cual atraida á la vez en la direccion $A\,N$ por la accion directriz de la tierra, y en la de $A\,M$ por la causa accidental supuesta, tomará una posicion intermedia formando con su situacion normal un ángulo x. Si llamamos α el azimut correcto de $A\,B$, la lectura que obtendriamos seria $\alpha' = \alpha - x$. Por la misma razon, en B se obtendria $\alpha'' = \alpha + y$, de suerte que en lugar de ser nula la diferencia de las dos indicaciones, daria $\alpha'' - \alpha' = x + y$. Desde luego podria atribuirse este resultado á un error de lectura; pero si repetidas las observaciones se encontrasen siempre diferentes el azimut directo y el inverso, no quedaria duda de la existencia de una causa irregular de atraccion.(*) Muchas veces sucede que no se notan esas atracciones accidentales en una parte de la linea poligonal que se mide; porque la desviacion que producen en la brújula es inferior á la aproximacion con que pueden leerse los ángulos. Supongamos que en A y B (fig. 102ª) no ha habido diferencia sensible entre el rumbo directo y el inverso; pero si el azimut directo de $B\,C$ es β y el iuverso $\beta - x$, es claro que la atraccion comienza á hacerse sentir en C, puesto que β es correcto por haberse hallado en B la misma indicacion que en A. La desviacion en C es, pues, x, de modo que al tomar el azimut de D deberá hacerse la correccion x á la lectura que dé la aguja y que seria $\gamma - x$. Conociendo así el azimut correcto de D, se sabrá tambien cuál debe ser la indicacion en este último punto al tomar el inverso, y comparándola con la que dá la aguja, se obtendrá una diferencia y, que es la

(*) Son muy frecuentes las atracciones anormales en los terrenos montañosos porque casi siempre las rocas que los forman contienen sustancias magnéticas. Los topógrafos de la Comision del Valle en 1857, descubrieron en las inmediaciones de la colina de Chapultepec una desviacion de 2° 30′, originada por alguna de las sustancias que constituyen aquella roca. En otras ocasiones he hallado desviaciones de mas de 3°. Por varios experimentos modernos se sabe que obran sensiblemente sobre la brújula muchos cuerpos que no contienen ninguna de las materias consideradas como magnéticas.

desviacion en D, procediendo así sucesivamente de estacion en estacion.

Por lo que precede se ve que observando en cada vértice el rumbo directo y el inverso, se puede: 1º Corregir una equivocacion de lectura. 2º Descubrir una causa de atraccion irregular. 3º Investigar desde qué punto comienza á hacerse sentir. 4º Corregir las observaciones, ó determinar en cada estacion el valor angular de la desviacion de la aguja.

La propiedad que tienen los azimutes directo é inverso de ser, segun el modo de contarlos, iguales ó suplementarios, permite abreviar mucho las operaciones del terreno, no estacionando en todo los vértices del polígono sino haciendo la doble observacion en uno y omitiéndola en el siguiente, como lo indica la fig. 103ª, en la cual he representado con lineas continuas las meridianas de los puntos A, C y E en que supongo tomados los rumbos. Es evidente que, por ejemplo, en F, el azimut de FA contado desde el Sur es el mismo que el observado en A, y contado desde el Norte, esto es: $NAF = SFA$, de suerte que para indicar los cuadrantes deben convertirse las iniciales N y E en S y O respectivamente y viceversa. Aunque suele adoptarse este procedimiento cuando se desea trabajar con rapidez, tiene el grave inconveniente de que no pueden comprobarse las operaciones, como sucede tomando los dos azimutes en cada estacion.

149º El método que se ha expuesto en los párrafos precedentes para comprobar y corregir las operaciones hechas con la brújula valiéndose del cálculo de las proyecciones, es tambien aplicable á las operaciones ejecutadas con cualquiera otro goniómetro, pues todo consiste en deducir los ángulos que todos los lados medidos forman con una misma linea, ya sea la meridiana ó cualquiera otra elegida arbitrariamente. La ventaja real de la brújula es la de suministrar directamente esos ángulos; miéntras que haciendo uso de otro instrumento es preciso calcularlos, naturalmente con un aumento de trabajo. Sin embargo, es posible sistematizar las observaciones de tal manera que con el teodolito, el grafómetro, el pantómetro, &c., se obtengan tambien por la medida directa sobre el terreno los ángulos formados con una sola linea, por ejemplo, con el primer lado del polígono. Sea en efecto AB (fig. 104ª) el primer lado, y supongamos que la primera estacion se hace en B. Despues de nivelado el goniómetro se dirige á la señal A, y admitamos que fijado el instrumento en esa direccion, indique la graduacion g. Si en seguida se dirige su parte superior á C y suponemos que la lectura sea G, es claro que el ángulo que forma el segundo lado $B\,C$ con el primero es $G-g$. Esta parte de la operacion no ofrece diferencia con la simple medida de un ángulo cualquiera; pero si dejando fijo el tornillo de presion para que los vernieres continúen señalando la graduacion G, se traslada el goniómetro á C, y por su movimiento general se dirige á la estacion anterior B, es claro que la primera visual en que los vernieres indicaban g, se hallará en la direccion $C\,M$, paralela á $A\,B$, puesto que $A\,B\,C = M\,C\,B = G-g$. Fijado el instrumento en esa posicion se dirige su parte superior á D, y si llamamos G' su nueva indicacion, como el punto de partida permanece dirigido hácia M, tendrémos que $G'-g$ será el ángulo que $C\,D$ forma con el primer lado $A\,B$. Dejando los vernieres en la graduacion G' traslademos el goniómetro á D, y dirijámoslo por su movimiento general á C: entónces el punto de partida g quedará en la direccion $D\,M'$; luego si visamos el vértice siguiente E en virtud del movimiento de la parte superior, resulta tambien que siendo G'' su indicacion, el ángulo $G''-g$ será el formado por $D\,E$ con el primer lado. Se prosigue así de vértice en vértice siguiendo la regla general de visar primero la estacion que acaba de dejarse por medio del movimiento general del instrumento sin alterar la última graduacion obtenida, y en seguida la estacion que sigue por medio del movimiento particular del telescopio y la alidada. Es claro que todas las lecturas deben hacerse con el mismo vernier, aun cuando para lograr mayor exactitud se tome el promedio de los minutos y los segundos que resultan de todos ellos; y tambien lo es que si la operacion está bien ejecutada, llegando al último punto A al dirigir la primera de aquellas visuales deberá quedar el telescopio en la direccion de la linea $A\,B$ ó de su prolongacion, segun que sea par ó impar el número de vértices.

Es cómodo que la primera lectura g sea el *cero*, esto es, el punto en que coinciden los ceros del limbo y del nonius con que se anotan las graduaciones sucesivas G, G', &c., que serán en tal caso los ángulos mismos que se buscan. Si no fuere así, será preciso añadir 360° á esas indicaciones en aquellos casos en que resulten menores que g.

Debo hacer notar que en la marcha que he supuesto se va dejando el polígono á la izquierda, y que si se numeran las estaciones al paso que se van ocupando, resulta que en las de órden par, el punto de partida g queda dirigido hácia la derecha como sucede en C, E y A; miéntras que en las de órden impar, como B, D y F, queda hácia la izquierda. Segun esto, los ángulos obtenidos en el primer caso son los formados por los diversos lados del polígono con la *prolongacion* del primero $A\,B$, y por el contrario, los que se obtienen en las estaciones impares son los formados con el lado mismo, esto es, considerando que el punto de partida g queda á la izquierda del observador en el sentido de su marcha. Esta aclaracion es de importancia para evitar errores, pues siendo necesariamente suplementarios los dos ángulos que una linea forma con otra y con la prolongacion de esta, es preciso tomar en cuenta la direccion del punto de partida para no exponerse á invertir la de alguno de los lados cometiendo un error de 180°. El modo mas sencillo de evitarlo, en mi concepto, es suponer que el punto de partida queda siempre á la izquierda, para lo cual basta sumar ó restar 180° á los ángulos obtenidos en las estaciones pares, segun que estos sean menores ó mayores que 180°. El primer caso se ve en el punto E, en el que la adicion de 180° dá el mismo resultado que si se hubiera medido el ángulo partiendo de la direccion $E\,m''$ y continuando hácia la derecha hasta $E\,F$. El segundo se ve en C, pues que la sustraccion de 180° produce el ángulo $m\,C\,D$.

Aunque la adicion ó la sustraccion de dos cuadrantes sea una operacion muy sencilla, puede evitarse haciendo sobre el terreno mismo una correccion equivalente. Al ocupar cada estacion despues de la primera, si se invierte el telescopio ántes de dirigir el instrumento al punto que acaba de dejarse, se obtendrá tambien la inversion del punto de partida. Así, por ejemplo, en C, si no se invierte el telescopio, hemos visto que la indicacion g quedará dirigida hácia M; pero si se invierte ántes de visar el punto B, resultará dirigida hácia m, y entónces, si despues de fijado el instrumento se dirige el telescopio á D, se obtendrá desde luego el ángulo $m\,C\,D$.

La inversion del anteojo en todas las estaciones puede hacerse ó bien quitándolo de sus apoyos si la construccion del instrumento se presta á ello como sucede en los teodolitos ingleses, ó bien solamente en virtud de su movimiento al derredor del eje horizontal cuando los telescopios pueden dar una vuelta entera como en los teodolitos americanos. A la verdad, usando estos últimos es inútil la inversion, porque generalmente su limbo está dividido en dos semicírculos, cada uno de los cuales tiene numerada la graduacion de 0° á 180°, y por consiguiente cualquiera de sus divisiones tendrá la misma cifra que la diametralmente opuesta. Con esta disposicion no se pueden, pues, medir directamente ángulos mayores que dos cuadrantes, sin tener que hacer la adicion de 180°; pero fácilmente se concibe que con una poca de atencion, y sobre todo, con el auxilio del cróquis que debe irse formando á la simple vista al paso que se va avanzando en la operacion, puede ponerse el ingeniero á cubierto de todo error y aun de duda respecto de la verdadera direccion de cada linea.

Obtenidos los ángulos que forman los diversos lados de una figura con una linea cualquiera, puede tomarse la direccion de esta por uno de los ejes de coordenadas, y aplicar las mismas pruebas y compensaciones que se han explicado con motivo del uso de la brújula. Con esos datos solamente, es cierto que el polígono no quedará orientado; pero si se enlaza con un lado trigonométrico ó con cualquiera otra linea que lo esté, se logrará el mismo resultado que si se hubieran medido directamente los azimutes de sus lados.

150º Los teodolitos ingleses y americanos que por lo comun tienen una brújula de buenas dimensiones, se prestan muy bien á la aplicacion de este método consiguiéndose, á la vez que la orientacion del polígono, la ventaja de obtener los ángulos con mas exactitud y de eliminar los efectos de las desviaciones variables de la aguja. Todo consiste en tomar por linea fija la direccion del meridiano magnético tal como la indica la brújula en la primera estacion que se ocupa, y en medir despues los azimutes con la graduacion misma del teodolito. Entremos en algunos detalles.

Puesto en *cero* el teodolito, se nivela, y se le comunica despues su movimiento general hasta que la aguja señale tambien el *cero* de su graduacion, en cuya posicion se fija el instrumento. Es claro que su telescopio, paralelo á la linea *NS* de la brújula, se tendrá entónces situado en el plano del meridiano magnético; luego si se dirige á un punto cualquiera en virtud de su movimiento independiente del de la parte inferior del teodolito, la graduacion señalará el azimut magnético de su nueva direccion, puesto que el *cero* del limbo ha permanecido invariable. La misma operacion repetida en cada uno de los vértices del polígono suministraria los rumbos de sus lados; pero tendria el inconveniente de que si en alguna de las estaciones se hacia sentir la influencia de una causa local de atraccion, los azimutes quedarian erróneos y para corregirlos seria preciso medir el directo y el inverso, procediendo como se ha explicado en el número 148. Por esto es preferible seguir el método expuesto en el número 149, estableciendo el teodolito en cada vértice de manera que la direccion del *cero* queda paralela á la que tenia en la primera estacion. La figura 105ª indica la marcha de la operacion que se supone comenzada en el vértice *1*, y ejecutada con un teodolito cuya graduacion está numerada desde 0° hasta 360°. Los arcos puntuados señalan la posicion en que se coloca el instrumento, esto es, con la misma indicacion que tenia en la estacion precedente; y los arcos continuos indican los azimutes medidos visando el vértice que sigue y contados siempre hasta 360° de izquierda á derecha. Se ve que en las estaciones impares el *cero* queda dirigido hacia el Norte, y en las pares hácia el Sur, por lo cual segun la regla establecida, á las indicaciones que se obtienen en estas últimas debe sumárseles ó restárseles 180° segun que sean menores ó mayores que dos cuadrantes. Si en todos los vértices, excepto el primero, se invierte el telescopio para dirigirlo al punto que precede, se obtendrá desde luego la inversion del *cero*, que quedará invariablemente dirigido hácia el Norte, y se evitará la correccion.

Es muy útil ir anotando tambien las indicaciones de la aguja, tanto porque su comparacion con los azimutes obtenidos dá á conocer si en alguna estacion se desvía de su direccion normal, como porque suministra una prueba de las lecturas del limbo y facilita la designacion del cuadrante en que está el punto observado, la cual puede irse haciendo sobre el terreno mismo.

Los teodolitos americanos son muy propios para seguir este método, porque como he dicho, tienen su graduacion numerada por semicírculos, y sus nonius son dobles, quiere decir, permiten la lectura desde su centro á uno y otro lado. Con estos instrumentos no se tiene necesidad de invertir el telescopio y se pueden obtener directamente los azimutes contados por cuadrantes como lo manifiesta la figura 106ª que representa uno de los muchos polígonos levantados por el ingeniero D. Manuel Fernandez haciendo uso de un *transit* americano. Este trabajo forma parte del sistema poligonal aplicado en grande escala por aquel hábil topógrafo en terrenos en que la triangulacion ofrecia muchas dificultades. Van á continuacion los datos referentes á la fig. 106ª

POLIGONO *n*°......... LEVANTADO CON TEODOLITO.

Estaciones.	RUMBOS.	DISTANCIAS	*N*	*S*	*E*	*O*
1	1° 58′ *S O*	4352^{m}2	,,	4349^{m}6	,,	149^{m}0
2	81 3 *N E*	3986. 8	620^{m}4	,,	3938^{m}2	,,
3	1 19 *N O*	1527. 3	1526. 9	,,	,,	35. 1
4	88 59 *S O*	587. 2	,,	10. 4	,,	587. 1
5	1 14 *N O*	1420. 2	1419. 8	,,	,,	30. 5
6	75 46 *N O*	3234. 1	795. 2	,,	,,	3134. 8
	Sumas......	15107^{m}8	4362^{m}3 4360. 0	4360^{m}0	3938^{m}2	3936^{m}5 3938. 2
	Diferencias	....	2^{m}3	....	....	1^{m}7

Se ve que los rumbos se han tomado con la aproximacion de 1′ que daba el instrumento, por lo cual se calculan por interpolacion las proyecciones de los lados haciendo uso de la Tabla de coordenadas como se dijo en la pág. 233.

Haciendo la compensacion se obtendrán las siguientes proyecciones correctas y las coordenadas referidas á la estacion *3* en que he supuesto el orígen.

Estaciones.	*N* +	*S* −	*E* −	*O* +	*y*	*x*
1	,,	4350^{m}0	,,	149^{m}3	+ 3730^{m}0	+ 3788^{m}7
2	620^{m}0	,,	3938^{m}0	,,	− 620. 0	+ 3938. 0
3	1526. 5	,,	,,	35. 4	0. 0	0. 0
4	,,	10. 7	,,	587. 4	+ 1526. 5	+ 35. 4
5	1419. 4	,,	,,	30. 8	+ 1515. 8	+ 622. 8
6	794. 8	,,	,,	3135. 1	+ 2935. 2	+ 653. 6
Sumas...	4360^{m}7	4360^{m}7	3938^{m}0	3938^{m}0		

Si las circunstancias del terreno permiten que la medida de las líneas corresponda á la exactitud con que pueden obtenerse los ángulos azimutales por medio de la graduacion del teodolito, es seguro que el sistema poligonal debe dar muy buenos resultados, sobre todo, cuando se consigue que los diversos polígonos queden perfectamente enlazados entre sí.

Cuando se aplica con extension el sistema poligonal, es posible convertirlo en un sistema de triángulos, aunque no creo que haya en ningun caso gran interes práctico en hacerlo. La conversion se hace fácilmente valiéndose de las coordenadas de los vértices de los polígonos, para aplicar las fórmulas de la pág. 176, puesto que suministran la distancia comprendida entre dos puntos de coordenadas conocidas, así como la direccion de esas lineas. La combinacion de las direcciones dá á conocer en seguida los ángulos que forman entre sí los diversos lados de la red trigonométrica en que se resuelve la poligonal.

Es claro que una vez obtenidas las coordenadas de todos los vértices de un polígono, segun se ha explicado en este Capítulo, debe adoptarse de preferencia el método de construccion por medio de esos elementos; pero aun en el caso de que se construyan los polígonos por medio de los rumbos y las longitudes de sus lados, siempre se obtiene respecto de los levantamientos con el grafómetro, la ventaja de que si se comete un pequeño error de construccion, la desviacion de los lados existe, pero no se aumenta. La figura 107ª manifiesta que si al trazar el rumbo del lado $A\ B$ se cometió un error que ha trasladado el punto B á B', en este último se construirá el azimut de la linea siguiente, la cual resultará paralela á $B\ C$. Lo mismo sucederá en los vértices siguientes, de modo que el polígono obtenido $A\ B'\ C'\ D'$...... tendrá desde B' sus lados paralelos á los del verdadero $A\ B\ C\ D$, &c. En las mismas circuntancias vimos que con el grafómetro los alineamientos se iban separando gradualmente de los del polígono exacto, á causa de la necesidad de valerse de cada linea trazada para trazar la siguiente. Así, pues, el método de observar rumbos ó direcciones independientes, ofrece esa nueva ventaja respecto del otro en que se miden directamente los ángulos del polígono.

151º La comprobacion de las operaciones de campo comparando las proyecciones de los lados del polígono sobre dos ejes rectangulares puede aplicarse siempre que se midan todos los ángulos y todas las distancias. En otro lugar tuve ocasion de decir que la omision de un lado y de un ángulo no impediria la completa determinacion de la figura en el supuesto de que todas las medidas fuesen exactas; así como en la misma hipótesis tampoco la impediria la omision de la medida de un ángulo en cada triángulo de una cadena; pero tambien he dicho que en la práctica nunca puede admitirse tal suposicion, y precisamente por eso se recogen ciertos datos adicionales que comprueban si los elementos estrictamente indispensables llenan las condiciones geométricas de la figura. Pero sucede muchas veces que por una equivocacion, un descuido, ó por presentarse obstáculos difíciles de vencer, se omite la adquisicion de esos datos adicionales, y entónces aunque no es posible comprobar las operaciones, puede sin embargo determinarse la figura admitiendo forzosamente que todas las medidas son exactas. No aconsejarémos por cierto á un ingeniero que deliberadamente deje de recoger todos los medios de comprobacion que se le presenten; pero me parece conveniente trazarle el método que debe aplicar para suplir la omision de los elementos adicionales, cuando por causas independientes de su voluntad no pueda sujetarse al precepto general de recogerlos.

Para el suplemento de los elementos que falten es preciso admitir como dije ántes, que la figura llena todas sus demas condiciones geométricas; así, por ejemplo, si en un polígono se ha omitido la medida del último lado y del último ángulo, tendrémos necesidad de suponer para suplirlos, que los demas elementos conocidos, más los incógnitos son tales, que proyectando todos los lados sobre dos ejes rectangulares, son iguales las sumas de las proyecciones opuestas que forman los lados paralelos del rectángulo circunscrito. Partiendo de esa hipótesis siempre es posible suplir dos de los elementos que constituyen el polígono, esto es, ángulos y lados; así es que el problema puede reducirse á los tres casos generales siguientes: 1º Suplir la omision de un ángulo y de un lado. 2º Suplir dos lados. 3º Suplir dos ángulos. Trazaré la resolucion de los tres casos valiéndome del método de las proyecciones, pues se ha visto (pág. 213) que siempre se pueden elegir dos ejes cualesquiera y deducir los ángulos que forman con ellos los lados del polígono.

Primer caso. Si se ha dejado de medir la longitud y la direccion de un solo lado tal como DE (fig. 108ª), calcúlense las proyecciones de los demas, y en seguida las coordenadas de todos los vértices del polígono. Las diferencias de coordenadas de los extremos D y E de la linea que falta, permitirán aplicar las fórmulas siguientes, que ya se han aplicado en otra ocasion:

$$\text{tan. } u = \frac{x}{y} \qquad k = \frac{x}{\text{sen. } u} = \frac{y}{\text{cos. } u}$$

De este modo se obtienen la direccion y la longitud de DE, siendo x la diferencia de absisas de sus extremos, é y la de sus ordenadas. Una vez conocidos esos elementos fácilmente se deducen los ángulos que DE forma con los lados adyacentos CD, y EF, puesto que u es el que DE forma con el eje arbitrario al cual están tambien referidas las direcciones de los otros lados.

Si se ha omitido la medida de un lado CD y la direccion de otro DE adyacente al primero, se aplica la misma resolucion para obtener la longitud y la direcciou de la linea CE que une los extremos de los otros lados. Despues en el triángulo CDE se conocerán los lados CE, ED y el ángulo en C, por lo cual podrán determinarse sus otros elementos CD y CDE.

Cuando las omisiones no afectan á lados contiguos, sino que, por ejemplo, se ha dejado de medir la distancia CD y la direccion de AF, lo que debe hacerse es suponer que uno de los ejes de coordenadas coincide con la linea incógnita CD, y calcular las proyecciones de los demas lados DE, EF, AB y BC, inscribiendo sus valores en las cuatro columnas tituladas N, S, E, O, en la pág. 230. Sumando los números de las dos últimas en que supongo inscritas las proyecciones sobre el eje perpendicular á CD, se hallará entre las dos sumas una diferencia que no es otra cosa mas que la proyeccion del lado AF cuya direccion no se conoce. Esta diferencia está representada en la figura por la linea PF, y en el triángulo rectángulo AFP, tendrémos:

$$\text{sen. } PAF = \frac{PF}{AF} \qquad AP = AF \cos. PAF = \frac{PF}{\text{tan. } PAF}$$

ecuaciones que dán la direccion incógnita y la proyeccion del mismo lado sobre el otro eje. Inscrita esta última en el lugar correspondiente, se suman las cantidades de las dos primeras columnas, y la diferencia que se encuentre entre ambas sumas es evidentemente la longitud CD del lado incógnito.

Segundo caso. Si los lados que han dejado de medirse son contiguos como CD y DE, se proyectan todos los demas y se determina como en el primer caso, la longitud y la direccion de CE. Entónces en el triángulo CDE se conoce un lado y los ángulos, por cuyo medio se calculan los otros dos lados.

Cuando los lados incógnitos están separados como sucederia si no se hubieran medido las distancias $C D$ y $A F$, se supone que el eje coincide con una de ellas $C D$, y se proyectan los demas lados como en el primer caso inscribiendo las proyecciones en cuatro columnas. Sumadas las cantidades contenidas en las dos últimas darán por diferencia la proyeccion $P F$, y en el triángulo rectángulo $P A F$ conocerémos un lado y el ángulo opuesto que es la direccion de $A F$. Podrémos, pues, calcular la hipotenusa y el otro lado por las ecuaciones:

$$A F = \frac{P F}{\text{sen. } P A F} \qquad A P = A F \cos. P A F = \frac{P F}{\tan. P A F}$$

Inscribiendo el valor de $A P$, y sumando los números de las dos primeras columnas, se obtendrá por diferencia el valor del otro lado incógnito $C D$.

Tercer caso. Cuando son contiguos los lados cuya direccion no se conoce, se procede como el primer caso para calcular la linea que une sus extremos. Siendo, por ejemplo, $C D$ y $D E$ esos lados se determina la longitud y la direccion de $C E$, con lo cual en el triángulo $C D E$ se conocerán los tres lados y podrán calcularse los ángulos.

Si están separadas las dos lineas cuya direccion se ha omitido, lo que debe hacerse es reducir este caso al anterior, de esta manera: sean $D E$ y $A F$ los lados de que se trata: por F supóngase trazada una paralela á $D E$ y por D otra á la linea $F E$ cuya longitud y direccion son conocidas. Entónces adoptando un sistema cualquiera de ejes, se podrán determinar las proyecciones de los lados $A B$, $B C$, $C D$ y $D H$ cuyas direcciones y longitudes se conocen, y por consiguiente las coordenadas de los vértices A, B, C, D y H con lo que se tienen los datos necesarios para determinar la linea que une los puntos extremos A y H. En el triángulo $A F H$, cuyos tres lados serán conocidos, se pueden determinar los ángulos, que combinados con la direccion de $A H$ dán á conocer las de $A F$ y $F H$ ó $D E$.

Tales son otras de las muchas aplicaciones del método de coordenadas cuya gran utilidad espero que ya habrá apreciado el lector.

152º Despues de haber explicado el uso de la brújula, poco queda que decir respecto del modo de aplicarla á los levantamientos por el método de intersecciones. La marcha general que debe seguirse en este procedimiento se ha expuesto con suficiente amplitud en los Capítulos precedentes, y juzgo inútil entrar en nuevos detalles que no serian mas que repeticiones de lo que allí se dijo. La brújula en atencion á la poca exactitud de sus lecturas angulares, no es muy propia para situar por intersecciones los puntos algo distantes de las bases ó directrices; aunque tiene la ventaja de suministrar directamente los ángulos azimutales que pueden servir para determinar las coordenadas de los objetos visados, aplicando el método de cálculo expuesto en la pág. 173, que es bastante sencillo. Para reunir esta ventaja á la de la exactitud angular, me parece que tratándose de puntos distantes lo mejor será hacer uso de la graduacion del teodolito para obtener los rumbos de las visuales, como se ha explicado en los párrafos anteriores. Esto no obstante, cuando las bases ó directrices han podido ligarse de manera que formen un polígono medido con toda la precision posible, creo que con la brújula sola podrán situarse bastante bien los demas detalles del terreno por el método de intersecciones dirigiéndoles dos ó mas visuales desde los vértices del polígono fundamental.

153º Réstame solo exponer el modo de determinar la declinacion de la aguja magnética, por ser un dato indispensable para referir las orientaciones al meridiano astronómico, y exigirlo la ley de 2 de Agosto de 1863. Esa cantidad puede hallarse trazando la meridiana por cualquiera de los métodos que se han explicado en el Capítulo V, y midiendo con la brújula su azimut magnético, el cual no es otra cosa mas que la declinacion. En general, conociendo el azimut astronómico de una linea cualquiera, y el magnético que dá la aguja, su diferencia será la declinacion que puede suponerse constante en una extension de terreno bastante considerable. Si el meridiano astronómico queda al Occidente del magnético partiendo del Norte, como se verifica al presente en toda la República, la declinacion es oriental, y en el caso contrario occidental.

La ley ántes citada exige no solo el valor de la declinacion, sino ademas, la fecha en que se ha obtenido, pues es una cantidad que aunque lentamente, va variando con el trascurso del tiempo. En la actualidad parece que está decreciendo en nuestro país, aunque probablemente no en todas partes de una manera uniforme. En nuestros Estados septentrionales el decremento anual es acaso de $2'$; miéntras que en la capital he hallado $1.'4$, y en los Estados meridionales debe ser menor todavía, porque la variacion anual decrece con la latitud.

Cuando se mide la declinacion con dos ó mas brújulas comunes, rara vez se encuentran los mismos resultados, á causa de que muchas veces sus *ejes magnéticos*, esto es, las lineas que unen los dos polos del iman, no coinciden exactamente con sus ejes de figura, y esto dá por resultado discordancias superiores á los errores posibles de lectura. Las brújulas mas propias para esta clase de observaciones son las susceptibles de invertirse, bien sea que estén suspendidas en el centro del limbo por medio de un hilo sin torsion, ó bien que su chapa esté construida de manera que pueda apoyarse por sus dos caras opuestas en el pivote que la sostiene. Sea en efecto $N S$ (fig. 109ª), la direccion del eje magnético, y $A B$ el eje de figura: el rumbo verdadero que debia indicar la brújula, suponiendo su *cero* en N', es $N' C N = x$, miéntras que el que se se obtiene es......... $A C N' = x - e$. Si se invierte la aguja, su eje magnético no cambiará de direccion; pero el de figura quedará en $A' B'$, siendo...... $A' N = N A = e$. La nueva lectura obtenida es, pues:............ $A' C N' = x + e$, y tomando el promedio se tendrá:

$$x = \tfrac{1}{2} (N' C A + N' C A')$$

Las dos lecturas $N' CA$ y $N' CA'$ deben ser tambien los términos medios de las indicaciones de ambas puntas de la aguja, pues hemos visto que este es el modo de corregir algun pequeño error de excentricidad que tenga el pivote.

El hecho de que diversas brújulas comunes que se comparan no dén exactamente el mismo resultado, no es por supuesto un obstáculo para hacer uso de ellas. Lo que interesa es que cada ingeniero sepa cuánto es lo que declina su aguja en la region donde trabaja, aunque esta cantidad no sea exactamente la declinacion que corresponda á ese lugar; porque de un modo ó de otro, siempre tiene el medio de hacer bien sus orientaciones. Para disminuir en parte el trabajo de la medida directa de la declinacion, seria conveniente que en las capitales de los Estados y en otras ciudades de importancia se mandasen trazar permanentemente los meridianos astronómicos en una extension de 500 á 1000 metros, y que la ley impusiera á los topógrafos el deber de comparar sus brújulas con el meridiano á fin de obtener sus declinaciones periódicamente, ó al ménos ántes y despues de practicar una medida. De esta manera se reunirán tambien numerosos datos respecto del magnetismo terrestre en nuestro país.

CAPITULO XV.

DE LA PLANCHETA.

154º La *plancheta* es un instrumento que mas bien que el nombre de goniómetro merece el de *goniógrafo*, en atencion á que permite la construccion de los ángulos formados por dos ó mas direcciones sin dar á conocer sus amplitudes expresadas en medidas angulares. Consiste en un cuadrado de madera *A* (fig. 110ª), de 6 á 8 decímetros por lado, y sostenido en un tripié por medio de un juego *C* de tornillos que permiten colocar su parte superior en un plano horizontal. Se emplea para esto un nivel portátil que se coloca sobre la plancheta, y se mueven los tornillos hasta conseguir que en dos posiciones rectangulares la ~~brújula~~ burbuja ocupe la parte central del tubo. A falta de nivel se hace uso de una pequeña esfera de piedra ó de marfil, que indica la horizontalidad de la plancheta cuando permanece inmóvil en su centro.

Los accesorios casi indispensables de este instrumento son una alidada *B* provista de pínulas ó de telescopio, y una brújula llamada comunmente *declinatorio*. La alidada se compone de una regla de metal que puede colocarse en cualquiera direccion sobre la plancheta, y que sirve para trazar en ella las visuales que se dirigen por su telescopio ó sus pínulas. Los hilos de las pínulas y, en su caso, la linea de colimacion del anteojo deben hallarse en el plano vertical que pasa por el borde de la regla, lo cual se comprueba trazando la direccion de una visual cualquiera en dos posiciones inversas de la alidada, y las dos rectas obtenidas de esa manera deben coincidir en toda su longitud.

El declinatorio está formado por una caja rectangular de madera en cuyo interior hay una aguja magnética y su graduacion correspondiente: no difiere de la brújula comun mas que en el limbo, que en lugar de ser un círculo completo, solo consta de dos segmentos divididos y que señalan unos 15 ó 20 grados á un lado y otro de los puntos Norte y Sur. El declinatorio sirve para orientar la plancheta, haciendo que en las diversas estaciones que se van ocupando sus bordes ó una linea cualquiera trazada en su plano, queden en una posicion paralela á la que tuvieron en el punto de partida. Para conseguirlo basta poner la caja del declinatorio en coincidencia con uno de los bordes de la plancheta, y despues mover todo el instrumento al derredor del eje vertical que lo une al tripié, hasta que la aguja señale la misma graduacion en todas las estaciones.

Cuando se hace uso de la plancheta se va construyendo el plano sobre el terreno mismo, pudiendo aplicarla á cualquiera de los métodos de levantamiento, pero mas comunmente al de coordenadas polares y al de intersecciones. Se emplea al efecto una hoja de papel que se pega sobre su cara superior, ó que solo se restira por medio de dos rodillos que tiene á veces la plancheta en dos de sus lados opuestos. Esta última disposicion es mas ventajosa, porque al paso que se llena el papel se va enrollando en uno de los cilindros, y sustituyéndose con el que se desenrolla en el otro.

Para determinar en el plano de la plancheta el punto que corresponde al centro de la estacion que se ocupa se hace uso de una pinza *D*, cuya extremidad inferior sostiene una plomada que se coloca en la vertical de la estacion, y cuyo extremo superior situado en la prolongacion de la misma vertical, marca el punto correspondiente del papel.

155º Para levantar un plano por el método de coordenadas polares se establece la plancheta sobre la primera estacion *A* (fig. 111ª), y despues de señalar en ella el punto *a* que verticalmente le corresponde, se dirige una visual á la estacion siguiente *B*, haciendo de manera que la regla de la alidada pase por *a*, y á lo largo de ella se traza una linea indefinida sobre la cual se toma una parte *a b* proporcional á la distancia *A B* del terreno, segun la escala que se haya adoptado. En seguida se traslada la plancheta al segundo vértice, y despues de hacer que *b* se halle en la vertical de *B*, se pone la alidada en coincidencia con *a b*, y se hace girar todo el instrumento hasta que la visual pase por el primer vértice *A*, con la cual se tendrá orientada la plancheta. Se dirige en seguida otra visual al tercer vértice *C*, haciendo siempre que la regla pase por *b*, y se traza la linea sobre la cual se toma la parte *b c* proporcinal á *B C*. Se lleva despues el instrumento á *C*, donde tambien se hace coincidir el punto *c* con la estacion y se orienta la plancheta por medio de la direccion *c b*, trazándose lo mismo que ántes, la visual dirigida al punto siguiente *D*, y tomando la linea *c d*, proporcional á la del terreno. Continuando así hasta la última estacion *E*, deben hallarse en ella las dos comprobaciones de que la última visual dirigida al punto de partida *A* ha de pasar por su correspondiente *a*, y de que la distancia *a e* ha de ser la que se deduce de *A E*.

Adoptando el método que llamamos de *radiacion*, se consigue la ventaja de no tener que mover la plancheta. Su aplicacion á este método está representada en la figura 112, en la cual se ve que despues de trazadas las visuales dirigidas á los vértices desde el punto *o* que representa el de estacion, se toman en ellas partes proporcionales á las distancias medidas.

156º La figura 113ª representa el modo de emplear la plancheta siguiendo el método de intersecciones. Por ella se comprende que toda la operacion consiste en trazar lineas en las direciones de las visuales desde las extremidades de la directriz, cuya longitud se toma en el papel con arreglo á la escala.

Estas cortas explicaciones son bastantes para comprender que la plancheta es un instrumento que permite trabajar con mucha rapidez, ejecutándose á la vez las operaciones de campo y las de gabinete, y no demandando mas cálculo que el sencillísimo de la reduccion de las distancias á la escala del plano; pero que en cambio debe dar lugar á todos los defectos inherentes á las operaciones gráficas, aumentados en proporcion de las dificultades locales y de la imposibilidad de hacer en el terreno una construccion con el mismo grado de exactitud con que puede practicarse en el gabinete por medio de instrumentos de mayor precision. Por eso la plancheta solo puede emplearse con regular éxito para levantar planos de corta extension cuando los polígonos tienen pocos lados.

A veces se suple la alidada con dos agujas, una de las cuales se clava en el punto que representa la estacion, y la otra en la direccion de cualquiera de las visuales. Las lineas se trazan entónces con una regla comun puesta en coincidencia con ambas agujas.

CAPITULO XVI.

DE LOS TELÉMETROS.

157? Bajo la denominacion general de *telémetros* comprenderé todos los instrumentos que sirven para medir distancias, sin necesidad de la aplicacion material de una unidad de longitud sobre el terreno.

El telémetro que se conoce generalmente con el nombre de *estadía*, resulta del uso combinado de un telescopio cualquiera como el del teodolito, el de la brújula, &c., y de una regla de tres á cuatro metros de longitud, dividida en centímetros, que se llama *mira* ó *estadal*. En el foco del anteojo se colocan dos hilos paralelos cuyo objeto es ver el número de centímetros del estadal interceptados entre ellos, y con este dato venir en conocimiento de la distancia del estadal al punto en que está el telescopio.

Sea $O\,L$ (fig. 114ª), el anteojo cuya retícula tiene dos hilos horizontales que pasan uno por m y el otro por n, de modo que el espacio $m\,n$ que designaré por a, es constante. Si en R se coloca verticalmente la mira dividida en centímetros, una parte de ella, $MN = A$, se verá al traves del ocular O, ocupando el espacio comprendido entre los hilos, puesto que los rayos visuales que parten de M y N, cruzándose en el *centro óptico* del objetivo L, van á pintarse en m y n. De aquí se deduce que si designamos por F la distancia focal, ó sea la del objetivo á los hilos, y por $\triangle$ la distancia del estadal al mismo objetivo, los triángulos semejantes $M\,N\,L$ y $m\,n\,L$, dán la proporcion: $a : A :: F : \triangle$, de donde resulta:

$$\Delta = A\,\frac{F}{a} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Si, pues, se miden las dos cantidades F y a, la ecuacion anterior servirá para hallar la distancia correspondiente á cualquiera valor observado de A. Es bastante dificil la medida exacta de F y a; pero como lo que importa conocer no es el valor absoluto de esas cantidades, sino solamente el de su relacion, es preferible determinarla experimentalmente midiendo una distancia $\triangle'$ del objetivo á la mira y tambien la parte A' de esta que se ve interceptada por los hilos. Con estos datos se obtendrá la relacion que se busca, pues la fórmula anterior dá:

$$\frac{F}{a} = \frac{\Delta'}{A'}$$

que será el valor que se use para todas las observaciones subsecuentes.

Tal es la manera de usar comunmente la estadia; pero á mi modo de ver, la fórmula tiene dos defectos de importancia. Supone en primer lugar que la relacion $\frac{F}{a}$ es constante, lo que no podria suceder mas que siéndolo F y a. Esta última cantidad es indudablemente constante, puesto que suponemos que los hilos son fijos; pero no puede decirse lo mismo respecto de la distancia focal, que varia con la distancia de los objetos que se observan. Es cierto que en los telescopios de poca potencia el valor de F varia muy poco cuando la distancia de los objetos es superior á 50 ó 60 metros; pero tambien se comprende que siendo siempre el espacio a muy pequeño respecto de F, las variaciones de la distancia focal, por leves que se supongan, tienen mucha influencia en el valor de la relacien $\frac{F}{a}$. Ademas de este defecto, la fórmula tiene el de dar las distancias del estadal al objetivo; miéntras que las que se buscan generalmente son las contadas hasta el centro de la estacion.

Con el fin de evitar ambos inconvenientes he procurado desarrollar otra fórmula, derivándola de una teoría mas estricta.

158º La relacion que existe entre la distancia focal F de un lente bi-convexo, correspondiente á una distancia $\triangle$ del objeto que se observa al mismo lente, es: (*)

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} + \frac{1}{\Delta}$$

(*) Vease cualquiera tratado de Optica.

fórmula en la cual f representa el valor que adquiere F cuando la distancia $\triangle$ es infinita. La cantidad f que se designa generalmente con el nombre de distancia focal *principal* ó *estelaria*, es constante para cada lente y marca la posicion del foco cuando se observa un objeto situado á una distancia realmente infinita como las estrellas, ó que al ménos por su magnitud considerable pueda suponerse infinita.

De esta fórmula se obtiene:

$$F = \frac{\Delta f}{\Delta - f}$$

y sustituyendo este valor en la ecuacion (1), resulta:

$$\Delta = \frac{A\,\Delta f}{a\,(\Delta - f)}$$

ó bien:

$$\Delta - f = \frac{A f}{a}$$

En la figura 114ª llamando k la distancia CR del centro del instrumento al estadal, y r la pequeña distancia CP, se tiene:......... $k = \triangle + r$. Eliminando á $\triangle$ entre esta y la ecuacion anterior, obtendrémos:

$$k = A\,\frac{f}{a} + (f + r)$$

Como f y a son constantes, lo será su relacion que designaré por C, y entónces:

$$k = A\,C + (f + r)$$

Para arreglar el foco de un telescopio á fin de distinguir con claridad la imágen de un objeto cercano, se sabe que es preciso aumentar la distancia del objetivo á la retícula por medio del tornillo destinado al efecto; pero esa separacion puede hacerse de dos maneras: ó alejando el objetivo como sucede generalmente en los teodolitos ingleses y americanos, ó por el contrario, alejando la retícula como en los instrumentos de construccion francesa y alemana. En este último caso, puesto que el objetivo permanece inmóvil, es constante la cantidad r que representa la pequeña distancia del centro del instrumento al objetivo; miéntras que en el caso de los instrumentos cuyo foco se arregla moviendo ese lente, el valor de r es ligeramente variable. Esto no obstante, como sus mayores variaciones no exceden de unos cuantos centímetros, y son sensiblemente nulas desde que k llega á un valor de 50 ó 60 metros, no hay inconveniente en suponer que en todos casos es r constante; porque tal hipótesis no produciria error mas que cuando k fuese muy pequeño, lo que sucede pocas veces en la práctica, y aun entónces, todo el error de la distancia obtenida se reduciria á los $0^{m}.02$ ó $0^{m}.03$ que aumenta r. Haciendo, pues, $f + r = c$, la fórmula definitiva será:

$$k = A\,C + c \text{.................................} \quad (2)$$

$C = \frac{f}{a} \qquad c = (f + r)$

159º Tracemos ahora los diversos métodos que pueden seguirse para determinar las constantes C y c que corresponden á un instrumento dado. Desde luego ocurre el de medir directamente el espacio a comprendido entre los hilos, la distancia focal principal f y la pequeña distancia r. La primera de estas cantidades que generalmente no excede de $0^{m}.002$, podria obtenerse con la aproximacion de un décimo de milímetro, valiéndose de una regla dividida en milímetros. La segunda tambien podria medirse con la aproximacion de uno ó dos centímetros desatornillando el lente objetivo y recibiendo sobre una hoja de papel la imágen del sol formada por la convergencia de los rayos que atraviesan el lente: debe acercarse ó alejarse el papel hasta que la imágen tenga la mayor intensidad, y entónces su distancia al lente es el valor de f. Tambien podria hallarse el valor aproximativo de esta cantidad midiendo sobre el telescopio la distancia del objetivo á los tornillos de la retícula despues de haber arreglado el foco para que se distinga con claridad un objeto muy distante. En cuanto al valor de r se obtiene con la misma aproximacion por medio de dos pequeñas plomadas, suspendida la una en el centro del tripié, y la otra en el anillo que sostiene el objetivo, colocando de antemano horizontal el anteojo. Es evidente, en efecto, que la distancia $CP = r$ es la determinada por las plomadas.

He dicho, sin embargo, que este procedimiento nunca puede dar con exactitud el valor de la relacion $C = \frac{f}{a}$, por ser a y f cantidades tan desiguales en magnitud, que un ligero error en ellas influye mucho en el valor de C. Indiquemos otros precedimientos que suministren directamente esa relacion.

Primer método. Si se miden perfectamente dos distancias contadas desde el centro del instrumento, y en el término de ellas se pone el estadal y se anotan los valores correspondientes de A (número de metros y fracciones interceptadas por los hilos), se tendrán las dos ecuaciones:

$$k_1 = A_1\ C + c$$
$$k_2 = A_2\ C + c$$

que combinadas por adicion y sustraccion dán:

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{k_1 - k_2}{A_1 - A_2} \\ c &= \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2) - \tfrac{1}{2}(A_1 + A_2)\ C \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Presentaré como ejemplo las observaciones que hice con un teodolito en cuya retícula puse dos hilos horizontales á distancia de $0^m.002$ uno de otro, con el objeto de que me sirviera tambien como telémetro. En una misma direccion medí espacios de 5 cadenas y sin mover el instrumento observé las partes de la mira que interceptaban los hilos, colocando el estadal sucesivamente en el término de cada uno de esos espacios. Como la cadena tenia algo mas de un decámetro, se corrigieron las distancias tanto por esa causa como por el grueso de las fichas.

k	A
$250^m.98$	$2^m.280$
200. 79	1. 820
150. 59	1. 356
100. 39	0. 911
50. 20	0. 455

Habiendo mas observaciones de las necesarias, combinemos la primera con la última.

$$k_1 = 250^m.98 \qquad A_1 = 2^m.280$$
$$k_2 = 50.20 \qquad A_2 = 0.455$$

$$k_1 - k_2 = 200.78 \qquad A_1 - A_2 = 1.825$$
$$k_1 + k_2 = 301.18 \qquad A_1 + A_2 = 2.735$$

$$C = \frac{200.78}{1.825} = 110.02$$

$$c = 150.59 - 1.367 \times 110.02 = +\, 0^m.19$$

De igual manera pueden hacerse otras muchas combinaciones, el promedio de cuyos resultados dará el valor mas plausible de las constantes.

Segundo método. El valor de c es siempre pequeño, pues se recordará que representa la suma de f y r. Por esa razon es difícil obtener con exactitud esa constante por el procedimiento anterior en atencion á que pequeños errores que existan en las distancias, en los valores de A ó en el de C, bastan para producir uno en c tan grande ó acaso mayor que su valor mismo, y es mejor proceder de esta manera: puesto que los puntos en que se estableció la mira son equidistantes entre sí, restemos uno de otro los valores de A, y su promedio puede tomarse por la indicacion del estadal correspondiente á la equidistancia. Este nuevo método puede expresarse algebraicamente así: siendo q la equidistancia de los puntos observados, se tienen las ecuaciones:

Este método es preferible al primero, pues en cuanto á C es la misma ecuacion bajo otra forma; respecto de c no es otro que el valor de la ec. (3) pero por mayor número de pruebas con puntos equidistantes. Por esta razon pudiera suprimirse alguno de ellos.

$$q = A_1 \, C + c$$
$$2\,q = A_2 \, C + c$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n\,q = A_n \, C + c$$

Restando cada una de la que la sigue, se obtendrán $n - 1$ ecuaciones de la forma:

$$q = (A_2 - A_1)\, C \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

de cuyo promedio se saca el valor de C. Sumando las primeras tendrémos:

$$\frac{(1 + n)\, n\, q}{2} = (A_1 + A_2 + \ldots\ldots A_n)\, C + n\, c$$

de donde se deduce:

$$c = \tfrac{1}{2}\,(n + 1)\, q - \frac{A_1 + A_2 + \ldots\ldots A_n}{n}\, C \ldots\ldots\ldots (5)$$

Si en la serie anterior de observaciones se hacen las restas de los valores sucesivos de A, se tendrán los siguientes resultados:

0^m460
0. 464
0. 445
0. 456
Promedio = 0^m456

Como la equidistancia de los puntos observados es $q = 50^{m}20$, tendrémos

$$C = \frac{50.2}{0.456} = 110.09$$

Para calcular la otra constante por la ecuacion (5), se tiene $n = 5$, y el promedio de las A igual á $1^{m}364$, por lo cual:

$$c = 150^{m}6 - 1^{m}364 \times 110.09 = + 0^{m}44$$

Este método tiene la ventaja de utilizar todas las observaciones, de suerte que por la compensacion de pequeños errores fortuitos, es de esperar que el valor de c se obtenga con bastante exactitud.

Como este método se reduce á los anteriores, puesto que las formulas provienen de las mismas ecuaciones, bastaría reasumir los tres en uno solo los 2º y 3º.

Tercer método. Midiendo la distancia a de los hilos con cuanta precision se pueda, y hallado el valor de C por cualquiera de los métodos precedentes, podrémos determinar un valor de f bastante aproximado, por la ecuacion $f = C\,a$. Si en seguida se mide el espacio r por medio de dos plomadas como se dijo ántes, conocerémos tambien el valor aproximativo de $c = f + r$, y entónces podrá determinarse el nuevo valor de C por las ecuaciones primitivas, á saber: $C = \frac{k - c}{A}$.

En mi teodolito a era de $0^{m}002$, y tomando $C = 110$ se tendrá $f = 0^{m}22$. Hallé ademas $r = 0^{m}14$, por lo cual resulta $c = 0^{m}36$. Con este valor las observaciones dán:

$k - c$	A	C
$250^{m}62$	$2^{m}280$	$109^{m}92$
200. 43	1. 820	110. 13
150. 23	1. 356	110. 79
100. 03	0. 911	109. 80
49. 84	0. 455	109. 54
	Promedio	$C = 110.\ 04$

Creo que este procedimiento es preferible á los anteriores, porque siempre pueden medirse f y r con una aproximacion de 1 á 2 centímetros, que es cuanto basta, y porque todas las observaciones concurren á determinar el valor de C, que es el mas importante por su mayor influencia en la expresion (2) que dá las distancias.

Cuarto método. Cuando el telescopio esté unido á un círculo que permita la medida de ángulos verticales, como se verifica en el teodolito, puede medirse el espacio angular comprendido entre los hilos, y con ese dato determinar de otra manera el valor de C. Es necesario obtener ese ángulo con bastante precision, y como por lo regular la aproximacion con que pueden leerse los ángulos en los círculos verticales de los teodolitos comunes es solo de $1'$, debe repetirse la observacion de este modo: se escoge un punto distante y muy bien determinado que se pone en coincidencia con uno de los hilos horizontales, despues de lo cual se fija el anteojo y se lee la indicacion g del círculo vertical. En seguida con el tornillo de aproximacion que sirve para comunicar movimientos pequeños al telescopio en un plano vertical, se establece la coincidencia del mismo objeto con el otro hilo. Es claro que de esa manera el punto de partida g se habrá trasladado á otra posicion cuya distancia angular á la que ocupaba es precisamente igual al espacio angular de los hilos; pero como la nueva lectura del nonius no daria bastante exactitud, lo que debe hacerse es volver á llevar la señal distante al primer hilo valiéndose de uno de los tornillos que sirven para nivelar, el cual de antemano se habrá colocado en la direccion de la señal. Durante este movimiento la graduacion g pasará á otro punto cuya distancia al primitivo es doble del ángulo de los hilos; luego moviendo de nuevo el telescopio hasta que la señal coincida con el otro hilo se obtendria una lectura angular cuya diferencia con g seria ese ángulo duplo. Se continúa así cuantas veces se quiera moviendo alternativamente todo el instrumento con el tornillo del pié, y el anteojo solo con el tornillo destinado al efecto.

El mismo ángulo de los hilos puede obtenerse por medio del círculo horizontal si el anteojo ó su retícula son susceptibles de girar un cuadrante, á fin de que los hilos queden verticales. En tal caso se opera como en la repeticion comun de un ángulo, á saber, por el movimiento alternativo de todo el instrumento, y de su parte superior.

Si designamos ahora por θ el ángulo $MLN = mLn$ (fig. 114ª), bajo el cual se ve la parte $MN = A$ de la mira á la distancia $k - r$ del objetivo, tendrémos:

$$A = 2\,(k - r)\ \tan.\ \tfrac{1}{2}\,\theta$$

de donde despejando y haciendo $R = \frac{1}{2\ \tan.\ \frac{1}{2}\theta}$, resulta:

$$k = AR + r \qquad \text{(6)}$$

Si comparamos esta fórmula con la (2), se obtiene:

$$C = R - \frac{f}{A}$$

Segun esto, si despues de anotar el valor de A interceptado por los hilos, se mide directamente el ángulo θ leyendo las graduaciones del círculo vertical cuando el hilo central de la retícula se pone en coincidencia con los dos extremos de A, podrá calcularse el valor de R y por consiguiente el de C, sin necesidad de conocer la distancia del estadal. La medida del ángulo θ podrá repetirse procediendo como se ha explicado al indicar el modo de medir el ángulo de los hilos, y en cuanto á f, que entra en el valor de C, podrá adoptarse una cantidad aproximativa, tal como la que resulta de medir sobre el tubo del telescopio la distancia del objetivo á la retícula.

Este método para determinar la constante C, me parece sin embargo mas laborioso y susceptible en general de ménos precision que los anteriores, en razon de que la medida de θ es mas dilatada y difícil que la de k. Supongamos que en la primera de las observaciones ántes citadas se hubiera hallado por la medida directa $\theta = 31' \, 15''$, siendo $f = 0^m.22$ y $A = 2^m.28$. Tendriamos:

2	0.30103	
tan. $\frac{1}{2}\,\theta$	7.65751	
	7.95854	
Compl	2.04146	$R = 110.02$
		$\frac{f}{A} = -0.09$
		$C = 109.93$

En lugar de proceder así, no creo que en la práctica haya inconveniente en aplicar directamente á la fórmula (6) para determinar R y r, los mismos métodos que se han mencionado ántes para determinar C y c, puesto que las ecuaciones (2) y (6) son de la misma forma. En todo rigor, sin embargo, el valor de R no debe considerarse constante mas que cuando la distancia de la mira es de alguna importancia, puesto que en tal caso A es grande y puede suponerse sensiblemente nula la fraccion $\frac{f}{A}$. Entónces R podrá tambien suponerse igual á C, y como en esas circunstancias el ángulo θ es el de los hilos, que es siempre pequeño, no hay inconveniente en sustituir tan θ en lugar de 2 tan. $\frac{1}{2}\,\theta$, con lo que se tiene:

$$C = \cot.\, \theta$$

Siguiendo el método que se ha explicado para usar el círculo vertical, hallé despues de diez repeticiones para medir el ángulo de los hilos de mi teodolito, el resultado: $10\,\theta = 5^\circ\ 12'$, del que se deduce $\theta = 31'\ 12''$. Con este dato tendrémos:

$$\text{Log. cot. } \theta = 2.04211 \ldots\ldots\ldots\ldots \cot \theta = R = 110.18$$

y atendiendo á que $r = 0^{m}\!.14$, la fórmula (6), será:

$$k = 110.2\,A + 0^{m}\!.1$$

Si por el contrario, se adopta la ecuacion (2) con los valores de C y c que se han hallado, se tiene:

$$k = 110\,A + 0^{m}\!.4$$

Esta última es la que me ha servido para calcular la distancia correspondiente á cualquiera valor observado de A.

160º Aunque la aplicacion de la fórmula es muy sencilla, conviene reducirla á tabla luego que se han obtenido los valores de las constantes, porque de esa manera se abrevian mucho las operaciones. Para no tener necesidad de formar una tabla demasiado larga, lo que he hecho es suponer que el dato A se compone de varias partes, como decímetros, centímetros, y milímetros; y entónces he calculado la ecuacion solo para cada decímetro, considerando como correcciones del primer resultado las variaciones debidas á las fracciones mas pequeñas. Supongamos, en efecto, que $A = p + q$; y que la distancia que se busca se compone de $P + Q$. Entónces se tendrá:

$$k = \mathrm{P} + Q = C\,(p + q) + c$$

y poniendo $P = C\,p + c$, se obtiene:

$$k = P + C\,q$$

quiere decir, que calculada la fórmula para ciertos valores de p, y los produtos Cq, una simple adicion dará la distancia que corresponde á A. Pondré como ejemplo algunas lineas de la tabla calculada para mi teodolito con $C = 110$ y $c = 0^{m}\!.4$

A	k	ΔA	Δk	ΔA	Δk
$0^{m}1$	$11^{m}4$	$0^{m}01$	$1^{m}1$	$0^{m}001$	$0^{m}1$
0. 2	22. 4	0. 02	2. 2	0. 002	0. 2
0. 3	33. 4	0. 03	3. 3	0. 003	0. 3
0. 4	44. 4	0. 04	4. 4	0. 004	0. 4
0. 5	55. 4	0. 05	5. 5	0. 005	0. 5
0. 6	66. 4	0. 06	6. 6	0. 006	0. 7
0. 7	77. 4	0. 07	7. 7	0. 007	0. 8
0. 8	88. 4	0. 08	8. 8	0. 008	0. 9
0. 9	99. 4	0. 09	9. 9	0. 009	1. 0
1. 0	110. 4	0. 10	11. 0	0. 010	1. 1
1. 1	121. 4				
....	....				
....	....				
....	....				
2. 7	297. 4				
2. 8	308. 4				
2. 9	319. 4				
3. 0	330. 4				

La característica $\triangle$ antepuesta á A y á k indica la variacion ó correccion de la cantidad correspondiente: son las que ántes designé por q y Q.

Para aplicar la tabla supongamos que la observacion hubiera dado $A = 2^{m}867$.

Por $2^{m}8$	$308^{m}4$
,, 0. 06	6. 6
,, 0. 007........................	0. 8
Por $2^{m}867$................ $k =$	$315^{m}8$

que es el resultado que se hallaria por el cálculo directo de la fórmula $110\,A + 0^{m}4$.

161? He supuesto hasta ahora que es horizontal el eje del telescopio, y por consiguiente perpendicular á la direccion de la mira, la cual se coloca siempre en una posicion vertical; pero cuando el terreno es inclinado debe hacerse una correccion para reducir al horizonte la distancia obtenida por medio de la fórmula, ó de la tabla calculada con ella. Si $P\,Q = k'$ (fig. 115ª) es la superficie del terreno que forma con el horizonte el ángulo $P\,Q\,R = i$, resulta que la parte de la mira vertical interceptada por los hilos es $MN = A$; y que, por tanto, el cálculo de la fórmula con ese elemento dará una distancia K mayor que k', esto es:

$$K = A\,C + c$$

Si se colocara la mira perpendicular al terreno, en lugar de MN se anotaria $M' N = A$ cos. i, y la distancia calculada seria $P\,Q$, ó bien:

$$k' = A\,C \cos. i + c$$

Restando esta ecuacion de la anterior, y sustituyendo K en lugar del producto $A\,C$, por ser sensiblemente iguales, se obtiene:

$$k' = K \cos. i$$

Si se designa ahora por k la distancia horizontal $Q\,R$ del telescopio á la mira, el triángulo $P\,Q\,R$ dá:

$$k = k' \cos. i$$

y eliminando á k' entre estas dos últimas ecuaciones, resulta:

$$k = K \cos.^2 i$$

ó tomando la diferencia entre K y k, se obtiene:

$$K - k = K \operatorname{sen.}^2 i \qquad\qquad (7)$$

Este resultado manifiesta que para hallar la distancia horizontal debe restarse de la cantidad que dá la fórmula el producto de esa cantidad por el cuadrado del seno del ángulo de inclinacion.

El valor de i se obtiene inmediatamente sobre el terreno anotando las indicaciones del círculo vertical del instrumento; porque si es g la lectura cuando el telescopio está horizontal, lo cual se conoce por el nivel que le es paralelo, y G la lectura correspondiente á la visual inclinada, se tiene: $i = G - g$. Aunque la pequeña correccion de la fórmula (7) no exige mucha exactitud en el ángulo i, para evitar algun error de inportancia es conveniente dirigir siempre las visuales paralelamente al terreno, haciendo de manera que el centro del campo del telescopio coincida con un punto de la mira cuya altura respecto de su pié sea igual con corta diferencia á la del telescopio. Suponiendo que esta es de 1^m5 en término medio, se tendrá cuidado de que en el centro del campo quede la division 1^m5 del estadal, y entónces la indicacion G, comparada con g, que corresponde á la horizontalidad del anteojo, dará con suficiente exactitud el ángulo de inclinacion, el cual ya sea de ascenso ó de descenso producirá siempre el efecto de disminuir la distancia que resulta del cálculo.

Haciendo $K = 1^m$, la ecuacion (7) se reduce á tabla para diversos valores de i, y tomando de ella la correccion correspondiente á cada inclinacion por la unidad de distancia, basta multiplicarla por cualquiera valor de K para obtener la correccion que se busca. He calculado la tabla siguiente para cada medio grado de inclinacion.

TABLA PARA REDUCIR AL HORIZONTE LAS DISTANCIAS
MEDIDAS CON LA ESTADIA.

i	$K-k$	Dif.	i	$K-k$	Dif.	i	$K-k$	Dif.
0°0	0m0000	1	10°0	0m0301	29	20°0	0m1170	56
0. 5	. 1	2	10. 5	. 332	32	20. 5	. 1226	58
1. 0	. 3	4	11. 0	. 364	33	21. 0	. 1284	59
1. 5	. 7	5	11. 5	. 397	35	21, 5	. 1343	60
2. 0	. 12	7	12. 0	. 432	36	22. 0	. 1403	61
2. 5	. 19	8	12. 5	. 468	38	22. 5	. 1464	63
3. 0	. 27	10	13. 0	. 506	39	23. 0	. 1527	63
3. 5	. 37	12	13. 5	. 545	40	23. 5	. 1590	64
4. 0	. 49	13	14. 0	. 585	42	24. 0	. 1654	66
4. 5	. 62	14	14. 5	. 627	43	24. 5	. 1720	66
5. 0	0. 0076	16	15. 0	0. 0670	44	25. 0	0. 1786	67
5. 5	. 92	17	15. 5	. 714	46	25. 5	. 1853	69
6. 0	. 109	19	16. 0	. 760	47	26. 0	. 1922	69
6. 5	. 128	20	16. 5	. 807	48	26. 5	. 1991	70
7. 0	. 148	22	17. 0	. 855	49	27. 0	. 2061	71
7. 5	. 170	23	17. 5	. 904	51	27. 5	. 2132	72
8. 0	. 193	25	18. 0	. 0955	52	28. 0	. 2204	73
8. 5	. 218	27	18. 5	. 1007	53	28. 5	. 2277	73
9. 0	. 245	27	19. 0	. 1060	54	29. 0	. 2350	75
9. 5	. 272	29	19. 5	. 1114	56	29. 5	. 2425	75
10. 0	0. 0301		20. 0	0. 1170		30. 0	0. 2500	

Para aplicarla supongamos que i es de 13° 10′, y que siendo las constantes $C = 110$, $c = 0^m4$, se halló $A = 1^m682$. La fórmula (2) ó la tabla de sus valores darán: $K = 185^m4$, y como la correccion por la unidad de distancia es 0.0519, tendrémos:

$$K - k = 185.4 \times 0.0519 = 9^m6$$
$$K = 185.\ 4$$
$$k = 175^m8$$

Cuando el ángulo de inclinacion no excede de 2° ó 3°, puede omitirse la correccion sin que de esto resulte error de importancia en la práctica.

162º El modo de disponer las divisiones del estadal no es indiferente para conseguir que las lecturas se hagan con rapidez y exactitud. La disposicion que he hallado mas ventajosa es la representada en la fig. 116ª El estadal, de unos 10 ó 12 centímetros de anchura, está dividido longitudinalmente en tres partes, de las cuales la primera contiene los decímetros pintados alternativamente de rojo y de blanco que son los colores que se distinguen mejor desde léjos. Las otras dos partes están divididas en centímetros pintados de los mismos colores y dispuestos en grupos alternados de 5 centímetros cada uno. La numeracion invertida para que en el telescopio se vea en su posicion natural, se refiere á los decímetros, y para indicar los metros se ponen uno, dos, &c., puntos gruesos sobre los números. De esa manera, aunque en el campo del anteojo solo se presente una parte pequeña de la mira, no podrá haber equivocacion, pues como se ve en la figura, los decímetros del primer metro no tienen punto, los del segundo tienen uno, los del tercero dos, y así sucesivamente. Para leer, por ejemplo, las indicaciones representadas en la figura, en la cual se ha supuesto que los hilos del telescopio se ven sobre el estadal en $a\,b$ y $c\,d$, tendrémos que la primera lectura será $1^{\mathrm{m}}226$, y la del hilo $c\,d$, $1^{\mathrm{m}}792$. No habrá, pues, que contar mas que los centímetros de exceso respecto del último decímetro numerado, y estimar á la vista la fraccion de un centímetro, el que á distancias moderadas se divide muy bien en décimas partes ó milímetros por apreciacion.

Para no tener necesidad de apreciar las fracciones de centímetro con cada uno de los hilos, es mejor poner uno de ellos en coincidencia con una de las divisiones que señalan decímetros enteros, y siempre que sea posible conviene establecer la coincidencia en la division $1^{\mathrm{m}}0$, que está indicada por un círculo rojo sobre el fondo blanco del estadal. Esto puede hacerse siempre que para conseguirlo no sea preciso inclinar demasiado el telescopio, cuyo eje óptico, segun dije ántes, debe dirigirse á un punto de la mira que tenga próximamente la misma altura que el instrumento. Es claro que en tal caso la indicacion del otro hilo, ménos 1^{m}, será el valor de A que entra en la fórmula. En general, ese dato resulta de la diferencia de las indicaciones de los dos hilos.

Es claro que la seguridad con que se obtiene una distancia por medio de la estadia, depende de la exactitud que se tenga en el valor de A, y esta varia con el poder del telescopio, la vista del observador, el estado de la atmósfera, la finura de los hilos, &c. Cada ingeniero, en este particular, debe guiarse por las indicaciones de su propia experiencia respecto de la extension con que podrá usar un instrumento dado; extension que por otra parte depende tambien de la mayor ó menor precision que merezcan las medidas segun la importancia de los detalles á que se refieren. Creo, sin embargo, que un telescopio de $0^{m}30$ á $0^{m}35$ de distancia focal puede emplearse con muy buen éxito para distancias hasta de 400 á 500 metros: el que yo he usado tiene solo $0^{m}22$, y con él he podido medir muy bien lineas de 300 metros. Hasta 250^{m} me era posible contar los centímetros, aunque sin apreciar sus fracciones, las que solo estimaba con alguna seguridad cuando la distancia no excedia de 200^{m}. A mas de 300^{m} comenzaba á haber duda en la apreciacion exacta de los centímetros enteros, y como la constante C era de 110, es evidente que el error de $0^{m}01$ hubiera ocasionado otro de $1^{m}1$ en la distancia. En ese caso me parece preferible valerse solo de las divisiones de decímetros que fácilmente se subdividen en diez partes por estimacion. Un error de $\frac{1}{300}$ de las lineas, es sin embargo, perfectamente admisible, pues hay muchos casos en que la cadena comun los produce por lo ménos iguales aun en terrenos horizontales y desprovistos de obstáculos, y es indudable que en los montañosos el uso de la estadia suministra resultados de mayor precision.

Es preciso tener cuidado de que la mira se coloque siempre vertical: algunas veces está provista al efecto de una plomada, y el ayudante ó el criado que la tiene miéntras se hace la observacion, cuida de que su hilo se conserve en coincidencia con el borde lateral de la regla. Por otra parte, el observador puede juzgar de la verticalidad de la mira por medio del hilo vertical de la retícula, en cuya proximidad debe hacer las lecturas. Los estadales de mas de 3^{m} están divididos por comodidad en dos partes unidas con una charnela, de modo que para trasportarlos se doblan reduciéndose á la mitad de su longitud.

163º La teoría que he presentado de la estadia basta en mi concepto para todas las necesidades de la práctica, y me condujo á una fórmula sencilla, habiendo tomado por punto de partida los principios fundamentales de la óptica. Sin embargo, estando ya este Capítulo en la prensa, ha llegado á mis manos un escrito del geómetra belga Mr. Liagre, relativo al mismo asunto, y como en cierta manera sus conclusiones difieren algo de las mias, juzgo conveniente consignarlas aquí, ya para presentar al lector otra manera de calcular las distancias con la estadia, ya por una desconfianza demasiado natural de mis propias ideas al desarrollar una teoría hasta cierto punto nueva, puesto que la fórmula admitida era la (1), que como se recordará, solo se deriva de la comparacion de dos triángulos semejantes, y cuyos defectos tuve ocasion de indicar.

Mr. Liagre, por la misma comparacion halla la fórmula (1), á saber:

$$\triangle = A\,\frac{F}{a}$$

que dá la distancia de la mira al objetivo. En seguida, considerando que con excepcion de a, todas las demas cantidades son variables, supone que se haga una experiencia llamada *reguladora*. Midiendo con el mayor cuidado posible una distancia $\triangle'$ así como el valor A' y la longitud focal F' correspondiente á $\triangle'$, se tiene:

$$\triangle' = A'\,\frac{F'}{a}$$

y eliminando á a entre ambas ecuaciones resulta:

$$\triangle = \frac{A\ F}{A'\ F'}\triangle'$$

Si se supusieran constantes las distancias focales relativas á los dos casos, la última ecuacion daria:

$$\triangle'' = \frac{A}{A'}\triangle'$$

que Mr. Liagre considera como un valor aproximativo de la distancia $\triangle$, y para determinar su correccion, halla por diferencia respecto de la ecuacion que dá el valor exacto:

$$\triangle = \triangle'' + \triangle''\left(\frac{F-F'}{F'}\right) \text{..........................} \quad (8)$$

$\Delta - \Delta'' = \frac{AF}{A'F'}\Delta' - \frac{A}{A'}\Delta' = \frac{AF}{A'F'}\Delta''\frac{A'}{A} - \frac{A}{A'}\Delta''\frac{A'}{A} = \frac{F}{F'}\Delta'' - \Delta'' = \Delta''\left(\frac{F-F'}{F'}\right)$

$\Delta = \Delta'' + \Delta''\left(\frac{F-F'}{F'}\right)$

Se ve, pues, que la operacion se reduce á calcular primero la distancia aproximativa por medio de la relacion $\frac{F'}{a}$ correspondiente á la experiencia reguladora, y á añadirle despues el producto de esa misma distancia por la relacion que existe entre la diferencia de las longitudes focales y la que corresponde á la experiencia reguladora. La regla equivale tambien á multiplicar el valor aproximativo por la relacion $\frac{F}{F'}$.

Aunque la ecuacion (8) dá la distancia del estadal al objetivo, es evidente que por la adicion final de r, se obtiene hasta el centro del instrumento.

La fórmula del escritor belga supone la necesidad de medir en cada observacion el valor correspondiente de F; pero puesto que solo se necesita la diferencia $F - F'$, bastará, en mi concepto, señalar en el tubo del telescopio el punto hasta donde fué necesario sacar el ocular, ó el objetivo en su caso, al hacer la observacion reguladora, y despues medir la pequeña distancia de ese punto al del mismo tubo que marca el lugar hasta donde se saca el ocular ó el objetivo en cada caso particular. La medida, que puede hacerse con una escala de milímetros, dá el valor sensiblemente exacto de $F - F'$.

Creo que la fórmula de Mr. Liagre es susceptible de una modificacion de alguna importancia práctica, puesto que evita la medida de la diferencia de distancias focales. En efecto, siendo la fórmula equivalente á esta otra:

$$\triangle = \triangle'' \frac{F}{F'}$$

podrá determinarse la relacion $\frac{F}{F'}$ en funcion de las distancias reguladora y aproximativa, ó bien en funcion de las lecturas correspondientes de la mira. En la pág. 256 consta la expresion de F, que aplicada á las distancias $\triangle$ y $\triangle'$, dará la relacion:

$$\frac{F}{F'} = \frac{\triangle(\triangle' - f)}{\triangle'(\triangle - f)}$$

y sustituida en la ecuacion anterior produce:

$$\triangle = \triangle'' + \frac{f}{\triangle'}(\triangle' - \triangle'') \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (9)$$

Esta fórmula tiene respecto de la (8) la ventaja de que una vez medida la longitud focal estelaria f, su relacion con la distancia reguladora es constante. Teniendo ahora presente que $\triangle' = \frac{A' F'}{a}$ y $\triangle'' = \frac{A F'}{a}$, se obtiene por la sustitucion:

$$\triangle = \triangle'' + \frac{f}{A'}(A' - A) \text{.........................} \quad (10)$$

que tambien contiene el factor constante $\frac{f}{A'}$, y consta solo de elementos conocidos de antemano ó suministrados por la observacion misma.

164º Mi fórmula (2) me parece, sin embargo, preferible á la de Mr. Liagre, no solo porque puede reducirse á tabla con mas facilidad, sino porque su mismo cálculo directo es mas sencillo, conteniendo dos constantes que una vez determinadas, permiten su aplicacion para todas las distancias sin correccion especial en cada caso; aunque deducida de la teoría analítica de los lentes, puede obtenerse por consideraciones puramente geométricas tomando solo en cuenta la propiedad característica de los focos principales, cual es la de reunir los rayos luminosos que caen paralelos sobre el lente. En efecto, si en la figura 117ª suponemos que O y O' son los focos principales del objetivo L, sus distancias á este lente serán iguales á la cantidad que he designado por f. En consecuencia, los rayos luminosos que parten de los hilos m y n paralelamente al eje del objetivo, refractados por este, irán á converger siempre en el punto O, sea cual fuere la distancia de la retícula al lente, y cruzándose en O determinarán los puntos M y N de la mira que se ven en coincidencia con los hilos. De aquí se deduce que siendo constante la distancia a de los hilos, lo es tambien el ángulo............ $M\,O\,N = p\ O\ q$ bajo el cual se ven desde O la parte A del estadal y los hilos. Ademas, como la distancia de este punto al objetivo es f, su distancia á la mira es $\triangle - f$, y los triángulos semejantes darán:

$$\triangle - f = A \frac{f}{a}$$

ó bien:

$$k = A \frac{f}{a} + c$$

puesto que $k = \triangle + r$, y tambien $c = f + r$.

Aunque ántes he llamado θ el ángulo bajo el cual se ve desde el objetivo la parte *MN*, conservemos la misma denominacion para designar el ángulo constante *M O N* de los hilos, y tendrémos en ese triángulo:

$$A = 2\,(\Delta - f)\ \tan.\ \tfrac{1}{2}\,\theta$$

de donde resulta:

$$k = \frac{A}{2\ \tan.\ \frac{1}{2}\,\theta} + c$$

ó bien:

$$C = \frac{f}{a} = \frac{1}{2\ \tan.\ \frac{1}{2}\,\theta} = \cot.\ \theta$$

Se ve, pues, que Mr. Liagre considerando el cruzamiento en el centro óptico del objetivo, ha tenido que tomar en cuenta la variacion del ángulo visual con las diversas distancias de la retícula; miéntras que en mi modo de considerar la cuestion es invariable aquel ángulo.

165º Otro telémetro que difiere muy poco del que he descrito es el que se conoce con el nombre de *estadia micrométrica* y tambien con el de *estadia de hilo móvil.* Su diferencia esencial respecto de la otra consiste, en efecto, en que la distancia de los hilos es variable siendo uno de ellos fijo, y susceptible el otro de movimiento en un plano perpendicular al eje óptico del telescopio. La figura 118ª representa la apariencia del campo circular del anteojo, tal como se ve al traves del ocular. El hilo fijo es *a b* y el móvil *c d:* su movimiento se comunica por medio de un tornillo *A* cuya espiral es muy fina, y cuya tuerca está formada por un rectángulo *B* á la cual está unido el hilo. La cabeza *C* del tornillo está dividida generalmente en 100 partes, cada una de las cuales puede quedar en coincidencia, durante el movimiento, con la linea trazada en un índice *D*, fijo al rectángulo exterior *E*. En el interior del tubo del telescopio hay una lámina metálica *F* con uno de sus bordes dentado, que presenta el aspecto de una sierra ó de un peine, y cuyos dientes distan entre sí una cantidad igual al paso del tornillo, de tal manera que una revolucion entera de este hace trasladar al hilo de un diente á otro.

Este mecanismo es el que constituye un micrómetro y sirve para medir la pequeña distancia del hilo fijo á cualquiera posicion del hilo móvil, con tal que se haya determinado previamente el valor de una revolucion del tornillo; porque el número de dientes comprendidos entre los hilos será el de vueltas enteras, indicando el índice D las fracciones de vuelta por su coincidencia con alguna de las divisiones del círculo ó cabeza C del mismo tornillo. Designando, pues, por n el número de revoluciones enteras y fracciones, y por v el valor de cada revolucion, la distancia a de los hilos será: $a = n\,v$, expresando a unidades lineales ó angulares segun que v se haya valuado en unas ú otras.

Se comprende segun esto que la estadia micrométrica puede usarse absolutamente de la misma manera que la de hilos fijos, cuando los de aquella se hayan establecido en una posicion determinada, y que tambien puede emplearse midiendo con el micrómetro la imágen de una parte cualquiera de la mira tal como la extension de uno, dos, &c., metros. En este último caso la cantidad que he designado por A en las fórmulas precedentes es constante, y por el contrario, variable la distancia a de los hilos, y por consecuencia el factor C. Si, pues, expresando v unidades lineales, representamos por C' la nueva constante, se tiene: $k = A\frac{f}{a} + c = \frac{Af}{v} \cdot \frac{1}{n} + c$

$$C' = \frac{A\,f}{v} \text{..........................} (11)$$

y entónces la fórmula (2) será:

$$k = \frac{C'}{n} + c \text{..........................} (12)$$

en la cual n representa el número de revoluciones del micrómetro que miden la distancia de un extremo á otro de la señal A, ó sea el espacio comprendido entre los dos hilos cuando estando el fijo en un extremo de la señal se ha llevado el otro á su extremo opuesto. La parte A de la mira se toma comunmente de 1^{m}.

166º La determinacion de las constantes C' y c se hace por cualquiera de los métodos que se han explicado en las páginas precedentes. El tercero me parece preferible, y aplicado á la fórmula (12) dará:

$$C' = n\,(k - c)$$

Supongamos los siguientes datos referentes á una estadia micrométrica cuyo telescopio tiene $0^{m}35$ de longitud focal principal, y en que la distancia del objetivo al centro es de $0^{m}2$. Se tendrá........ $c = f + r = 0^{m}55$.

k	n
$140^{m}0$	4.90
95. 0	7.25

Los valores de n son las indicaciones del micrómetro cuando los hilos abrazaban un metro de la mira. Los dos resultados serán:

$$C' = 139.45 \times 4.90 = 683.3$$
$$C' = \ \ 94.45 \times 7.25 = 684.8$$

Adoptando el término medio, tendrémos para cualquiera indicacion n del micrómetro que abrace la cantidad constante $A = 1^{m}$ de la mira:

$$k = \frac{684}{n} + 0^{m}55$$

Procediendo de esa manera no hay necesidad de conocer el valor v de una revolucion del micrómetro; pero si quiere determinarse, se tendrá:

$$v = \frac{Af}{C'} = \frac{Af}{n\,(k - c)} \text{.............................} \quad (13)$$

y en el caso actual puesto que $A = 1^{m}$, resulta:

$$v = \frac{0^{m}35}{684} = 0^{m}00051$$

que es el paso del tornillo, ó sea la distancia de un diente á otro. Estando dividido en 100 partes el círculo micrométrico, cada division vale $0^{m}0000051$. Es claro que el valor de C' es solo constante para un valor determinado de A, y conviene en la práctica adoptar la misma cantidad del estadal para medirla con el micrómetro; pero una vez determinado C' para un valor de A, la constante C'' que corresponde á otro A' de la mira, será:

$$C'' = \frac{A'}{A}\,C'$$

Admitamos, por ejemplo, que con la misma estadia se hubiera medido el espacio de 0^m1 de la mira con una revolucion y 45 divisiones del micrómetro. Tendriamos:

$$k = \frac{0^m1 \times 684}{1.45} + 0^m55 = 47^m7$$

167º Creo que este modo de hacer uso de la estadia micrométrica es el mas conveniente; pero tambien puede expresarse en arco el valor de una revolucion del tornillo y determinarlo de esta manera: siendo θ el ángulo bajo el cual se ve A á la distancia $k - c$, hemos visto que se tiene:

$$\tan. \theta = \frac{A}{k - c}$$

y siendo v'' el valor angular de una revolucion del micrómetro expresado en segundos, el arco $n\,v''$ será igual á θ, y por consecuencia:

$$v'' = \frac{\theta}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Como θ es generalmente un ángulo pequeño, casi siempre puede introducirse en el cálculo por su número de segundos, y entónces la fórmula precedente se convierte por la sustitucion en esta otra:

$$v'' = \frac{A}{n\,(k - c)\ \text{sen. } 1''} = \frac{A}{C'\ \text{sen. } 1''}$$

Para calcular el valor de v'' en la estadia que sirve de ejemplo tenemos, tomando la primera de las observaciones ejecutadas para determinar su constante, $A = 1^m$, $k - c = 139^m45$ y $n = 4.9$. De estos datos resulta:

$$\theta = 24'\ 39'' \qquad v'' = \frac{1479''}{4.9} = 301.''8$$

Haciendo uso del valor angular del micrómetro, se miden tambien las distancias anotando el número n de revoluciones correspondientes á A, puesto que θ será siempre igual á $n\,v''$, y se tiene:

$$k = A \cot. \theta + c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

ó bien introduciendo el valor de C' en funcion de v'' en la ecuacion (12), resultará:

$$k = \frac{A}{n\, v''\, \text{sen. } 1''} + c \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

que proporciona la exactitud necesaria.

Sean $n = 7.25$, $A = 1^{\text{m}}$ y $c = 0^{\text{m}}.55$. Con el valor hallado para v'' se obtiene:

n....................	0.86034
v''....................	2.47972
sen. 1''..............	4.68557
	8.02563
Compl..............	1.97437

$$k = 94^{\text{m}}.27 + 0^{\text{m}}.55 = 94^{\text{m}}.82$$

resultado que concuerda bastante bien con la distancia medida en la segunda observacion para determinar la constante.

168º Por todo lo que precede se ve que el uso de la estadia micrométrica es esencialmente el mismo que el de la comun de hilos fijos. La única diferencia consiste en que con la primera es dueño el observador de elegir por mira una cantidad constante, lo cual puede presentar la ventaja de disminuir un poco el tamaño del estadal; pero en cambio la estadia micrométrica tiene el inconveniente de necesitar una construccion especial, de manera que por lo regular no sirve mas que para medir distancias. Por el contrario, el telescopio de cualquiera instrumento como el del teodolito, el de la brújula, &c., puede convertirse en estadia comun por medio de la simple adicion de dos hilos en su retícula; y teniendo presente la gran conveniencia que resulta de poder aplicar un solo instrumento á varios usos diversos, tanto por la facilidad con que se traslada de un punto á otro como por prestarse á un trabajo mas violento, creo que no debe vacilarse en dar la preferencia á la estadia de hilos fijos.

La disposicion de la retícula que me parece mas conveniente es la que representa la figura 119º Los hilos adicionales, á un lado y otro del hilo horizontal, se establecen á cosa de $0^{\text{m}}.001$ de este, y de esa manera se tienen en realidad tres hilos disponibles para combinarlos de dos en dos al emplear el telescopio como estadia, pues sucede que cuando la distancia es muy grande ó el estadal pequeño, el espacio de los hilos extremos es muchas veces insuficiente, porque la imágen de la mira se ve menor que ese intervalo, y por consecuencia no podria hacerse la lectura sino con el central y uno de los laterales. Es claro que en tales casos debe introducirse en la fórmula (2) el valor de C que corresponde á cada combinacion, puesto que la constante es tanto mayor cuanto mas pequeña es la distancia de los hilos, y para evitar equivocaciones conviene asignarles números de órden de abajo hácia arriba ó al contrario, y tener presente que en una posicion inversa del telescopio la numeracion debe contarse en sentido opuesto.

No obstante la regla anterior, debe decirse en general que siendo posible, siempre es mejor hacer uso de los hilos extremos eu atencion á que el mismo error en la apreciacion de A tiene mas influencia en el resultado al paso que disminuye el espacio que los separa. Bajo este aspecto deberia preferirse ponerlos á la mayor distancia posible; pero ademas del inconveniente que resultaria de limitar el uso de la estadia solo á la medida de lineas pequeñas, hay tambien el de que la vision es mas perfecta cerca del centro del campo, y por consecuencia los hilos demasiado distantes se ven con poca claridad, sobre todo si el ocular es de algun poder, y de esto resultaria alguna incertidumbre en la apreciacion exacta de A. El grueso de los hilos debe ser solo el estrictamente necesario para que se vean bien: en cuanto á su materia, me parecen preferibles los de la araña que forma su tela entre los magueyes y otras plantas que abundan en nuestros campos, por ser muy resistentes y tan finos como se quiera. Respecto de la manera de ponerlos, debe comenzarse por señalar con un instrumento agudo ó cortante el lugar que deben ocupar sobre el diafragma de la retícula á la distancia conveniente del hilo central, y en seguida fijarlos sobre las señales haciendo que queden perfectamente rectos y paralelos, pegándolos por último sobre el metal por medio de una ligera capa de cera ó de un barniz hecho de laca, de almáciga ó de guta percha. Todos estos detalles, acaso demasiado minuciosos, podrán alguna vez ser útiles al ingeniero que por sí mismo desee convertir en estadia el telescopio de su brújula ó de su teodolito.

la de nopal es mucho mejo

En cuanto á la mayor extension de las lineas que pueden medirse con suficiente exactitud por medio de la estadia, creo que hasta una distancia de 1000 veces la longitud focal del telescopio se obtiene bastante seguridad en la medida de A, al ménos limitándose á la apreciacion de los centímetros; y que en buenas circunstancias atmosféricas puede elevarse esa distancia á $1500 f$ ó acaso mas si los colores del estadal contrastan bien, como sucede con el rojo y el blanco, y si son claros los lentes del telescopio. A distancias mayores es muy incierta la percepcion de los centímetros, y entónces deben tomarse los decímetros por unidad y anotar sus fracciones por apreciacion. Por otra parte, cada ingeniero puede fijarse experimentalmente un límite de distancia, segun el poder de su telescopio, el valor de la constante C y el mayor error que crea conveniente admitir, pues es claro que, por ejemplo, un centímetro de duda en A ocasiona otra de 0.01 C en la linea.

Segun Mr. Liagre, la distancia mas propia para la determinacion de la constante por medio de la observacion reguladora, es $350 f$; por mi propia experiencia juzgo, sin embargo, que no hay inconveniente en aumentarla, y me parece que para hacer varias observaciones con el mismo objeto, pueden fijarse los límites desde 200 hasta 600 veces la distancia focal del telescopio.

169º Otro telémetro llamado *micrómetro de doble imágen* y mas comunmente *micrómetro de Rochon* por el nombre de su inventor, está fundado en el fenómeno y las leyes de la doble refraccion. Se sabe que el cuarzo ó cristal de roca, el espato calizo y otras muchas sustancias cristalinas tienen la propiedad de dividir en dos el rayo luminoso que las atraviesa en ciertas direcciones, de manera que si al traves de un prisma formado de alguna de esas materias, se observa un objeto cualquiera, se verán en general dos imágenes suyas, la una en la posicion que le señalan las leyes de la refraccion ordinaria, y la otra mas ó ménos desviada de la primera. Esta última se dice que es la extraordinaria, ó bien la imágen formada por la refraccion extraordinaria. En los cristales de sustancias bi-refringentes existen siempre una ó dos direcciones llamadas ejes, en las cuales no se desvía la luz, sino que sin dividirse sigue las leyes comunes de la refraccion.

Supongamos ahora que un prisma bi-refringente se coloca en el interior de un telescopio entre el ocular y el objetivo, y que se dirige hácia una señal cualquiera. Al traves del ocular verémos dos imágenes de la señal mas ó ménos separadas entre sí, y como al atravesar el prisma los rayos ordinario y extraordinario forman un ángulo constante, resultará que la distancia de una imágen á la otra aumentará cuando se acerque el prisma al objetivo; que por el contrario será menor al acercarlo al ocular; y que si se hace coincidir con el foco mismo del telescopio el punto del prisma en que se dividen los rayos luminosos, no verémos mas que una imágen del objeto.

Segun esto, desde la superposicion que tiene lugar cuando el prisma está en el foco del objetivo, hasta su mayor separacion que se verifica cerca de este lente, la distancia de las imágenes ordinaria y extraordinaria irá creciendo gradualmente, y se comprende sin esfuerzo alguno que si la señal que se observa tiene tales dimensiones que sus dos imágenes lleguen á verse enteramente separadas, habrá en el tubo del telescopio un punto en que si se coloca el prisma bi-refringente se verán en simple contacto. La distancia de ese punto al foco depende de la magnitud de la señal; pero sea cual fuere, es evidente que entónces la separacion de los centros de ambas imágenes es precisamente igual á la magnitud de cualquiera de ellas, y que si pudiera medirse, daria una cantidad equivalente á la que he designado por a, puesto que representa el tamaño de la imágen del objeto A, y que puede compararse á la que se obtendria entre dos hilos paralelos.

Mas bien que la pequeña distancia a, lo que importa conocer es la relacion $\frac{f}{a}$ que entra en las diversas fórmulas que se han desarrollado, y si se recuerda que $\frac{f}{a}$ expresa la cotangente del ángulo visual, reducirémos el problema á la investigacion de este último valor.

En la figura 120ª L es el objetivo y P el prisma bi-refringente por lo general de cuarzo. Este prisma cuya seccion es un rectángulo, está compuesto de otros dos $a\,b\,c$ y $b\,a\,d$ de seccion triangular: la cara $b\,c$ del primero es perpendicular al eje del cristal, quiere decir, á la direccion en que no se dividen los rayos luminosos; miéntras que la cara $a\,d$ del segundo está cortada paralelamente al mismo eje y por consiguiente produce la doble imágen. El primero de estos prismas no tiene mas objeto que acromatizar al segundo, no ejerciendo accion alguna sobre la direccion de la luz, y como ademas, los rayos luminosos que vienen de la señal, despues de pasar por el objetivo, atraviesan el prisma compuesto perpendicularmente á sus caras $b\,c$ y $a\,d$, resulta que en el foco se formará la imágen ordinaria $m\,n$ de la señal. Los mismos rayos al llegar á la cara $a\,b$ de union de los dos prismas componentes, hiriéndola oblicuamente, sufren la refraccion extraordinaria, y se desvían de su direccion primitiva, tanto al atravesar el segundo prisma $a\,b\,d$, como al salir de él, de suerte que irán á formar en el mismo foco la imágen extraordinaria $m\,m'$. En la figura se ha supuesto que se hallan en contacto ambas imágenes; pero se concibe fácilmente que siendo constantes las direcciones con que salen del prisma los rayos ordinarios y extraordinarios, si se supone que este se mueve paralelamente á sí mismo á lo largo del eje del telescopio, el contacto no subsistirá, y que las dos imágenes se sobrepondrán si se acerca el prisma al ocular y quedarán separadas si se aproxima al objetivo. Prolongando las lineas que señalan la direccion de los rayos extraordinarios encontrarán en o y o' á los ordinarios, y podrémos suponer que en estos puntos tiene lugar la reparacion de unos y otros, siendo el ángulo $n\,o\,m$ igual á $m\,o'\,m'$. De aquí se deduce que si movemos el prisma hasta que o y o' coincidan respectivamente con n y m, se verán las imágenes sobrepuestas al traves del ocular, ó lo que es lo mismo, se verá una sola imágen, y el prisma se hallará en el foco del telescopio.

Considerándolo ahora en la posicion que indica la figura, quiere decir, á una distancia tal del ocular que las imágenes aparezcan en contacto, determinemos el valor de $\frac{f}{a}$ ó de la cotangente del ángulo visual θ. Llamando ω el ángulo $n\,o\,m = m\,o'\,m'$ de los rayos, que es constante para un mismo prisma, y x la distancia $m\,o'$, tendrémos en el triángulo rectángulo $m\,o'\,m'$, en el cual $m\,m' = a$ representa la magnitud de la imágen:

$$a = x \tan.\ \omega$$

y como en otro lugar (pág. 272) hallamos entre a, f y θ la relacion:

$$a = f \tan.\ \theta$$

encontrarémos la siguiente por la eliminacion de a.

$$\cot.\ \theta = \frac{f \cot.\ \omega}{x} \qquad (17)$$

El producto f cot. ω es constante para cada instrumento, por lo cual el resultado anterior indica que la cotangente del ángulo visual es inversamente proporcional á la distancia x del prisma al foco.

Este principio es el que sirve de fundamento á la construccion del micrómetro de doble imágen. El telescopio tiene una ranura á lo largo del tubo, en la cual se mueve la pieza que contiene el prisma bi-refringente, y que sirve para llevarlo á diversas distancias del foco. En la parte exterior esa pieza tiene un vernier para apreciar las partes de las divisiones trazadas á lo largo de la ranura. Veamos lo que representan esas divisiones.

Siendo constante el producto f cot. ω, puede determinarse experimentalmente de esta manera: si se observa una señal cualquiera, por ejemplo, un disco de un diámetro determinado colocado á mucha distancia del telescopio, y se mueve el prisma hasta que las dos imágenes se confundan en una sola, es claro segun las explicaciones anteriores, que el prisma se hallará en el foco del telescopio, y podrá señalarse en el borde de la ranura correspondiente á ese punto el *cero* de la division. Si se aleja despues el prisma del foco, y se lleva hasta un punto tal que las dos imágenes se vean en contacto, se señalará ese nuevo punto cuya distancia x' al primero puede medirse; y como por otra parte, conociendo el diámetro A' de la señal y su distancia $\triangle'$ al objetivo, se determina su ángulo visual θ' por la fórmula: tan. $\theta' = \frac{A'}{\Delta' - f}$, resultará por la ecuacion (17):

$$f \text{ cot. } \omega = \frac{x' (\Delta' - f)}{A'}$$

Una vez conocida esa constante podrán señalarse en el tubo otras divisiones cuyas distancias x al *cero* darán á conocer los valores correspondientes de θ, y esos valores son los que se inscriben al lado de las divisiones.

En lugar de proceder así, parece que las fabricantes siguen otro camino que dá el mismo resultado: despues de señalar el *cero* como se ha indicado, observan un objeto cuyo diámetro, cuya distancia, y por consiguiente cuyo ángulo visual son conocidos, y al establecer el contacto de sus imágenes, señalan el lugar del prisma inscribiendo en él el valor del ángulo visual. La distancia de ese punto al *cero* se divide en seguida en tantas partes iguales como minutos tiene el ángulo, y se prolongan las divisiones hácia el objetivo, si es necesario. Es claro efectivamente, que cada division representará 1′, y que al poner en contacto las imágenes de un objeto cualquiera, el índice señalará desde luego el ángulo bajo el cual se ve. Por lo regular las divisiones de la ranura están trazadas de medio en medio minuto, y el vernier permite la apreciacion de décimos de minuto, ó sea de 6″.

Puesto que el micrómetro de Rochon dá á conocer el ángulo visual de un objeto, si se conoce tambien su magnitud A, se calculará su distancia por la misma fórmula (2) sustituyendo por C su equivalente cot. θ, á saber:

$$k = A \text{ cot. } \theta + c \qquad (18)$$

170º Es conveniente construir la mira de modo que la cantidad A sea constante, y por lo regular se hace uso de un estadal en cuya parte superior hay un disco circular de 1^m de diámetro, ó por mejor decir, dos segmentos de ese círculo (fig. 121ª) pintados uno de rojo y otro de blanco. Siendo A de 1^m, el valor de la cotangente del ángulo visual que se obtiene con el vernier cuando el segmento rojo es tangente al blanco, dá desde luego la distancia, pues generalmente los contactos de las imágenes nunca son tan perfectos que permitan la apreciacion de las distancias con las fracciones de metro como lo es casi siempre la constante c. Por esta razon muchas veces al lado de los valores de θ están grabadas en el mismo tubo del telescopio los de las cotangentes que les corresponden. La tabla de la página siguiente contiene, sin embargo, estos últimos valores calculados para cada décimo de minuto que es la aproximacion que dá el vernier.

Cuando A es igual á 1^m, la tabla dá inmediatamente las distancias desde cosa de 100^m en adelante, quiere decir, en los casos en que comienza á ser útil el uso del micrómetro de Rochon; pero es evidente que tambien puede servir para calcular distancias menores, pues basta que la mira tenga ménos de 1^m. La disposicion que me parece mas conveniente es la que representa la figura 122ª, en la cual he supuesto que el estadal tiene dos discos circulares de $0^m.25$ de diámetro cada uno, y cuyos centros están á $0^m.75$ uno de otro. De esta manera, la distancia entre los bordes extremos de los círculos es de 1^m, y puestas en contacto sus imágenes, servirán para medir lineas extensas; miéntras que para las pequeñas se pondrán en contacto las imágenes de los bordes de uno de los discos, y en-

TABLA DE *COTANGENTES* DE ÁNGULOS PEQUEÑOS.

Minutos.	0.'0	0.'1	0.'2	0.'3	0.'4	0.'5	0.'6	0.'7	0.'8	0.'9
1'	3437.7	3125.1	2867.7	2644.3	2455.5	2291.8	2148.5	2022.1	1909.8	1809.3
2	1718.8	1637.0	1567.6	1494.6	1432.4	1375.1	1322.2	1273.2	1227.7	1185.4
3	1145.9	1108.9	1074.3	1041.7	1011.0	982.2	954.9	929.1	904.6	881.5
4	859.4	838.5	818.5	799.5	781.3	763.9	747.3	731.4	716.2	701.6
5	687.5	674.8	661.1	648.6	636.6	625.0	613.9	603.1	592.7	582.6
6	572.9	563.5	554.5	545.7	537.2	528.9	520.9	513.0	505.5	498.2
7	491.1	484.2	477.7	470.9	464.5	458.4	452.3	446.4	440.7	435.1
8	429.7	424.4	419.2	414.2	409.2	404.4	399.7	395.1	390.6	386.2
9	382.0	377.8	373.7	369.6	365.7	361.9	358.1	354.4	350.8	347.2
10	343.8	340.4	337.6	333.8	330.5	327.4	324.3	321.3	318.3	315.4
11	312.5	309.7	306.9	304.2	301.5	298-9	296.3	293.8	291.3	288.9
12	286.5	284.1	281.8	279.5	277.2	275.0	272.8	270.7	268.6	266.5
13	264.4	262.4	260.1	258.5	256.5	254.6	252.8	250.9	249.1	247.3
14	245.5	243.8	242.1	240.4	238.7	237.1	235.5	233.8	232.3	230.7
15	229.2	227.7	226.6	224.7	223.2	221.8	220.4	219.0	217.6	216.2
16	214.8	213.5	212.2	210.9	209.6	208.3	207.1	205.8	204.6	203.4
17	202.2	201.0	199.9	198.7	197.6	196.4	195.3	194.2	193.1	192.0
18	190.9	189.9	188.9	187.8	186.8	185.8	184.8	183.8	182.8	181.9
19	180.9	180.0	179.0	178.1	177.2	176.3	175.4	174.5	173.6	172.7
20	171.9	171.0	170.8	169.3	168.5	167.7	166.9	166.1	165.3	164.5
21	163.7	162.9	162.2	161.4	160.6	159.9	159.1	158.4	157.7	157.0
22	156.3	155.5	154.8	154.1	153.5	152.8	152.1	151.4	150.8	150.1
23	149.5	148.8	148.2	147.5	146.9	146.3	145.7	145.0	144.4	143.8
24	143.2	142.6	142.0	141.5	140 9	140.3	139.7	139.2	138.6	138.1
25	137.5	137.0	136.4	135.9	135.3	134.8	134.3	133.8	133.2	132.7
26	132.2	131.7	131.2	130.7	130.2	129.7	129.2	128.7	128.2	127.8
27	127.3	126.8	126.4	125.9	125.5	125.0	124.5	124.1	123.6	123.2
28	122.8	122.3	121.9	121.5	121.0	120.6	120.2	119.8	119.4	118.9
29	118.5	118.1	117.7	117.3	116.9	116.5	116.1	115.7	115.4	115.0
30	114.6	114.2	113.8	113.4	113.1	112.7	112.3	112.0	111.6	111.2
31	110.9	110.5	110.2	109.8	109.5	109.1	108.8	108.4	108.1	107.8
32	107.4	107.1	106.7	106.4	106.1	105.8	105.4	105.1	104.8	104.5
33	104.2	103.8	103.5	103.2	102.9	102.6	102.3	102.0	101.7	101.4
34	101.1	100.8	100.5	100.2	99.9	99.6	99.3	99.1	98.8	98.5
35	98.2	97.9	97.7	97.4	97.1	96.8	96.6	96.3	96.0	95.8

tónces siendo $A = 0^{m}25$, bastará buscar el valor que se obtenga para θ y tomar la cuarta parte de los números que constan en la tabla.

Cuando se observa con el micrómetro un objeto cuya magnitud no se conoce, puede determinarse si se sabe cuál es su distancia al observador. En efecto, de las fórmulas se deduce que

$$A = \frac{k - c}{\text{cot. } \theta}$$

de modo que el cociente de la distancia por el guarismo de la tabla dá á conocer el diámetro, la altura, &c., del objeto.

Si tampoco se conoce la distancia, pueden determinarse á la vez A y k haciendo una doble observacion del objeto, esto es, midiendo dos valores de θ á dos distancias cuya diferencia pueda obtenerse con la cadena. Entónces llamando k' y θ' los elementos referentes á la segunda observacion, se tiene:

$$A = \frac{k - k'}{\text{cot. } \theta - \text{cot. } \theta'}$$

y en seguida conociendo á A se obtiene cualquera de las dos distancias. Es claro que la segunda observacion debe hacerse en un punto situado en la direccion del primero al objeto.

171º Tanto el micrómetro de Rochon como las estadias se usan en la planometría aplicando cualquiera de los procedimientos generales, sobre todo el de coordenadas polares. En los terrenos muy sinuosos proporcionan mas exactitud que la cadena, prestándose tambien á la medida de lineas de difícil acceso y aun de las enteramente inaccesibles. Así, por ejemplo, la configuracion exacta del curso de un rio de cierta anchura sin la ayuda de los telémetros, demanda el establecimiento de una serie de directrices en cada orilla, las cuales es preciso enlazar entre sí de trecho en trecho; miéntras que con el auxilio de esos instrumentos, especialmente si van unidos á un goniómetro cualquiera, basta seguir una de las riberas estacionando en A, B, C, &c., (fig. 123ª), y mandar colocar sucesivamente la mira en los puntos notables a, b, c, &c., de la márgen opuesta. Establecidos el telémetro en A, y la mira en a, se determina la distancia y la direccion de la linea $A\,a$; se traslada despues el primero de esos instrumentos á otro punto B, dejando el segundo en a, y se mide tambien la magnitud y la direccion $B\,a$; se lleva en seguida la mira á b para fijar la posicion de $B\,b$; y se prosigue así de una manera tan expedita como eficaz.

La Comision mexicana que trazó los límites entre México y los Estados-Unidos configuró de ese modo el curso del rio Bravo, con brújulas y micrómetros de Rochon, apoyando sus operaciones en puntos trigonométricos establecidos á ciertas distancias. En estos y otros casos análogos que con frecuencia se presentan en la práctica, un teodolito provisto de buena brújula y á cuyo telescopio se le añadan dos hilos para usarlo como estadia, se convierte en un instrumento verdaderamente universal con el cual desde un solo punto se configuran muy bien todos los detalles comprendidos en un círculo de 300 á 400 metros de radio.

CAPITULO XVII.

DIFICULTADES QUE SUELEN PRESENTARSE EN EL TRAZO Y MEDIDA DL LAS LINEAS.—PROBLEMAS DIVERSOS.

172º Los procedimientos generales y directos que se han desarrollado en el curso de este libro para trazar y medir los lados de una figura, no pueden aplicarse algunas veces á consecuencia de la interposicion de árboles, edificios, rios, &c., que impiden la vista ú oponen un obstáculo material á la práctica de las operaciones. En tales casos es preciso acudir á métodos indirectos, valiéndose de lineas y de ángulos auxiliares para aplicar resoluciones particulares mas ó ménos sencillas. En la página 203 y siguientes se han resuelto algunos de esos problemas por medio de los instrumentos mas simples, y ahora que el lector conoce ya otros mas perfectos, me propongo reunir en este Capítulo las resoluciones de los problemas mas frecuentes en la práctica, y que se encuentran en casi todos los tratados de Topografía.

Prob. 1º Prolongar una linea $A\ B$ (fig. 124ª) *salvando un obstáculo.* A las resoluciones de la página 205 pueden agregarse estas otras. Elegido un punto cualquiera C, se mide el lado $A\ B$ y los ángulos del triángulo $A\ B\ C$, con lo cual podrá calcularse $A\ C$. Trazando despues una recta indefinida $C D$, y midiendo el ángulo C, tendrémos que en el triángulo $A\ C D$ se conocerá un lado y los ángulos adyacentes, con cuyos datos se determina la distancia de C á D. Como este último punto pertenece á la recta que se busca, bastará medir esa distancia y formar en D el ángulo................
$C D E = (B\ A\ C + A\ C D)$.

El mismo problema puede resolverse sin necesidad de cálculo alguno, y aun sin el auxilio de la cadena, de este modo: en B (figura 125ª) se forman con la linea dada ángulos de 135° hácia C y D. Despues se forma en C otro de 45° con $B\ C$, y se señala el punto de interseccion D de CD con BD; y por último, por C y D se trazan lineas perpendiculares á BC y BD. En el punto E en que ambas se cortan quedará formado un ángulo recto, y trazando desde E una linea que forme con CE ó DE un ángulo de 135°, se tendrá la que se busca.

Prob. 2º Trazar una linea entre dos puntos A y B (fig. 126ª) *invisibles uno de otro.* Por A trácese una recta prolongándola hasta los puntos C y D desde los cuales se descubra B, y trácense tambien CB y DB. En seguida por E, H y cuantos puntos se quiera se trazan paralelas á CD, y despues de medir esta última linea, su parte CA, así como EF y HI, se situarán los puntos G y J, calculando sus distancias á E y H respectivamente por las proporciones:

$$CD : CA = EF : EG$$
$$CD : CA = HI : HJ$$

Pueden tambien medirse las lineas CA, CB y el ángulo ACB para determinar el ángulo CAB, y en seguida trazando rectas indefinidas CG, CJ, &c., y midiendo los ángulos en C podrán calcularse las distancias CG, CJ, &c., pues en los triángulos ACG, ACJ, &c., se conoce AC y los ángulos adyacentes.

El método mas general para resolver este problema consiste en seguir por caminamiento ~~á rumbo y distancia~~ una serie de alineamientos AC, CD, DE y EB (fig. 127ª), los que proyectados sobre un sistema cualquiera de ejes, darán á conocer la diferencia de coordenadas entre A y B, y entónces se aplican las fórmulas de la pág. 176, que suministran la magnitud y la direccion de AB; direccion que combinada con la de AC, permite trazar la linea.

Prob. 3º Medir una distancia AB (fig. 128ª) *inaccesible.* Se miden las distancias de A y B á un punto cualquiera C, así como este último ángulo, y con estos datos se calcula AB por las fórmulas de la pág. 17 ó por otras equivalentes. El caso particular en que C sea muy obtuso se ha tratado en la pág. 19.

Si no fuese posible medir alguna de las lineas, por ejemplo, CB, se levantará en A una perpendicular á AB, prolongándola hasta que poco mas ó ménos sea igual á esta última. Se mide el ángulo ACB y se forma otro igual ACD por medio de una linea indefinida cuya interseccion D con la prolongacion de AB se señala en el terreno. Midiendo despues la distancia $A\,D$, se obtendrá la que se busca, puesto que esta es igual á aquella.

Puede tambien medirse en una direccion cualquiera una distancia $A\,C$ y los ángulos en A y C para resolver el triángulo que dará á conocer la incógnita $A\,B$.

Si ademas de ser inaccesible la linea, no pudiese desde un extremo verse el otro, se traza por A (fig. 126ª) una recta $C\,D$, la cual se mide así como $A\,C$ y los ángulos en C y en D. Entónces la resolucion del triángulo $B\,C\,D$ determinará á $C\,B$, y despues la de $A\,C\,B$ dá á conocer la distancia $A\,B$.

Cuando los dos extremos de la linea inaccesible lo son tambien, se aplican las resoluciones de las páginas 17 ó 18 segun el caso, ó bien se invierte el problema para resolverlo por el método de la página 87, esto es, dándole un valor cualquiera á la incógnita que se corrige despues.

Prob. 4º Determinar una distancia inaccesible $A\,B$ (fig. 129ª), *en el caso de que solo se encuentre un punto C desde el cual se vean* A y B. Para resolver este problema se escogen los puntos D y E, tales que desde el primero se descubran A y C, y desde el segundo, C y B; se miden las lineas $D\,C$, $C\,E$ y los ángulos en D, C y E; y en seguida se resuelven los triángulos $A\,C\,D$ y $B\,C\,E$, que suministran las distancias de C á A y B respectivamente. Por último, la resolucion del triángulo $A\,B\,C$ en que se conocen dos lados y el ángulo que forman, dá á conocer la distancia $A\,B$.

Prob. 5º Hallar una distancia inaccesible $A\,B$ (fig. 130ª) *en el caso de que no se encuentre punto alguno desde el cual puedan verse* dos *sus extremos.* d la vez Escójanse dos puntos C y D visibles uno de otro, y tales que desde el primero se descubra A y desde el segundo B. Entónces aplicando la resolucion del problema precedente, podrán determinarse las dos distancias incógnitas $C\,A$ y $D\,B$ con el auxilio de dos lineas $C\,E$ y $D\,F$, así como con el de los ángulos en E, en C, en D y en F. Una vez halladas esas distancias, medida la linea $C\,D$ y los ángulos $A\,C\,D$ y $C\,D\,B$, el triángulo $A\,C\,D$ en que se conocen dos lados y el ángulo que forman, determinará á $A\,D$ y al ángulo $C\,D\,A$. En seguida la resolucion del triángulo $A\,D\,B$, dos de cuyos lados se conocen y cuyo ángulo D se obtienen por diferencia, suministrará el valor de la linea $A\,B$ que se busca.

Prob. 6º Dadas las partes $A\,B$ *y* $C\,D$ *de una linea,* (fig. 131ª), *determinar la intermedia $B\ C$ que no puede medirse directamente, en el caso de que no se encuentre mas que un punto E desde el cual se vean aquellas.* Desde E se miden los ángulos α, β y ω; los dos primeros entre los extremos de las lineas $A\ B$ y $C\ D$ respectivamente, y el último entre los de la linea intermedia $B\ C$, como lo indica la figura. Sean, ademas, $A\ B = m$, $C\ D = n$, $B\ C = x$. Los triángulos $A\ B\ E$ y $C\ A\ E$ darán:

$$B\ E = \frac{m \text{ sen. } A}{\text{sen. } \alpha} \qquad C\ E = \frac{(m + x) \text{ sen. } A}{\text{sen. } (\alpha + \omega)}$$

De igual manera los triángulos $B\ E\ D$ y $C\ D\ E$ dán los nuevos valores:

$$B\ E = \frac{(n + x) \text{ sen } D}{\text{sen. } (\beta + \omega)} \qquad C\ E = \frac{n \text{ sen. } D}{\text{sen. } \beta}$$

Igualando estos valores de las mismas lineas, se obtiene:

$$n + x = \frac{m \text{ sen. } A \text{ sen. } (\beta + \omega)}{\text{sen. } \alpha \text{ sen. } D} \qquad m + x = \frac{n \text{ sen. } D \text{ sen. } (\alpha + \omega)}{\text{sen. } \beta \text{ sen. } A}$$

Cuando pueden medirse los ángulos A y D, cualquiera de estas ecuaciones suministra el valor de x, puesto que m y n son conocidos; pero para el caso contrario necesitamos eliminar esos ángulos. Multiplicando ordenadamente las dos últimas ecuaciones, y haciendo para abreviar:

$$F = \frac{\text{sen. } (\alpha + \omega) \text{ sen. } (\beta + \omega)}{\text{sen. } \alpha \text{ sen. } \beta}$$

resulta la siguiente de segundo grado:

$$x^2 + (m + n)\, x + m\, n = m\, n\, F$$

cuya resolucion dá:

$$x = -\tfrac{1}{2}(m + n) \pm \tfrac{1}{2}(m - n) \sqrt{1 + \frac{4\, m\, n\, F}{(m - n)^2}}$$

Para hacer esta fórmula mas fácilmente calculable por logaritmos, sea λ un ángulo subsidiario determinado por la relacion:

$$\tan.^2 \lambda = \frac{4\,m\,n}{(m-n)^2} \cdot \frac{\text{sen.}\,(\alpha+\omega)\,\text{sen.}\,(\beta+\omega)}{\text{sen.}\,\alpha\,\text{sen.}\,\beta} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

y el valor de la incógnita vendrá á ser:

$$x = -\tfrac{1}{2}(m+n) \pm \frac{m-n}{2\cos.\lambda} \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$\cos = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + \tan}}$

De los dos valores de x se adoptará el que dé una resolucion positiva. Este procedimiento puede emplearse para calcular parte de una base como en el caso que se resolvió en la pág. 17.

Prob. 7º Dado un triángulo ABC (fig. 132ª), *determinar la posicion de dos puntos M y N, visibles uno de otro, y desde cada uno de los cuales se ven dos de sus vértices.* Puede resolverse gráficamente este problema haciendo la construccion indicada en la pág. 86 para trazar dos círculos que pasen por AC y BC respectivamente, y tales que desde cualquiera punto de sus circunferencias se vean esos lados bajo ángulos iguales á los observados AMC y CNB. En seguida se traza por A una linea que forme con AC un ángulo $CAO = CMN$, y por B otra que forme con BC el ángulo $CBP = CNM$. La linea trazada por los puntos O y P en que aquellas encuentran á las circunferencias, determinará sobre las mismas las posiciones de M y N que resuelven la cuestion.

La resolucion trigonométrica es como sigue: en el triángulo ACO se conoce AC y los tres ángulos, puesto que A y O son respectivamente iguales á los observados CMN y AMC; podrá, pues, determinarse el lado CO. Por idéntica razon en el triángulo BCP se tienen los datos necesarios para calcular la distancia CP. Despues en el triángulo COP se determinarán los ángulos O y P con los datos CO, CP y el ángulo comprendido, cuyo valor es:......... $OCP = 360° - (AMN + BNM + ACB)$. Finalmente, los triángulos CMO y CNP, en que se conoce un lado y los tres ángulos, darán á conocer las distancias CM y CN, que con los ángulos en C fijan las posiciones de M y N. Si se quiere, pueden tambien calcularse AM y BN por medio de los triángulos ACM y BCN.

$OCP = BCP + OCA - BCA$ y sustituyendo por BCP y OCA sus valores en funcion de los angulos conocid

Aunque la resolucion es algo larga, el problema tiene bastante importancia en aquellos casos en que desde el punto que se quiere situar, tal como *M*, no sean visibles mas que dos vértices trigonométricos; porque bastará buscar otro punto *N* desde el cual se descubra otro vértice y uno de los anteriores.

Prob. 8º Dadas dos lineas A B, C D (fig. 133ª) *y un punto M fuera de ellas, trazar por este otra linea que concurra al punto de interseccion de las primeras.* Este problema se resolvió analíticamente en la pág. 179; pero tratándose de lineas cortas puede aplicarse esta otra resolucion. Entre las dos lineas dadas trácense dos paralelas *A C* y *B D* en una direccion cualquiera, y tambien la linea *M B*. Despues de medidas esas tres rectas, se traza por *A* una paralela á *M B*, sobre la cual se toma la parte *A N*, determinada por la ecuacion siguiente, que resulta de la comparacion de las lineas proporcionales.

BO : AO :: BD : AC :: BN : AN

$$A\,N = \frac{A\,C \times M\,B}{B\,D}$$

La recta trazada por los puntos *M* y *N* será la que resuelve el problema.

Podrian citarse otros muchos problemas de mas ó ménos utilidad práctica; pero confío en que los que se han expuesto, y sobre todo, los conocimientos que ha adquirido ya el lector, serán suficientes para que resuelva con facilidad los diversos casos que puedan presentársele.

CAPITULO XVIII.

PLANOMETRIA APROXIMATIVA.—RECONOCIMIENTOS MILITARES.—EXPLORACIONES RÁPIDAS.

173º Antes de dar por terminada la primera parte de la Topografía juzgo muy conveniente destinar algunas páginas á la exposicion de los procedimientos que pueden seguirse para levantar el plano aproximativo de una localidad cuando por falta de tiempo, de instrumentos, ó bien por no necesitarse un trabajo exacto, no es posible aplicar los que se han trazado en los Capítulos precedentes. Inútil parece advertir que los métodos de que voy á ocuparme en este, no deben emplearse cuando se trate de una operacion importante y cuyo resultado afecte á intereses mas ó ménos cuantiosos; pero hay tambien muchísimos casos en que la precision geométrica es innecesaria, ó bien imposible de obtener en medio de las circunstancias de que se halla rodeado el topógrafo. El ingeniero que practica un reconocimiento con el fin de formar un plan exacto de operaciones; el militar que quiere tener idea de los aproches de una plaza ó de un campamento enemigo, ó bien que necesita conocer la localidad en que establece su campo ó sus fortificaciones; el viagero que al explorar una region desconocida quiere trazar su camino, describir el país dando idea de los accidentes del suelo, formar sus itinerarios, &c., no necesitan por lo comun proceder con toda exactitud, ni cuentan tampoco con los medios indispensables para alcanzarla; pero es indudable que aprovechando con alguna habilidad cuantos recursos estén á su arbitrio, pueden ejecutar trabajos muy apreciables y de mucha importancia en su linea.

Con un órden decreciente en cuanto á exactitud, puede un explorador valerse de instrumentos sencillos, desde los que por su poco volúmen y fácil trasporte es fácil llevar siempre consigo, ó desde los que él mismo puede improvisar, hasta la aplicacion de procedimientos que no demandan el uso de instrumento alguno, como son los que tienen por base la apreciacion de distancias y ángulos á la simple vista. Daré á conocer algunos instrumentos propios para esta clase de trabajos, comenzando por los angulares.

La *brújula de reflexion* representada en la figura 134ª es el mejor goniómetro que puede emplearse para los reconocimientos. Consiste en una caja cilíndrica de laton *A B* en cuyo centro está un pivote que sirve de apoyo á una aguja magnética comun: invariablemente unido á la aguja hay un círculo de carton dividido *C*, que por su poco peso no entorpece el movimiento de la barra imantada, de modo que gira con ella. En los extremos de un diámetro de la caja están dos pínulas *C* y *D*, que son las que determinan la direccion de las visuales: la primera es del todo semejante á las del grafómetro que he descrito en otro lugar, y la segunda *D* va unida á un prisma de cristal cuya seccion es un triángulo rectángulo, y que tiene por objeto servir como reflector sin obstruir la vista en la direccion de la otra pínula, de suerte que á la vez que se mira directamente el hilo de esta y el objeto con el cual se ha puesto en coincidencia, se ve tambien por reflexion la division del limbo que está situada verticalmente debajo del prisma, y de ese modo el guarismo correspondiente á esa division dará la indicacion del instrumento, ó el azimut de la señal que se observa. Cuando esta se halla á una altura muy diferente de la del punto de estacion, se inclina el espejo *E* lo que sea necesario para que se vea reflejada en él

La brújula de reflexion puede fijarse en el extremo de una estaca que se clava en el suelo; pero comunmente se tiene en la mano, y para medir el azimut de un objeto, basta ponerla en la direccion conveniente para que el hilo de la pínula *C* pase por la señal, y aplicando entónces la vista en *D* se lee inmediatamente la graduacion del punto que coincide con el hilo. En *F* se ve la extremidad de la palanca que sirve para paralizar la aguja y disminuir la amplitud de sus oscilaciones. Para trasportar el instrumento, se reduce su volúmen cerrando las pínulas y el espejo, pues están unidos á la caja por medio de goznes ó charnelas.

Otro goniómetro tan pequeño y portátil como este es el *sextante de bolsa*, que no es otra cosa mas que el sextante comun reducido á unos cuantos centímetros de diámetro. Como este es esencialmente un instrumento astronómico, se dará en otro lugar su descripcion y los principios en que está fundado, bastando decir por ahora que tambien se aplica á la medida de ángulos terrestres, y que puede usarse en la mano lo mismo que la brújula de reflexion.

174º Careciendo de esos instrumentos, es fácil construir una especie de grafómetro de carton ó de madera, que dividido con algun esmero, creo que debe proporcionar reultados de una exactitud comparable con la de aquellos. Sobre una tabla delgada ó sobre un carton bien plano, se traza una circunferencia de $0^{m}.1$ á $0^{m}.2$ de diámetro que se divide en grados. La division se ejecuta fácilmente valiéndose del método de las cuerdas (pág. 76ª), esto es, construyendo sobre un mismo radio ángulos que difieran 1° entre sí, y en seguida por cada uno de los puntos obtenidos se trazan pequeñas lineas dirigidas al centro. De la misma materia se forma una alidada cuya longitud sea dos ó tres milímetros menor que el diámetro del círculo, y se fija en su centro por medio de un alfiler ó de una aguja, de manera que pueda girar libremente al derredor de su eje. En sus extremos se trazan dos divisiones que servirán de índices para hacer las lecturas, debiendo quedar en la linea que pasa por el centro del movimiento que es tambien el del círculo, y para determinar las direcciones de las visuales, puede hacerse uso de cuatro agujas finas, dos de las cuales se clavan en las divisiones 0° y 180°, y las otras dos sobre las lineas que sirven de índices en la alidada. En la parte inferior del círculo se pone un mango para tomar el instrumento ó para fijarlo en una estaca, que es como debe usarse con mejor éxito empleándolo lo mismo que el grafómetro. Si se desea obtener mas aproximacion en las lecturas, pueden trazarse pequeños vernieres en los extremos de la alidada; así, por ejemplo, si se divide en cuatro partes iguales el espacio de tres grados del círculo, podrán obtenerse cuartos de grado. Mayor aproximacion seria inútil; porque evidentemente por esmerada que sea la construccion y la division del instrumento, nunca debe esperarse que pueda dar los ángulos con ese grado de precision.

Tambien con un carton, un doble-decímetro y dos agujas se improvisa una plancheta para hacer el cróquis sobre el terreno mismo. Otras veces se emplea una pequeña brújula de mano, que no obstante su movilidad, permite medir los rumbos con la aproximacion de 2º ó 3º, aun usándola á caballo.

A falta de goniómetro pueden apreciarse los ángulos que forman entre sí dos ó mas direcciones, midiendo sobre cada una de ellas un corto tramo, así como la linea que une los extremos de estos. La figura 135ª representa con lineas continuas las partes $B\,a$, $B\,c$ y $a\,c$ que se miden, de las que las dos primeras se toman comunmente iguales; y lo mismo se hace en cualquiera otro punto. Es claro que aunque de esa manera no se conozca la amplitud del ángulo, se obtienen, sin embargo, los elementos necesarios para construirlo.

Por último, el ingeniero debe acostumbrarse á estimar los ángulos á la simple vista, lo que conseguirá fácilmente por medio de la comparacion frecuente de sus propias apreciaciones con el valor de algunos ángulos conocidos. El método que he aplicado algunas veces es este: puesto de pié y con el cuerpo inmóvil, vuelvo la cabeza á la izquierda para llevar la vista hácia la direccion que señalaria el brazo izquierdo extendido, y en seguida con un movimiento de cabeza uniforme la llevo hácia la derecha, quiere decir, á la direccion del brazo derecho tambien extendido. Este movimiento uniforme de 180° lo subdivido en partes de 10°, contando en el tiempo que dura, desde 0 hasta 18: el *cero* se pronuncia al comenzar á mover la cabeza, y el *diez y ocho* al llegar con la vista á la direccion de la derecha. Despues de dos ó tres ensayos se regulariza muy bien tanto la cuenta como el movimiento, y si se coloca el cuerpo de manera que uno de los objetos cuyo ángulo se desea conocer quede en la direccion del brazo izquierdo, y con igual uniformidad se mueve la cabeza contando al mismo tiempo hasta descubrir el otro objeto, es claro que el número que se pronuncie en este último instante será la decena de grados correspondiente al ángulo que se busca. Como es algo difícil lograr que los ojos permanezcan inmóviles y que no se adelanten al movimiento de la cabeza, es conveniente dirigir la vista por un tubo hecho con un papel enrollado, ó simplemente con la mano recogida. Yo creo que con alguna práctica pueden estimarse los ángulos de esa manera con 5° de aproximacion.

175º Entre los instrumentos que se emplean para medir aproximadamente las distancias, figura en primer lugar el *odómetro* llamado tambien *troquiámetro* y algunas veces *viámetro*. Este aparato se usa unido á la rueda de un carruaje ó á una rueda de mano, y tiene por objeto contar el número de vueltas que estas dan al pasar de un punto á otro; pues es evidente que conociendo ese número n y la circunferencia c de la rueda, la distancia recorrida será $k = c\,n$. Expresando c metros y fracciones se obtendrá k en la misma unidad; si se divide el resultado por 1000 se obtiene en kilómetros, y si se divide por 4190 en leguas mexicanas.

El instrumento consta de un rectángulo metálico $A\ B$ (fig. 136ª), en cuya mitad está fijo un eje cilíndrico $C\ D$, que por medio de dos anillos E y F sostiene una rueda de unos $0^{m}05$ de diámetro, ó por mejor decir, dos ruedas iguales montadas sobre el mismo eje a, y cuyos bordes dentados engranan en un tornillo sin fin que está en el centro del cilindro $C D$. La rueda anterior tiene 100 dientes y otras tantas divisiones numeradas que en la figura se ven en el círculo exterior $b\ c$; y la posterior tiene solo 99 dientes y el mismo número de divisiones señaladas en el círculo interior $d\ e$.

Supongamos ahora que las dos ruedas se hacen girar al derredor del eje fijo $C D$: como en cada vuelta que dén, el tornillo sin fin engrana con un diente del borde, resulta que al cabo de 100 vueltas la rueda exterior *b c* habrá dado tambien una vuelta entera al derredor del eje central *a*, de manera que el índice fijo *f* marcará la misma division que señalaba al principio del movimiento. La rueda posterior habrá engranado tambien 100 dientes con el tornillo sin fin; pero como su borde tiene solo 99, resulta que ha dado una vuelta mas la parte que corresponde á un diente, y el índice *e* que señala sus divisiones indicará una division de mas que en el punto de partida. Segun esto, despues de un número cualquiera de revoluciones de las dos ruedas al derredor de *C D*, la graduacion interior *e d*, por medio del índice *e* señala las *centenas* de vueltas, y el índice *f* en la graduacion exterior *b c*, el número de *unidades* y *decenas*, contadas unas y otras desde las indicaciones del instrumento al comenzar el movimiento. Supongamos que al principio los índices *e* y *f* señalaban las divisiones 14 y 73 respectivamente, y que despues de muchas revoluciones el primero marca 94 y el segundo 6. La indicacion del punto de partida es 1473, y como la otra es 9406, resulta que durante el movimiento ha dado el aparato 7933 vueltas. Si al principio se tiene cuidado de poner en *cero* los dos índices, es claro que la lectura que se haga al fin expresa desde luego el número de revoluciones.

Una vez concebido este sencillo é ingenioso mecanismo, se comprende que se obtendrá el mismo resultado si en lugar de mover las ruedas como he supuesto, se mueve el rectángulo *A B* al derredor del eje *C D*, permaneciendo las ruedas en la posicion vertical que toman naturalmente á consecuencia de su propio peso. Esto último es lo que realmente se verifica al hacer uso del odómetro: imaginémonos, en efecto, que el rectángulo *A B* se fija en una posicion invariable á la rueda de un carruaje, y de tal manera que el eje *C D* quede perpendicular á su plano; es evidente que al girar la rueda gira tambien el rectángulo, y que despues de una revolucion completa de la primera, el segundo habrá vuelto á su posicion primitiva, y el índice *f* señalará una division mas que al principio. Verificándose exactamente lo mismo en cada vuelta de la rueda, se ve que el odómetro indicará su número sea cual fuere.

Para hacer uso del instrumento se le coloca en una caja circular cuyo diámetro es igual al lado mayor del rectángulo *A B*, y la cual tiene comunmente una cubierta de cuero provista de las fajas y hebillas necesarias para asegurarla entre dos rayos de la rueda de un carruaje, y cerca del eje, como lo manifiesta la figura 137ª La posicion que guarda el odómetro dentro de su caja es la que se ha dicho, á saber: con el eje CD perpendicular al plano de la rueda.

La circunferencia de esta debe medirse con el mayor cuidado posible, en atencion á que cualquiera error de ese elemento tiene una influencia considerable en el valor de k, ó en otros términos, el error de k será igual al que haya en c multiplicado por el número n de revoluciones. Sirviéndose, sin embargo, de una cinta bien dividida, es fácil obtener el valor de c exacto hasta los centímetros, y ese grado de aproximacion es indudablemente el que basta. Supongamos, por ejemplo, que se hubiera hallado $c = 3^{m}67$, siendo como ántes, $n = 7933$; la distancia recorrida seria $k = 29114^{m}$, ó bien 29.114 kilómetros. Dividiendo el número de metros por 4190, resulta 6.95 leguas mexicanas. En este caso, es claro que $0^{m}01$ de error en c produciria otro de 79^{m} en el valor de k.

176° El odómetro es el instrumento mas propio para medir rápida y cómodamente grandes distancias con un grado de exactitud suficiente para la formacion de itinerarios y para la de un buen cróquis de reconocimiento; pero en su defecto puede acudirse á otro método que tiene por base la velocidad de traslacion de un punto á otro. Para que este procedimiento dé á conocer las distancias con regular aproximacion, es preciso recorrerlas con una velocidad tan uniforme como sea posible, y haber determinado previamente por varias experiencias comparativas el tiempo que en determinadas circunstancias se invierte en recorrer una distancia bien conocida, del cual se deduce la velocidad correspondiente al medio de locomocion que haya de emplearse. Así, por ejemplo, si con un carruaje ligero tirado por dos animales, se han invertido 90 minutos en recorrer una distancia de 13.2 kilómetros en terreno plano, se infiere que en identidad de circunstancias la velocidad es de 8.8 kilómetros por hora, ó bien de $0^{k}147$ por minuto. Haciendo varias comparaciones de esta clase se obtendrá un resultado medio que será el que se adopte para todos los casos en que se reunan las mismas condiciones que existian en las experiencias.

Es tambien indispensable variar las circunstancias con el fin de tomar en cuenta todas las que se presentan en un viaje dilatado, pues es evidente que ni el vigor de los animales puede suponerse constante en muchas horas de camino, ni por lo general lo es la naturaleza del terreno: pero determinando valores medios de la velocidad en terrenos horizontales, ascendentes, descendentes, en buenos caminos, en vías mas ó ménos difíciles, &c., se podrá aplicar en cada caso especial el que mejor convenga al conjunto de sus circunstancias. Expedicionando á caballo debe tambien determinarse la velocidad media, no solo variando las condiciones dependientes del terreno, sino tambien las que dependen del animal mismo; y así es preciso conocer el valor de aquel elemento para el paso natural, el trote, el galope, &c., del caballo.

Puede operarse de la misma manera cuando se viaje á pié; pero tratándose de lineas poco extensas es preferible contar el número de pasos necesarios para trasladarse de uno á otro de sus extremos, pues conociendo el valor métrico de cada paso, fácilmente se valúan las lineas recorridas. Tanto para determinar su valor como para medir de esa manera las distancias, es preciso acostumbrarse á emplear un paso perfectamente igual en extension y uniforme en compas, tal como el que se llama *paso militar.* Segun Mr. Laisné, (*) las longitudes medias del paso de las tropas francesas son las siguientes:

Paso acelerado ordinario	$0^{m}65$
Idem de camino	0. 80
Idem gimnástico	0. 83

Empleando el primero, se dán en término medio de 110 á 120 pasos por minuto; solamente 100 del segundo, y 165 del último. El número de pasos ordinarios de las tropas inglesas es de 100 por minuto.

Todo ingeniero debe determinar la extension de su paso, procurando únicamente habituarse á darlo con cierta cadencia que contribuye á hacerlo mas uniforme. Recorriendo de esa manera, y por varias veces una linea de l metros, sea n el número de pasos que se han dado, y representando por x el valor de cada uno, se tendrá: $x = \frac{l}{n}$. Si, por ejemplo, una persona ha andado tres veces una distancia de 3500 metros, y en la primera ha dado 4654 pasos, en la segunda 4637 y en la tercera 4662, tendrá en término medio....... $n = 4651$, de donde resulta $x = 0^{m}752$. Adoptado este valor, la

(*) *Aide-mémoire des officiers du génie,* por J. Laisné.

distancia k recorrida con cualquiera número n' de pasos es:........
$k = 0^{m}752\, n'$, al ménos en terrenos de igual naturaleza y empleando el mismo paso de las experiencias. Este modo de medir pequeñas distancias proporciona un grado tan notable de aproximacion, que puede aplicarse aun en la planometría regular para configurar los últimos detalles del levantamiento, cuando estos no sean de tal importancia que merezcan la aplicacion de métodos exactos.

Los resultados que se obtienen ya sea por el odómetro, ya por el tiempo que se emplea en recorrer las lineas, proporcionan inmediatamente las distancias itinerarias; pero como en la construccion de un plano importa conocer las distancias horizontales y directas, se hace á las primeras una correccion deducida de la experiencia, la que consiste en multiplicarlas por $\frac{4}{5}$ si el terreno es muy accidental. y por $\frac{6}{7}$ si es sensiblemente plano. Las correcciones equivalen á restar de las distancias itinerarias un 20 por ciento en el primer caso y un 14 en el segundo.

177º Los oficiales de ingenieros se forman idea de las distancias valiéndose de un anteojo pequeño con retícula de hilos horizontales: no difiere de la estadia comun mas que en que se usa en la mano y en que la magnitud que sirve de mira es la estatura de un hombre. Con este fin la retícula tiene varios hilos fijos á diversas distancias unos de otros y arregladas de manera que la talla media de un hombre que á lo léjos se vea comprendido entre dos de ellos, corresponda á cierta distancia que varia en cada combinacion que se haga de los hilos. Así, por ejemplo, si los mas separados corresponden á 100^{m} de distancia, y los mas cercanos á 500^{m}, bastará observar en cuál de los intervalos desiguales intermedios queda comprendida la imágen para venir en conocimiento de la distancia aproximativa. Por el hecho de no tener este instrumento estabilidad alguna, y por ser tan incierta la magnitud que sirve de mira, se comprende que solo debe dar una ruda aproximacion.

Con un tubo cualquiera puede improvisarse un instrumento análogo al anterior, poniéndole varios hilos ó cabellos en un extremo y mirando por el otro. Siendo l la longitud del tubo, e la estatura media del hombre y $\triangle$ su distancia al observador, la separacion de los hilos será evidentemente: $x = \frac{e\,l}{\triangle}$, fórmula en la que podrá tomarse $e = 1^{m}7$, y que permite colocar los hilos que correspondan á diversos valores de $\triangle$. Teniendo, por ejemplo, el tubo $0^{m}3$ de largo, los hilos correspondientes á $\triangle = 100^m$, deberán ponerse á $0^m.005$; para $\triangle = 500^m$, se pondrán $0^m.001$, y proporcionalmente para las distancias intermedias.

Puede tambien determinarse la distancia de un objeto de magnitud conocida por medio de una regla pequeña dividida en milímetros que se tiene en la mano con el brazo extendido. Con la uña del dedo pulgar se señala la parte de la regla, contada desde el *cero*, que cubre el objeto, pues siendo A la magnitud de este, a la indicacion de la regla y d su distancia al ojo del observador, se tiene en virtud de los triángulos semejantes que se forman: $\triangle = \frac{A\,d}{a}$. Para que d sea sensiblemente igual en todos casos, es conveniente valerse de un cordon atado al cuello y cuya extremidad se toma con la mano en que se tiene la regla: en esta disposicion y tendido el cordon puede medirse la distancia d de la regla al ojo, ó bien determinarse experimentalmente por medio de la observacion del valor de a que corresponde á un objeto y á una distancia de magnitudes determinadas. Acentuando, en efecto, los valores que se refieren á la experiencia reguladora, se obtiene: $d = \frac{a'\,\triangle'}{A'}$ que será el valor que se emplee para las observaciones subsecuentes. Al aplicar este procedimiento, el objeto que se observa puede ser un árbol, un hombre, un edificio, &c., con tal que se conozca su magnitud con alguna aproximacion.

178º Otro modo de estimar las distancias cuando son considerables consiste en contar el tiempo s que trascurre entre la produccion y la percepcion de un sonido cualquiera, puesto que su velocidad v conocida permite calcular la distancia á la cual se produce, siendo $\triangle = s\,v$ la relacion que existe entre esas cantidades. Este método puede suministrar las distancias con la aproximacion de un centenar de metros, y por consiguiente es bastante bueno para formarse una idea algo exacta de ellas cuando son considerables.

La velocidad del sonido por segundo varia algo con la temperatura del aire. La fórmula que dá su valor para cualquiera temperatura es: (*)

$$v = 331^m.4\,\sqrt{1 + a\,t}$$

en la cual el coeficiente numérico representa la velocidad á 0° de temperatura, a el coeficiente de dilatacion del aire y t la indicacion

(*) Pouillet. *Tratado de Física*, Tom. 2º pág. 109.

del termómetro centígrado. Si se introduce el valor de a y se desarrolla el radical, la fórmula puede escribirse como sigue para que sea mas cómoda en su aplicacion:

$$v = 331^m4 + 0^m608\, t$$

He desechado las potencias superiores de t, porque son tan pequeños sus coeficientes que no producirian ni 1^m, aun cuando t fuese de 40°; por consiguiente la fórmula anterior llena todas las necesidades de la práctica. En la mayor parte de los casos puede suponerse $t = 16°$ que es una temperatura media en nuestro país, y entónces $v = 341^m$ representa la velocidad del sonido en las circunstancias atmosféricas medias ú ordinarias.

Por lo general la explosion de una arma de fuego, comunmente un cañonazo, es la que sirve para la valuacion de las distancias por medio del sonido, contando el número de segundos s que trascurren entre la produccion de la luz ó de la columna de humo y la percepcion de la detonacion. La distancia será $\triangle = 341\ s$, y como 1^s de error en la apreciacion de s produciria otro de mas de 300^m en la distancia, se ve que es importante estimar hasta donde sea posible las fracciones de segundo. Los relojes dán generalmente en un minuto 150 sonidos ó golpes producidos por el volante, por lo que cada uno vale 0^s4. A veces dán solo 120 por minnto, y su valor es por consiguiente de 0^s5. De una ú otra manera es fácil con alguna práctica estimar $\frac{1}{5}$ ó $\frac{1}{4}$ de segundo, lo que reduce á 68^m ú 85^m respectivamente el error de la distancia.

179º Hay todavía otra manera de apreciar las distancias aunque con mucha menor aproximacion, y consiste en deducirlas de la mayor ó menor claridad con que á lo léjos se distinguen á la simple vista ciertos objetos bien conocidos. «Los árabes» escribe Mr. Gillespie, «definen una milla (*) diciendo que es la distancia á la cual no puede ya distinguirse un hombre de una muger.» Se comprende que esta clase de apreciaciones dependen enteramente de la vista mas ó ménos poderosa del observador, y por consiguiente cada persona debe experimentar el alcance de la suya para determinadas distancias; ademas de esto, la pureza y claridad de la atmósfera deben tomarse en cuenta, pues es seguro que, por ejemplo, en la mesa

(*) La milla inglesa tiene 1760 yardas ó 1609 metros próximamente.

central de la República cualquiera persona verá á mayor distancia que en las costas ó en general en los países poco elevados sobre el nivel del mar. Esto no obstante, consignaré aquí la estimacion que generalmente se hace del alcance de una vista de potencia media ó comun. Pueden contarse las puertas de un edificio grande en las condiciones atmosféricas comunes, á la distancia de 4000^{m}. Se ven como puntos los hombres y los caballos á 2200^{m}. Se distingue con claridad un caballo á 1200^{m}; los movimientos de los hombres á 800^{m}; la cabeza de un hombre se ve por intervalos á 700^{m}, y muy bien á 400^{m}.

180º Los métodos que se han indicado en este Capítulo, no obstante su notoria imperfeccion, son los únicos que por lo general puede emplear el viajero y con mas razon el ingeniero militar que en la necesidad de practicar sus reconocimientos muchas veces bajo los fuegos del enemigo, no puede tener la calma ni el tiempo ni los instrumentos indispensables para ejecutar operaciones exactas. Sus esfuerzos deben dirigirse á sacar el mejor partido posible de los medios de accion que estén á su alcance para configurar los principales accidentes del terreno inmediato á las posiciones enemigas, anotando la naturaleza del suelo, sobre todo si se trata de una plaza fortificada en que haya necesidad de ejecutar las operaciones de un sitio. Debe tambien fijar su atencion en las inclinaciones del terreno, en la existencia de pantanos, bosques, barrancas, rios y arroyos cuya anchura y profundidad es preciso medir; en la direccion de las caras de las fortificaciones, situacion de sus ángulos entrantes y salientes, &c. Todos esos detalles topográficos son indispensables para saber si el terreno es ó no accesible á la infantería, á la caballería y á la artillería, así como para elegir el punto de ataque. Ademas de estos, el ingeniero militar tiene que recoger otros datos relativos á la calidad, abundancia y precio de víveres y forrages, á los medios de trasporte, &c., que extraños á la parte geométrica, no son propios de este libro, por lo cual me limitaré á exponer las resoluciones de algunos problemas del órden topográfico aproximativo.

La anchura de un foso, de un barranco, &c., puede determinarse por alguno de los métodos que se han trazado en el Capítulo precedente para medir distancias inaccesibles, ó bien para los de la página 205; pero con la aproximacion casi siempre necesaria para el objeto, de esta otra manera. Desde una de las orillas *A* (fig. 138ª) se apunta con un fusil á la márgen opuesta *B*, y en seguida sin variar la posicion de la arma, se dá media vuelta, de modo que describiendo el fusil una superficie cónica, apunte hácia *C*. Es claro que la distancia de *A* á *C* es igual á la que se busca, por lo cual si se señala el punto *C*, puede medirse esa linea.

Si el foso no es muy ancho, arrojando con alguna fuerza una piedra en la orilla del agua, se formarán en ella las ondas circulares que ensanchándose llegan á la orilla opuesta, y entónces se mide la distancia del punto en que se arrojó la piedra al de la misma orilla, por donde pasa el círculo formado por la onda, en el momento en que toca la otra orilla.

Ademas de la anchura, debe medirse la profundidad y la velocidad de los cursos de agua. Un vado es accesible á la infantería cuando su profundidad no excede de $0^{m}.8$ á $1^{m}.0$ segun que la corriente sea mas ó ménos rápida; para la caballería no debe exceder de $1^{m}2$ á $1^{m}.3$; para la artillería y los carruages de $0^{m}.7$ á $0^{m}.8$.

La velocidad se determina contando los segundos que emplea un cuerpo flotante, tal como un pedazo de madera, en recorrer una distancia conocida; dividiendo el espacio por el tiempo se obtiene la velocidad v' en la superficie de la corriente. La velocidad en el fondo es $v'' = (\sqrt{v'} - 1)^2$, y la velocidad media será: $v = \frac{1}{2}(v' + v'')$. Se dice en general que una corriente es lenta cuando su velocidad no pasa de $0^{m}.5$ por segundo; que es ordinaria de $0^{m}.8$ á $1^{m}.0$; rápida de $1^{m}.5$ á $2^{m}.0$; muy rápida de $2^{m}.0$ á $3^{m}.0$; impetuosa desde $3^{m}.0$ en adelante.

De un rio se dice que es flotable cuando tiene por lo ménos $0^{m}.6$ de profundidad; navegable si tiene $1^{m}.0$, y en general una profundidad de $0^{m}.2$ á $0^{m}.3$ mayor que la cala de las embarcaciones.

Las inclinaciones del terreno se miden fácil y aproximadamente como lo manifiesta la figura 139ª, esto es, anotando desde *A*, *B*, *C*, &c., los puntos *B*, *C*, &c., que señala la puntería horizontal de una arma; pues es evidente que la altura de *B* respecto de *A*, la de *C* respecto de *B*, &c., son iguales á la de la vista al apuntar, y que cada persona determinará experimentalmente, aunque acaso siempre puede adoptarse $1^{m}.5$ como valor medio. Esta cantidad multiplicada por el número de puntos que se hayan visado dará la altura del ascenso, y si á la vez se miden las distancias horizontales *A E*, *E F*, &c., se podrá construir el perfil *A B C*...... del terreno, cuyo declive medio se obtiene dividiendo la altura, tal como $B\,E$ ó $C\,F$ por las distancias horizontales $A\,E$, $A\,F$, &c., correspondientes. En un plano militar las inclinaciones que mas importa indicar son: la de 60°, que corresponde próximamente á una pendiente ó declive de 4 de base por 7 de altura, y que es inaccesible á la infantería; la de 45°, ó 1 de base por 1 de altura, de muy difícil acceso á la infantería; la de 30°, de 7 de base por 4 de altura, inaccesible á la caballería; la de 15°, ó 4 de base por 1 de altura, inaccesible á la artillería y á los carruajes; y por último, la de 5° cuya base es próximamente de 12 por 1 de altura, de fácil acceso á los carruajes.

181º Todo lo que se ha dicho respecto de los reconocimientos militares se aplica tambien á las exploraciones que un viajero instruido, práctico y laborioso hace en regiones poco conocidas. Aunque en este caso es mas vasto el campo de investigacion, tambien por lo general pueden prepararse mejores medios de accion y usar de ellos de una manera mas tranquila. Siempre que sea posible, debe el explorador recorrer mas de una vez cada sendero, cerrando por medio de grandes polígonos, las lineas de su reconocimiento, ó terminándolas en puntos de posicion bien conocida, como ciudades de importancia, montañas notables, &c., ó mejor todavía en puntos que fije astronómicamente. Por imperfectos que parezcan, ó que sean realmente los métodos que se emplean en una exploracion rápida, no debe desdeñarlos un hombre instruido cuando no pueda hacer otra cosa, con tal que no deduzca de los resultados mas que las consecuencias que estrictamente se deriven de su grado de exactitud: siempre presentará de esa manera una base para el conocimiento físico-geográfico de un país en que hay tanto inexplorado. Precisamente para emplear con discernimiento y acierto los métodos aproximativos es necesario estar muy versado en la aplicacion de los exactos, y puede decirse que el resultado de un trabajo de reconocimiento mide en cierta manera el grado de pericia é instruccion de su autor. Los ingenieros son casi las únicas personas instruidas que viajan en la República, y por consiguiente el porvenir de nuestra topografía, de nuestra geografía, de nuestra flora, de nuestra fauna, &c., están en sus manos.

[illegible] se obtiene dividiendo la altura [illegible] como [illegible]
[illegible] horizontales [illegible] correspondientes. En un [illegible] de las inclinaciones que más importa indicar está la de 45°, que corresponde próximamente á una pendiente ó declive de 1 de base por 1 de altura, y que es inaccesible á la infantería; la de [illegible], ó [illegible] de base por 1 de altura, es muy difícil acceso á la infantería; la de 30°, de 7 de base por 4 de altura, inaccesible á la caballería; la de 15°, ó 4 de base por 1 de altura, inaccesible á la artillería y á los carruajes; y por último la de 5°, cuya base es próximamente de 12 por 1 de altura, de fácil acceso á los carruajes.

1489. Todo lo que se ha dicho respecto de los reconocimientos militares se aplica también á las exploraciones que un viajero instruido [illegible] hace en [illegible] conocidas. Aunque no necesite [illegible] el [illegible] de investigacion, también por [illegible] [illegible] y [illegible] de una manera más [illegible]. Siempre que sea posible, debe el explorador [illegible] más de una vez [illegible] los horizontes, las líneas de su [illegible] puntos de posicion bien conocidos, como ciudades de importancia, [illegible] notables, etc., y [illegible] puntos que [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] en un país en que hay [illegible] [illegible] [illegible] muy [illegible] en la [illegible] de los [illegible] que el resultado de [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] de nuestra [illegible] [illegible].

PARTE SEGUNDA.

AGRIMENSURA.

CAPITULO I.

PRINCIPIOS GENERALES.—MEDIDAS AGRARIAS.

182º La determinacion de la superficie de un terreno supone conocidos, ya por la medida directa ya por medio del cálculo, los elementos de la figura que lo limita, lo que equivale á decir que supone levantado su plano por cualquiera de los procedimientos que ampliamente se han expuesto en la parte primera de este libro. Sin embargo, debo añadir que cuando el objeto con que se mide el terreno es únicamente el de valuar su superficie, el levantamiento se ciñe generalmente á los elementos que son estrictamente indispensables para hacer determinada la figura, prescindiendo de todos los detalles que pueda contener, y por eso se ven con bastante frecuencia planos en que no constan mas que los linderos de las propiedades; pero como la diferencia entre un levantamiento completo y otro que tenga por exclusivo objeto la determinacion del contenido ó superficie del terreno, solo consiste en que en el primer caso entran detalles que en el segundo son innecesarios, siempre supondré que se conocen por lo ménos los elementos mas precisos para determinar y por consiguiente para construir el polígono. No teniendo ya que ocuparme de la parte referente al levantamiento, será necesariamente corta la exposicion de los métodos de la agrimensura propiamente dicha.

La dificultad que ocurre desde luego es esta: los procedimientos de la planometría suministran la proyeccion horizontal del terreno, y en consecuencia los elementos de esta proyeccion, la que teniendo necesariamente una superficie menor que la del terreno que representa, debe dar un resultado erróneo al tomar el contenido de la una por el del otro. Este hecho es irrecusable; pero ademas de la dificultad, ó por mejor decir, de la imposibilidad de representar en un plano una superficie no desarrollable como lo es la de un terreno mas ó ménos accidental, hay otras razones que sancionan la práctica de medir la superficie horizontal en lugar de la natural, y hoy está prescrito así por las leyes de todos los países. Desde luego el valor del terreno depende del de sus producciones, y como si no todas, la mayor parte de las plantas productivas crecen verticalmente y no perpendicularmente á la superficie natural del suelo, resulta que en extensiones iguales se produce sensiblemente el mismo número de plantas en una superficie horizontal que en una inclinada. Aun tratándose de terrenos incultos es esto una verdad; pero con mas razon lo es en los cultivados, puesto que las siembras se hacen con cierto órden para que las plantas crezcan equidistantes entre sí, y su equidistancia se señala en el sentido horizontal. Por otra parte, miéntras mas inclinadas son las tierras presentan mayores dificultades para el riego y para el cultivo, á la vez que son mas fácilmente deslavadas por las lluvias, por lo que en general valen siempre ménos que las horizontales; y cuando tienen una inclinacion muy considerable que es el caso en que la superficie real difiere mas de su proyeccion, es precisamente cuando tienen ménos valor, pues en esas condiciones raras veces son laborables ó dán un producto insignificante respecto de su contenido. Por todas estas razones se ha juzgado con fundamento que la proyeccion horizontal dá á conocer la *superficie útil* del terreno, ó bien que si la de este es en realidad mayor que la de aquella, en compensacion es un hecho que el producto efectivo de las tierras es el que provendria de una area igual á la proyeccion horizontal.

La medida de esa superficie puede hacerse por métodos gráficos ó por métodos analíticos: los primeros suponen construido el plano de la figura del cual se toman los datos necesarios con ayuda de la escala; miéntras que para aplicar los segundos no es absolutamente indispensable un plano exacto, pues siendo su único objeto el de guiar las operaciones numéricas, se obtiene el mismo resultado con un simple cróquis del terreno. Ademas de esto, en el primer caso se necesita no solo una construccion ejecutada con el mayor esmero, sino tambien en una escala bastante grande para que puedan medirse con bastante precision las lineas que se necesiten, pues obteniéndose las superficies por medio del producto de dos distancias, es claro que cualquiera error que haya en estas tiene mucha influencia en los resultados. No sucede lo mismo cuando se aplican los procedimientos analíticos en atencion á que no se toma dato alguno directo del plano ó del cróquis.

183º Establecidos estos principios generales, y ántes de entrar en pormenores, demos á conocer las *medidas agrarias*, ó las unidades de superficie en que se valúan los terrenos. Adoptado en la República como legal el sistema decimal de medidas, comenzaré por las de este para indicar despues sus relaciones con las del sistema antiguo y con las medidas inglesas, por necesitarse con bastante frecuencia la reduccion de unas á otras.

Todas las unidades del sistema decimal se derivan del *metro*, que como es sabido, representa la *diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre*, ó sea del arco de meridiano comprendido entre el ecuador y el polo. Lo que caracteriza esencialmente este sistema, es que partiendo de la primera unidad que es el metro, todas las demas crecientes ó decrecientes, están en relacion décupla, quiere decir, que cada una es diez veces mayor que la que la precede en el órden creciente, ó que la que la sigue en el decreciente. Esta es absolutamente la misma combinacion que la de nuestro sistema de numeracion.

Las unidades crecientes se designan con nombres compuestos del de la unidad fundamental y de voces griegas antepuestas, que expresan la relacion de cada unidad á la primitiva. Estas voces son: *deca*, *hecto*, *kilo*, *miria*, &c., que significan respectivamente diez, cien, mil, diez mil, &c., y así se dice *decámetro*, *hectómetro*, *kilómetro* y *miriámetro* para designar longitudes de diez, cien, mil, diez mil metros.

Las unidades decrecientes tienen nombres en que tambien entra como componente el de la primitiva; pero en los cuales es latino el de la relacion; así es que se anteponen las voces *deci*, *centi*, *mili*, *decimili*, &c., que significan décimo, centésimo, milésimo, diez milésimo, &c., y se dice *decímetro*, *centímetro*, *milímetro*, *decimilímetro*, &c., para expresar longitudes de la décima, la centésima, la milésima, la diezmilésima, &c., parte del metro. El uso, sin embargo, ha consagrado las palabras *diezmilímetro* y *cienmilímetro* en vez de *decimilímetro* y *centimilímetro* que acaso serian mas propias.

Como las unidades deben ser proporcionadas en magnitud á las extensiones que se miden, resulta que el metro puede considerarse como la unidad mas conveniente para valuar longitudes pequeñas; el decámetro y el hectómetro para las que son un poco mayores; miéntras que el kilómetro y el miriámetro deben considerarse como unidades itinerarias ó propias para valuar grandes distancias.

184º Segun el principio de la generacion de las areas se deduce que creciendo las unidades lineales del sistema decimal como 1 á 10, las superficies semejantes formadas sobre esas unidades crecerán como 1 á 100. Así, por ejemplo, el cuadrado que tiene por lado un decámetro contiene 100 metros cuadrados; el que tiene por lado un hectómetro contiene 100 decámetros cuadrados; el que tiene por lado un kilómetro contiene 100 hectómetros cuadrados, &c. El cuadrado construido sobre un decámetro es la unidad de superficie agraria, y se llama *ara;* el construido sobre un hectómetro se llama *hectara*, que como se ha visto y su nombre lo indica, contiene 100 aras; el construido sobre un kilómetro lleva el nombre de *miriara*, puesto que contiene 100 hectaras ó 10000 aras. El metro cuadrado considerado como parte de la unidad agraria, se denomina algunas veces *centiara*, por ser en efecto la centésima parte de la ara.

Las superficies de corta extension se valúan generalmente en aras, las medianas en hectaras, y las considerables en miriaras. Para medir las grandes superficies geográficas convendria tal vez hacer uso de la unidad construida sobre un miriámetro, que se llamaria *hectomiriara*, y tendria por consiguiente 100 miriaras, ó 10000 hectaras, ó bien 1000000 aras.

De todo lo expuesto se infiere que dada una superficie expresada en cualquiera de esas unidades, puede expresarse en otra unidad con variar simplemente el lugar del punto que separa la parte entera de la decimal. Así, para expresar la superficie dada en unidades inmediatamente mayores se moverá el punto dos lugares hácia la izquierda; miéntras que para expresarla en unidades inmediatamente menores, se mueve dos lugares hácia la derecha. Representando las diversas medidas agrarias con las letras mayúsculas iniciales de sus nombres, supongamos, por ejemplo, que se tenga una superficie de 518046347 metros cuadrados: si se quiere expresar en aras será $s = 5180463^{A}47$; si se desea que indique hectaras, escribirémos $s = 51804^{H}6347$; y para que exprese miriaras tendrémos........... $s = 518^{M}046347$. Podria expresarse tambien en todas las unidades á la vez incluyendo las centiaras, á saber: $s = 518^{M}04^{H}63^{A}47^{C}$, que se leeria *quinientas diez y ocho miriaras, cuatro hectaras, sesenta y tres aras y cuarenta y siete centiaras.*

Siempre que los factores que producen una superficie se expresan en metros, esta resultará en metros cuadrados ó centiaras; pero es evidente que puede obtenerse inmediatamente en cualquiera otra unidad haciendo que los factores expresen la unidad lineal correspondiente. Sean, por ejemplo, $3249^{m}0$ y $524^{m}5$ los factores de una superficie: esta será de 1704100.5 metros cuadrados; pero si se quiere que desde luego exprese hectaras, los factores deberán ser $32^{h}49$ y $5^{h}245$. Si estos se expresan en kilómetros tendrémos............. $s = 3^{k}249 \times 0^{k}5245 = 1^{M}7041005$, quiere decir, que la superficie resultará en miriaras.

185º El antiguo sistema de medidas derivado del español, tiene el inconveniente de que sus diversas unidades no guardan entre sí una relacion constante, y aun en algunos casos sus relaciones no pueden expresarse en números enteros. Para indicar las reducciones de las medidas de un sistema á las del otro, demos á conocer las principales unidades del antiguo.

La unidad lineal es la *vara*, la itineraria la *legua* de 5000 varas; la unidad de superficie la *vara cuadrada*, y las principales agrarias son la *caballería* que servia para valuar terrenos poco extensos, y el *sitio de ganado mayor* que se empleaba en la medida de grandes extensiones. La caballería contiene 609408 varas cuadradas, ó sea un cuadro de 780.646 varas próximamente de lado, aunque por lo comun se supone ser un rectángulo cuyos lados son 1104 y 552 varas. El sitio es exactamente una legua cuadrada, y en consecuencia tiene 5000 varas por lado, y una area de 25000000 varas cuadradas: su relacion con la caballería no es entera, pues contiene 41.0234 caballerías con muy corta diferencia. Ademas de estas unidades hay otras que no menciono por ser poco usadas.

Las relaciones entre las medidas de los sistemas antiguo y moderno se deduce del valor legal de la vara mexicana, que es el de $0^{m}838$ (ochocientos treinta y ocho milímetros). La legua tendrá segun esto, 4190^{m}; la vara cuadrada 0.702244 metros cuadrados; la caballería $42^{H}795311$, ó sea 427953.11 metros cuadrados; y el sitio 17556100 metros cuadrados, ó bien $1755^{H}61 = 17^{M}5561$. Estas serán las cantidades que multiplicadas por un número cualquiera de unidades del antiguo sistema darán las correspondientes del nuevo; y por el contrario, dividiendo las de este por esos números, se obtendrán unidades del antiguo sistema. (*) Pondré á continuacion los logaritmos y cologaritmos de esos factores.

		LOG.	COLOG.
Para convertir	varas en metros......	9.9232440......	0.0767560
,,	,, leguas en kilómetros..............................	0.6222140......	9.3777860
,,	,, varas cuadradas en metros cuadrados..	9.8464880......	0.1535120
,,	,, caballerías en hectaras........................	1.6313962......	8 3686038
,,	,, sitios en miriaras................................	1.2444281......	8.7555719

Los *cologaritmos* ó complementos logarítmicos sumados con el logaritmo del número de unidades del nuevo sistema dará el logaritmo del número de unidades del antiguo; ó en otros términos, los cologaritmos servirán para hacer la reduccion contraria á la que está expresada en frente de los logaritmos. Veamos, por ejemplo, á cuántos sitios equivalen $53^{M}00$.

Colog...........................	8.75557	
Log. 53..........................	1.72428	
	0.47985.........	3.0189

Resultan, pues, poco mas de 3 sitios, ó la misma cantidad que se obtendria dividiendo el número dado 53 por la relacion constante 17.5561.

186º Como suelen ofrecerse reducciones de las medidas decima-

(*) En una publicacion sobre el sistema decimal que hice en 1862, se encuentran numerosas tablas con cuya ayuda se hacen las reducciones con la mayor facilidad por medio de simples sumas.

les adoptadas en México, Francia y otras naciones, á las unidades del sistema inglés, daré á conocer las principales de estas y sus relaciones con el metro y las que de él se derivan.

La unidad inglesa de longitud es la *yarda;* la unidad itineraria la *milla* que tiene 1760 yardas; la de superficie es la *yarda cuadrada;* las agrarias son el *acre* que tiene 4840 yardas cuadradas para medir superficies pequeñas, y la *milla cuadrada* que contiene 640 acres para valuar grandes extensiones.

En medidas decimales la yarda vale $0^{m}91438347$; la milla...... $1^{k}60932$; la yarda cuadrada es igual á 0.836097 metros cuadrados; el acre equivale á $0^{H}404671$; y la milla cuadrada á $2^{M}589895$. (*) Pongo á continuacion los logaritmos que servirán para convertir en inglesas las medidas decimales y viceversa.

	LOG.	COLOG.
Para convertir metros en yardas	0.0388716	9.9611284
„ „ kilómetros en millas	9.7933589	0.2066411
„ „ metros cuadrados en yardas cuadradas	0.0777432	9.9222568
„ „ hectaras en acres	0.3928979	9.6071021
„ „ miriaras en millas cuadradas	9.5867179	0.4132821

Estos logaritmos combinados con los de la página precedente permitirán reducir unas á otras las medidas inglesas y las mexicanas del antiguo sistema. Supongamos, por ejemplo, que se quiera saber cuántas varas cuadradas contiene el acre. Como se tiene el logaritmo para convertir acres en hectaras, y la hectara tiene 10000 metros cuadrados, bastará aumentar 4 unidades á la característica de ese logaritmo para obtener el que convierte acres en metros cuadrados, y resultará:

Acres en metros cuadrados	3.6071021	
Metros cuadrados en varas cuadradas	0.1535120	
	3.7606141	5762.54

(*) En los Estados-Unidos se usa el mismo sistema que en Inglaterra; pero el patron de la yarda aunque copiado del de la inglesa, resultó un poco mayor, porque es igual á $0^{m}91443654$. La yarda americana está, pues, con la inglesa en la relacion de 1.000000 á 0.999942. Tomando por unidad la inglesa, la yarda americana será 1.000058. Me parece, sin embargo, que en la actualidad está adoptado en los Estados-Unidos el sistema decimal, al ménos para los asuntos oficiales.

El acre contiene, pues, 5762.54 varas cuadradas mexicanas. Del mismo modo pueden hacerse muchas combinaciones.

El *pié* inglés (*foot*, plural *feet*) que es la tercera parte de la yarda, es muy usado para medir distancias pequeñas, así como el pié cuadrado para superficies muy cortas. Esta última unidad es evidentemente igual á la novena parte de la yarda cuadrada.

Para facilitar las reducciones que pueden ofrecerse á medidas de otros países, tomo los siguientes datos de la obra del Cap. Lee titulada «*Tables and Formulæ.*» Todos expresan la relacion de la medida llamada *pié* en diversos países con el metro.

Pié de México	0^m2793333
Idem de España	0. 2826553
Idem de Francia (Pié de Paris)	0. 3248394
Idem de Inglaterra y Rusia	0. 3047945
Idem de Prusia y Dinamarca	0. 3138535
Idem de Baviera	0. 2918592
Idem de Sajonia	0. 2831901
Idem de Suiza y Baden	0. 3000000
Idem de Austria (Pié de Viena)	0. 3161109

Mr. Lee confunde el pié mexicano con el español suponiéndolos iguales; pero siendo el nuestro la tercera parte de la vara mexicana cuyo valor legal es de 0^m838, lo he separado del pié español.

CAPITULO II.

PROCEDIMIENTOS GRÁFICOS PARA MEDIR LA SUPERFICIE.

187º Segun dije en el Capítulo anterior, para medir gráficamente la superficie de un terreno es preciso haber construido su plano ó por lo ménos su perímetro en la mayor escala que sea posible, puesto que de él se toman las lineas necesarias para el cálculo. Esta condicion comun á todos los métodos gráficos los hace sustancialmente iguales; pero como pueden seguirse diversos caminos para tomar los datos, los dividiré en tres clases que expondré por separado.

Primer método. Este consiste en dividir los polígonos en triángulos, ya sea por medio de rectas que parten de un solo vértice A (fig. 140ª), ya de dos ó mas A, D, E, &c., (fig. 141ª), ó ya en fin de un punto cualquiera O de su interior (fig. 142ª) En seguida se trazan las alturas de los triángulos componentes, y por último se mide con el doble-decímetro la base b y la altura a de cada uno, que reducidas á los valores que esas lineas tendrian en el terreno, segun la escala de la construccion, permitirán calcular la superficie por la fórmula $s = \frac{1}{2} a b$. La suma de esas areas parciales será, pues, la del polígono.

Con el fin de medir el menor número posible de lineas, es conveniente tomar por base de dos triángulos contiguos la linea que los separa. En las figuras 140ª y 141ª se ve esa disposicion en la parte $A B C D$ de los polígonos: la base comun es en el primer caso $A C$ y en el segundo $B D$. De ese modo la medida de las lineas $A C$, $B b$ y $D d$ en la fig. 140ª, y la de las rectas $B D$, $A a$ y $C c$ en la 141ª dá la superficie de dos triángulos; miéntras que si, por ejemplo, se hubieran tomado por bases $B C$ y $A D$, habria sido necesario medir cuatro lineas para calcular la misma superficie.

Las perpendiculares ó alturas de los triángulos se trazan generalmente por medio de una escuadra apoyada en una regla que se hace coincidir con las bases. Sin embargo, cuando las alturas son grandes es preferible trazarlas por la construccion geométrica bien conocida para tirar una perpendicular á una linea desde un punto dado.

188º *Segundo método.* Si los polígonos tienen muchos lados, mejor que dividirlos en triángulos, lo que debe hacerse es circunscribirles un rectángulo que pase por sus vértices extremos, como lo representa la figura 143ª Bajando despues perpendiculares de todos los demas sobre los lados del rectángulo, se tendrá una serie de trapecios y triángulos entre los lados de este y los del polígono, los cuales en conjunto forman la diferencia entre las superficies de una y otra figuras. Si, pues, se miden los lados del rectángulo, así como las alturas de todos los triángulos y trapecios, podrá obtenerse la superficie total y la que constituye su diferencia con la del polígono, que resultará de la simple sustraccion de ambas cantidades.

En este método pueden tambien combinarse entre sí las alturas y las bases medidas para obtener gráficamente las coordenadas de los vértices del polígono referidas á los lados del rectángulo como ejes. Por ejemplo, suponiendo el orígen en M, las coordenadas del punto E seran $x = E\,N$, $y = C\,c + D\,d + E\,e$. Una vez conocidos esos elementos para cada vértice se aplica cualquiera de las reglas que se han establecido en las páginas 183, 184 y 185 para obtener la superficie.

Puede darse una forma á que se á conocer ...al de los meto- dos es el prefe- rible -

Otras veces en lugar de circunscribir al polígono dado el rectángulo auxiliar, se traza este de manera que cortando los lados de la figura su superficie sea próximamente igual á la de aquel, lo cual se consigue estimando á la simple vista las superficies que quedan comprendidas entre los lados del rectángulo y los del polígono, como lo indica la figura 144ª, á fin de que las diferencias por exceso resulten casi iguales á las diferencias por defecto. Despues de medidas las lineas necesarias para el cálculo de esas diferencias, se dá á las superficies de los pequeños triángulos y trapecios el signo conveniente, segun que deban sumarse con la del rectángulo ó restarse de ella, para obtener la del polígono; asi, por ejemplo, la parte $a\,B\,c\,N$ será sustractiva, y $c\,C\,d$ aditiva. Este modo de operar puede ofrecer la ventaja de que el resultado final quede casi independiente de los pequeños errores que se cometen al medir las bases y las alturas, sobre todo si se consigue que las diferencias positivas sean sensiblemente iguales á las negativas.

De aqui subiera inferirse un método ana- lítico -

189º *Tercer método.* Con el fin de evitar la medida de muchas lineas se recurre algunas ocasiones á la construcion geométrica que sirve para disminuir el número de lados de un polígono sin alterar su superficie. Sea $A\,B\,C\,D\,E\,F$ (fig. 145ª) el polígono dado: para reducir á uno solo los lados $E\,F$ y $F\,A$, se traza la recta $A\,E$ y por F la paralela $F\,a$ á esta última; la linea $E\,a$ será la que resuelve el problema, puesto que los dos triángulos $E\,F\,A$ y $E\,a\,A$ son equivalentes. La misma construccion suministra la recta $D\,M$ en lugar de los dos lados $D\,E$ y $E\,a$; así como $D\,N$ en vez de $B\,C$ y $C\,D$, por lo cual el polígono queda reducido al triángulo $M\,D\,N$ de igual superficie. Midiendo, pues, su base y su altura se obtendrá la area del polígono.

Aunque toda figura poligonal puede reducirse de ese modo á un triángulo, ó por lo ménos trasformarse en otra cuyo perímetro sea

La dob. sup. de un polig = á la suma algebr. de los prod. que resultan de multiplicar la abs. de cada vert. por la orden. del vert. que le precede, menos la del que le sigue.

La dob. Sup. de un polig = á la suma algebr. de los prod. que se obtienen multiplicando la orden. de cada vert. por la abs. del que le sigue, ménos la del que le precede.

La superf. de un polig = á la suma algebr. de los productos que se obtienen multiplicando la ordenada media de cada lado por la difer. de absisas de sus estremos, restando siempre cada una de la que le sigue.

mas sencillo, sucede á veces que las construcciones exigen un gran espacio libre en el papel con que no siempre se cuenta, y ademas el trazo de las lineas paralelas auxiliares está sugeto á inexactitudes que aumentan materialmente las probabilidades de error. Tanto por esto como por ser sin duda alguna mas complicado este método que los anteriores, no creo que se encuentre ventaja en preferirlo á aquellos, si no es simplemente con el objeto de regularizar un poco los polígonos cuando sean muy sinuosos para descomponerlos en menor número de triángulos, ó para circunscribirles con mas facilidad una figura rectangular.

Tales son en resúmen los tres métodos gráficos que se aplican para determinar la superficie de un polígono. Las operaciones numéricas á que dán lugar son tan sencillas, que me parece inútil aplicarlas á un ejemplo, y me limitaré á recomendar al lector que tanto para comprobar el resultado como para descubrir algun error que pudiera existir en las multiplicaciones ó en los datos, procure siempre calcular la superficie por medio de dos ó mas sistemas de lineas, ó bien aplicando dos métodos diferentes como el primero y el segundo. Si únicamente quiere hacer uso del primero, convendrá que efectúe la descomposicion del polígono en triángulos, tomando distintos vértices por puntos de division; y si solo aplica el segundo deberá variar la posicion de los lados del rectángulo auxiliar. Nunca ó casi nunca hallará resultados exactamente iguales por medio de diversas lineas ó de distintos métodos; pero la magnitud de las diferencias comparada con la de la superficie lo pondrá en estado de juzgar si aquellas provienen únicamente de la influencia de los errores que inevitablemente se cometen al medir gráficamente las distancias, ó bien son originadas por equivocaciones notables que demanden la repeticion de las operaciones. Es sumamente difícil señalar el límite de tolerancia en esta clase de comprobaciones, porque dependiendo los resultados del grado de precision con que se ejecutan los trazos de las lineas y la aproximacion con que pueden medirse, influyen en ellos de una manera muy notable no solo la escala del plano, sino tambien la mayor ó menor habilidad del dibujante; pero creo que en circunstancias comunes siempre que la diferencia entre dos ó mas medidas gráficas de una misma superficie no exceda de $\frac{1}{300}$ de su valor, puede atribuirse fundadamente á la influencia de los errores inevitables que se han mencionado, y el término medio de los diversos resultados representará el valor mas plausible de la superficie que se busca.

190º Suele presentarse el caso de que los polígonos estén limitados por lineas curvas como sucede cuando un camino ó un rio les sirven en parte de linderos. Entónces para determinar la superficie por cualquiera de los métodos gráficos, se sustituye al límite curvilineo otro rectilineo auxiliar, y despues de calculada la area comprendida entre los alineamientos rectilineos se le agrega ó se le quita segun el caso, la superficie contenida entre las lineas rectas y las curvas, la cual se determina por algunas de las fórmulas que van á desarrollarse.

Sea AB (fig. 146ª) una parte del alineamiento rectilineo y CD la parte del verdadero límite curvilineo: para calcular la superficie comprendida entre ambas lineas se divide la recta en un número cualquiera de partes iguales y por los puntos de division se levantan perpendiculares hasta que encuentran á la curva. Propongámonos determinar la superficie $17\ FE$ terminada por las ordenadas ó perpendiculares extremas $E1$ y $F7$, que es evidentemente igual á la suma de los trapecios mixtilineos formados por la curva, las ordenadas y la equidistancia de estas. Desde luego si la equidistancia es bastante pequeña podrémos admitir sin error de importancia que es sensiblemete recta la porcion de la curva comprendida entre cada dos ordenadas, ó lo que es lo mismo, que los trapecios son rectilineos. Entónces representando por y las ordenadas con el índice numérico que señala su órden desde 1 hasta n, y por h la equidistancia, las superficies de los $n-1$ trapecios serán:

$$s_1 = \tfrac{1}{2} h\,(y_1 + y_2)$$
$$s_2 = \tfrac{1}{2} h\,(y_2 + y_3)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$s_{n-1} = \tfrac{1}{2} h\,(y_{n-1} + y_n)$$

cuya suma dá la superficie s que se busca, á saber:

$$s = \tfrac{1}{2} h\left(y_1 + y_n + 2\,(y_2 + y_3 + \cdots\cdots y_{n-1})\right)\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

Esta fórmula equivale á la regla siguiente: *la superficie comprendida entre la curva y la recta es igual á la mitad de la equidistancia* *multiplicada por la suma de las ordenadas extremas, mas la doble suma de todas las intermedias.*

Es acaso un poco mas exacto llevar en cuenta la parte curvilinea de cada trapecio suponiendo que la curva correspondiente tal como $E\,a$ se confunde sensiblemente con un arco de parábola que tenga su vértice en el punto E. Entónces el trapecio $1\,2\,a\,E$ puede descomponerse en el rectángulo $1\,2\,o\,E$ y la superficie parabólica $E\,o\,a$, cuya expresion será igual á $\frac{2}{3}\,E\,o \times o\,a = \frac{2}{3}\,h\,(y_2 - y_1)$. Haciendo la misma hipótesis para cada trapecio, las expresiones de sus superficies son:

$s_1 = \frac{h}{3}(2y_2 - 2y_1) + \frac{3}{3}h\,y_1$

$$
\begin{aligned}
s_1 &= \tfrac{1}{3}\,h\,(y_1 + 2\,y_2)\\
s_2 &= \tfrac{1}{3}\,h\,(y_2 + 2\,y_3)\\
s_3 &= \tfrac{1}{3}\,h\,(y_3 + 2\,y_4)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
s_{n-1} &= \tfrac{1}{3}\,h\,(y_{n-1} + 2\,y_n)
\end{aligned}
$$

cuya suma produce:

$$s = \tfrac{1}{3}\,h\,\big(y_1 + 2\,y_n + 3\,(y_2 + y_3 + \cdots\cdots y_{n-1})\big) \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2)$$

De aquí resulta que *la superficie es igual á la tercera parte de la equidistancia multiplicada por la primera ordenada, mas el doble de la última, mas la triple suma de todas las intermedias.*

Hay otra fórmula conocida con el nombre de su autor Simpson, que se considera como la mas exacta para calcular las superficies terminadas por lineas curvas; pero que exige que sea impar el número n de ordenadas y por consiguiente par el de trapecios. Para desarrollarla supongamos que un trapecio mixtilineo se descompone, como indica la figura 147ª, en otro rectilineo $A\,B\,C\,D$ y en un segmento parabólico $C\,D\,F$. Trazando la ordenada intermedia $H\,L$ y admitiendo que el vértice de la parábola está en el extremo F de la perpendicular elevada en el punto G á la cuerda $C\,D$, llamemos a el ángulo $C\,D\,E = F\,G\,H$. Entónces la superficie parabólica $C\,D\,F$ será igual á $\frac{2}{3}\;C\,D \times F\,G$; pero como $F\,G = H\,G$ cos. a y tambien $C\,D = \frac{D\,E}{\text{cos.}\,a}$, resulta $C\,D\,F = \frac{2}{3}\;D\,E \times G\,H$. Si designamos ahora por y', y'', y''' respectivamente las tres ordenadas $A\,D$, $L\,H$ y $B\,C$, se tendrá que $G\,H$ es igual á……………………………… $L\,H - L\,G = y'' - \frac{1}{2}\,(y' + y''')$, y siendo h la equidistancia $A\,L = L\,B$, la superficie del trapecio será:

$$
\begin{aligned}
A\,B\,C\,H\,D &= h\,(y' + y''') + \tfrac{4}{3}\,h\,\big(y'' - \tfrac{1}{2}\,(y' + y''')\big) = \tfrac{3h}{3}(y' + y''') + \tfrac{4}{3}h\big(y'' - \tfrac{1}{2}(y' + y''')\big) =\\
&= \tfrac{1}{3}\,h\,(y' + y''' + 4\,y'') \qquad \tfrac{1}{3}h\,(3y' + 3y''' + 4y'' - 2y' - 2y''')
\end{aligned}
$$

De la misma manera se expresan las areas de los trapecios de dos en dos, por lo que volviendo á nuestras anteriores anotaciones y á la figura 146ª tendrémos:

$$1\,3\,b\,E = \tfrac{1}{3}h\,(y_1 + y_3 + 4y_2)$$
$$3\,5\,d\,b = \tfrac{1}{3}h\,(y_3 + y_5 + 4y_4)$$
$$5\,7\,F\,d = \tfrac{1}{3}h\,(y_5 + y_7 + 4y_6)$$

cuya suma será:

$$s = \tfrac{1}{3}h\,\big(y_1 + y_7 + 2\,(y_3 + y_5) + 4\,(y_2 + y_4 + y_6)\big)$$

Generalizando esta expresion para un número impar cualquiera n de ordenadas, resulta la fórmula:

$$s = \tfrac{1}{3}h\,\big(y_1 + y_n + 2\,(y_3 + y_5 + \dots y_{n-2}) + 4\,(y_2 + y_4 + \dots y_{n-1})\big) \dots\dots (3)$$

que equivale á esta regla: *la superficie formada por un número par de trapecios mixtilíneos es igual á la tercera parte de la equidistancia multiplicada por la suma de las ordenadas extremas, mas la doble suma de las intermedias de órden impar, mas la cuádruple suma de las intermedias de órden par.*

Para aplicar las reglas precedentes supongamos que con una equidistancia de 6^m se hayan trazado y medido sobre un plano las nueve ordenadas que siguen:

$y_1 = 95^m$	$y_4 = 135^m$	$y_7 = 140^m$
$y_2 = 107$	$y_5 = 151$	$y_8 = 134$
$y_3 = 112$	$y_6 = 147$	$y_9 = 125$

Haciendo las sustituciones, la fórmula (1) dará:

$s = 3\,(95 + 125 + 1852) = 6216$ metros cuadrados.

El resultado de la (2) será:

$s = 2\,(95 + 250 + 2778) = 6246$ metros cuadrados.

En cuanto á la fórmula de Simpson, produce:

$s = 2\,(95 + 125 + 806 + 2092) = 6236$ metros cuadrados.

Se comprende que cualquiera de las tres fórmulas dá un resultado tanto mas cercano á la verdad cuanto menor es la equidistancia. Si sucediese que la recta auxiliar se trazase entre dos puntos de la curva, caso que es muy frecuente, se harian nulas la primera y la última ordenadas al aplicar las fórmulas, y lo mismo debe decirse si las dos lineas se cortan en cualquiera de los puntos de division intermedios, esto es, se haria nula la ordenada correspondiente. Es evidente que por las mismas seglas se puede tambien calcular la superficie comprendida entre dos curvas como lo indica la fig. 148ª: las cantidades que he designado por y serian en este caso las lineas paralelas $a\,a'$, $b\,b'$, $c\,c'$, &c., trazadas á iguales distancias entre las dos curvas.

191ª Se ha dicho que al aplicar cualquiera de los métodos gráficos para determinar una superficie, es preciso despues de medir las lineas del plano, deducir el valor que tienen en el terreno con arreglo á la escala, de suerte que si se ha medido la distancia l, la longitud real será $L = l\,r$. Sin embargo, no es indispensable hacer la reduccion de cada linea, sino que es mucho mas breve calcular la superficie efectiva del plano y reducirla despues al valor que realmente representa. Sean, en efecto, m y n dos lineas del plano cuyo producto determina una superficie: esta en el plano será, pues:...... $s = m\,n$; pero como las longitudes de las lineas en el terreno son respectivamente $M = m\,r$ y $N = n\,r$, la superficie verdadera es.... $S = M\,N$, é introduciendo los valores de M y N resulta:

$$S = s\,r^2$$

lo que indica que la superficie real es igual á la que dá el plano multiplicada por el cuadrado del denominador de la relacion ó escala $\frac{1}{r}$ con que se haya ejecutado la construccion. En la escala de $\frac{1}{5000}$, por ejemplo, supongamos que se hayan medido las distancias $0^{m}0835$ y $0^{m}0241$ que representan la base y la mitad de la altura de un triángulo del plano. Su superficie es $s = 0.00201235$, por lo que la area real será $S = 0.00201235 \times 25000000 = 5^{H}030875$. Igual resultado se hallaria ciertamente reduciendo al terreno cada una de las distancias que serian $417^{m}5$ y $120^{m}5$; pero es claro que la fórmula anterior se presta á un cálculo mas corto, sobre todo si s represen-

Sean m n los dos factores que nos van á servir para encontrar una superficie S que tendrá por valor $S = mn$ pero si suponemos que en vez de m hemos medido $m+x$ y en lugar de n $n+y$, siendo x é y fracciones muy pequeñas de m y n, entonces la superficie errónea será $s' = (m+x)(n+y) = mn + nx + my + xy$; pero como xy es extremadamente pequeño $s' = mn + nx + my$ ó $s' - s = my + nx$ ó $S' - S = (my + nx) r^2$

ta ya la superficie del plano obtenida por la adicion de todos los triángulos, trapecios, &c., que la forman.

192º Investiguemos por último el grado de precision con que es posible obtener una superficie por los métodos gráficos, esto es, midiendo sobre un plano construido en la escala $\frac{1}{r}$, los dos factores m y n. La expresion de la superficie es, segun vimos:

$$S = m\,n\,r^2$$

Diferenciando esta expresion respecto de m y n que son las variables, se obtiene:

$$\mathrm{d}\,S = r^2\,(m\,\mathrm{d}\,n + n\,\mathrm{d}\,m)$$

Las diferenciales $\mathrm{d}\,m$ y $\mathrm{d}\,n$ supongo que son los errores que pueden cometerse al tomar con el doble-decímetro los valores de m y n. Se ve desde luego que $d\,S$ no puede ser nulo mas que en el caso de que $\frac{\mathrm{d}\,m}{m} = -\frac{\mathrm{d}\,n}{n}$, quiere decir, cuando siendo los errores de signos contrarios, sus valores numéricos sean proporcionales á los de las lineas. Este caso es remotísimo, pues aunque en realidad los errores pueden tener distintos signos, sus valores tienden mas bien á ser constantes por depender del grado de aproximacion con que es posible medir las lineas, y cuyo límite hemos fijado varias veces en 0^m0001 por lo ménos. Admitiendo todavía ese límite de precision, ó señalando ese valor á los errores, la fórmula precedente será:

$$\mathrm{d}\,S = \frac{r^2}{10000}\,(m+n)$$

Esta expresion ó la anterior manifiestan tambien que es muy importante que r sea pequeño, ó lo que es lo mismo, que la escala del plano sea la mayor posible. En una buena operacion topográfica se puede tener alguna seguridad de medir las lineas del terreno con la aproximacion de 1^m; pero para alcanzar la misma precision en el plano aun suponiendo su construccion perfecta, es indispensable que r no exceda de 10000, puesto que se ha señalado 0^m0001 por límite de apreciacion de las lineas, y de esta consideracion parece deducirse que para obtener una superficie por los métodos gráficos con una aproximacion comparable á la de los analíticos, en los cua-

x Esto solo sucede en una operacion repetida en todas sus partes por el mismo individuo y con los propios instrumentos — Pero esencialmente en la medida de una base por dos individuos distintos es de lo que provienen las dif.^s en el resultado gral.

les solo se hace uso de los datos obtenidos en el terreno, es preciso que el plano se haya construido en una escala mayor que $\frac{1}{10000}$ y con la mas escrupulosa exactitud.

Si en la última ecuacion se elimina á r^2 en funcion de S, obtendrémos:

$$\frac{\mathrm{d}\, S}{S} = \frac{1}{10000}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)$$

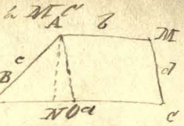
fórmula que manifiesta que en igualdad de circunstancias conviene que las lineas medidas sean grandes, lo que equivale á establecer la regla de que las figuras elementales en que se descomponen los polígonos deben ser de las mayores dimensiones que se pueda. Admitiendo que las lineas m y n tengan cada una un valor medio de $0^{\text{m}}1$, hallarémos por la ecuacion anterior:

$$\frac{\mathrm{d}\, S}{S} = \frac{2}{1000} = \frac{1}{500}$$

ó que el error de la superficie seria $\frac{1}{500}$ de su valor.

Considerando que en esta breve investigacion he prescindido de los errores inevitables en la construccion del plano, los cuales son del mismo órden que los de la apreciacion de las lineas sobre el papel, no podrá ménos de convenirse en que sea cual fuere el esmero con que se practiquen todas las operaciones gráficas, parece imposible obtener por esos métodos una superficie con un error inferior á $\frac{1}{300}$ si no es en circunstancias verdaderamente excepcionales.

(**) Bajando la perpendicular AN sobre la base y la AO paralela á MC tenemos $s = \frac{a+b}{2} \times AN = \frac{a+b}{2} \times c \operatorname{sen} B$ pero la superficie del triang. $ANB = \sqrt{p'(p'-a+b)(p'-c)(p'-d)} = \frac{1}{2}(a-b)\, c \operatorname{sen} B$ siendo su perímetro $= a-b+c+d = 2p'$



de donde $c \operatorname{sen} B = \frac{2}{(a-b)} \sqrt{p'(p'-a+b)(p'-c)(p'-d)}$

y $s = \frac{a+b}{a-b} \sqrt{p'(p'-a+b)(p'-c)(p'-d)}$ i pero siendo p el semiperímetro del trapecio $p = \frac{a+b+c+d}{2} = p'+b$ $\left\{ \begin{array}{l} p' = p-b \\ p'-a+b = p-a \end{array} \right.$ $\left. \begin{array}{l} p'-c = p-b-c \\ p'-d = p-b-d \end{array} \right\}$ luego

$$s = \frac{a+b}{a-b} \sqrt{(p-a)(p-b)(p-b-c)(p-b-d)}$$

(xx) Se $\left\{ \begin{array}{l} \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ s = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A \end{array} \right.$ $\quad c^2 - 2bc \cos A = a^2 - b^2$, $\quad c^2 = \frac{4s^2}{b^2 \operatorname{sen}^2 A}$, $\quad c = \frac{2s}{b \operatorname{sen} A}$

$\frac{4s^2}{b^2 \operatorname{sen}^2 A} - \frac{4s \cos A}{\operatorname{sen} A} = a^2 - b^2$; $\quad s^2 - s b^2 \operatorname{sen} A \cos A = \frac{a^2 b^2}{4} \operatorname{sen}^2 A - \frac{b^4}{4} \operatorname{sen}^2 A$

$s^2 - s b^2 \operatorname{sen} A \cos A + \frac{1}{4} b^4 \operatorname{sen}^2 A \cos^2 A = \frac{a^2 b^2}{4} \operatorname{sen}^2 A - \frac{b^4}{4} \operatorname{sen}^2 A + \frac{b^4}{4} \operatorname{sen}^2 A (1 - \operatorname{sen}^2 A) - \cancel{\frac{b^4}{4} \operatorname{sen}^2 A}$

$s = \frac{b^2}{2} \operatorname{sen} A \cos A \pm \frac{b}{2} \operatorname{sen} A \sqrt{a^2 - b^2 \operatorname{sen}^2 A}$

CAPITULO III.

PROCEDIMIENTOS ANALITICOS PARA DETERMINAR LA SUPERFICIE.

193º Lo que caracteriza estos métodos es la circunstancia de que al aplicarlos solo se hace uso de los datos obtenidos por la observacion directa ó bien los que se derivan de ellos inmediatamente por medio del cálculo. Comenzarémos, pues, por hacer una recapitulacion de las fórmulas que suministran la superficie de las principales figuras elementales en que muchas veces se resuelven los polígonos.

La area de un triángulo en funcion de los diversos elementos que pueden determinarla será:

I. Si se conocen su base b y su altura y, se tiene $s = \frac{1}{2}\, b\, y$. . . (1)

II. En funcion de dos lados a, b y del ángulo comprendido C, $s = \frac{1}{2}\, ab$ sen. C. . . . . (2)

III. Conociendo un lado a y los dos ángulos B y C adyacentes, $s = \frac{1}{2}\, a^2 \frac{\text{sen. } B \text{ sen. } C}{\text{sen. } (B + C)}$ * . . . . (3)

IV. Cuando se tienen los tres lados a, b y c, llamando p la mitad de su perímetro, esto es: $p = \frac{1}{2}\,(a + b + c)$, su area es

$$s = \sqrt{p\,(p - a)\,(p - b)\,(p - c)} \quad . \text{(xx)} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

V. Por último, si se conocen dos lados a, b y el ángulo A opuesto á uno de ellos, la superficie tiene por expresion:

$$s = \tfrac{1}{2}\, b^2 \text{ sen. } A \text{ cos. } A \pm \tfrac{1}{2}\, b \text{ sen. } A \sqrt{a^2 - b^2 \text{ sen.}^2 A} \quad . \text{(xx)} \; . \; . \; . \quad (5)$$

El signo ambiguo de esta fórmula corresponde á las dos resoluciones de que en general es susceptible este caso.

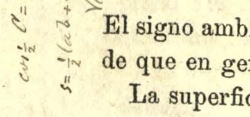
La superficie de un trapecio cuyas dos bases paralelas son a, b y cuya altura es y, tiene la forma $s = \frac{1}{2}\,(a + b)\, y$. . . . . (6)

$\operatorname{sen} \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{1-\cos C}{2}} = \sqrt{\frac{2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2}{4(ab+cd)}} = \sqrt{\frac{(b+c+d-a)(a-b+c+d)}{4(ab+cd)}}$

$\cos \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{1+\cos C}{2}} = \sqrt{\frac{2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2}{4(ab+cd)}} = \sqrt{\frac{(a+b-c+d)(a+b+c-d)}{4(ab+cd)}}$

$s = \frac{1}{2}(ab+cd) \cdot 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C = \frac{\sqrt{(b+c+d-a)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}{4} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ llamando p el semiperímetro $p = \frac{a+b+c+d}{2}$

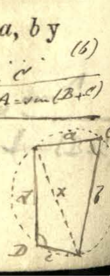
#



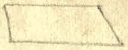
$s = \frac{1}{2} a h$ $\quad h = BA \operatorname{sen} B$ $\quad BA = a \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A = \operatorname{sen}(B+C)}$

$s = \frac{1}{2} a^2 \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen}(B+C)}$

(**) $\operatorname{sen} C = \operatorname{sen} D$, $\cos C = -\cos D$; la sup. $s = \frac{1}{2}(ab+cd) \operatorname{sen} C$; ahora tenemos que $\operatorname{sen} C = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C$; pero ~~sen C = √…~~ $\cos C = \cos^2 \frac{1}{2} C - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} C$ de donde $\operatorname{sen} \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{1-\cos C}{2}}$ $\cos \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{1+\cos C}{2}}$ pero al cuadrado de la diagonal x es por uno y otro triángulo $\left. \begin{array}{l} x^2 = a^2+b^2-2ab\cos C \\ x^2 = c^2+d^2+2cd\cos C \end{array} \right\}$ luego $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$ y #



pag 376 Super/. trap. rect°



Si ademas de las bases se conocen los otros dos lados c y d del trapecio, su area es

$$s = \frac{a+b}{a-b}\sqrt{(p-a)(p-b)(p-b-c)(p-b-d)} \quad \ldots \quad (7) \; (**)$$

fórmula en la cual el semiperímetro es $p = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$.

Conociendo en un cuadrilátero cualquiera los cuatro lados a, b, c y d, asi como el ángulo M que forman entre sí los dos primeros, y el ángulo N que forman los dos últimos, la expresion de la superficie será: $s = \frac{1}{2}\, a\, b$ sen. $M + \frac{1}{2}\, c\, d$ sen. N. * . . . . (8)

Si solo se conocen los tres lados contiguos a, b y c, el ángulo M que forman los dos primeros y el ángudo N que forman los dos últimos, la superficie del cuadrilátero puede calcularse por la ecuacion $s = \frac{1}{2}\, a\, b$ sen. $M + \frac{1}{2}\, b\, c$ sen. $N - \frac{1}{2}\, a\, c$ sen. $(M+N)$. ** . . . . (9)

Todo cuadrilátero inscriptible en un círculo, ó lo que es lo mismo, cuyos ángulos opuestos sean suplementarios, tiene por superficie

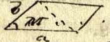
$$s = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \quad (**) \ldots \quad (10)$$

siendo a, b, c y d sus cuatro lados y p su semiperímetro.

Si se conocen las dos diagonales m y n de un cuadrilátero, así como el ángulo A que forman entre sí, su area es $s = \frac{1}{2}\, m\, n$ sen. A. (*) . . (11)

En un paralelógramo cuya base y cuya altura sean b é y respectivamente, se tiene: $s = b\, y$. . . . . (12)

Falta sup. rombo

Siendo a y b dos lados contiguos que forman entre sí el ángulo M, la superficie es: $s = a\, b$ sen. M. . . .  . . . . . . (13)

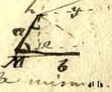
La superficie de cualquiera polígono regular de n lados, la longitud de uno de los cuales es l, se obtiene por la fórmula:.............

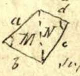
(14) $s = \frac{1}{4}\, n\, l^2 \cot.\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$. Haciendo $F = \frac{1}{4}\, n \cot.\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$, tendrémos $s = F\, l^2$. Aunque es raro tener que medir figuras regulares, pues solo suelen hallarse en paseos, jardines, plazas, &c., calcularémos los logaritmos del factor F, que con el cuadrado del lado, sirve para determinar la superficie.

cada triángulo $s = \frac{1}{2}\, l\, y$ pero $y = \frac{1}{2}\, l \tan A = \frac{1}{2}\, l \cot$ para el polígono de n lados $\frac{1}{2}\, O = \frac{180}{n}$ $s = \frac{1}{4}\, l^2\, n \cot\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$

POLÍGONOS.	LOG. F	POLÍGONOS.	LOG. F
Triángulo equilátero.........	9.6365007	Octágono regular.............	0.6838057
Cuadrado.........................	0.0000000	Eneágono ,, ...	0.7911166
Pentágono regular...........	0.2356490	Decágono ,, ...	0.8861640
Exágono ,, ...	0.4146519	Endecágono ,, ...	0.9715382
Heptágono ,, ...	0.5603740	Dodecágono ,, ...	1.0490688

**



* 

Sup. $1^a = \frac{1}{2}\, a b$ sen M
Sup. $2^a = \frac{1}{2}\, c d$ sen N
Sup. total $= s = \frac{1}{2}\, a b$ sen $M + \frac{1}{2}\, c d$ sen N

(*) Llamando $s_1\, s_2\, s_3\, s_4$ las fracciones ó triángulos en que las diagonales dividen al cuadrilátero, y cuyas diagonales son $m = x + x'$ $n = y + y'$

$s_1 = \frac{1}{2} x y$ sen A; $s_2 = \frac{1}{2} x y'$ sen A; $s_3 = \frac{1}{2} x' y'$ sen A; $s_4 = \frac{1}{2} x' y$ sen A

$s = \frac{1}{2}\left(x(y+y') + x'(y+y')\right)$ sen $A = \frac{1}{2}(x+x')(y+y')$ sen $A = \frac{1}{2}\, m\, n$ sen A

$s = hMN + hNq = \frac{1}{2}\, a b$ sen $M + hNq$
si desde M y h, bajamos sobre DN las perpendiculares Mk y hp y además desde h tiramos una paralela á la misma hasta encontrar en o á la Mk, tendremos:
sup. $hNq = hND - hqD = \frac{1}{2}\, ND \times y - \frac{1}{2}\, qD \times y = \frac{1}{2}\, y\,(ND - qD) = \frac{1}{2}\, y\, c$ (llamando y la alt. hp)
como $y = Mk - Mo = b$ sen $N - a$ sen (ó $hM = 180^\circ - (M+N)$)
$y = b$ sen $N - a$ sen $(M+N)$, de consiguiente
$s = \frac{1}{2}\, a b$ sen $M + \frac{1}{2}\, b c$ sen $N - \frac{1}{2}\, a c$ sen $(M+N)$

El círculo cuyo radio es r tiene por superficie $s = \pi r^2$. . . . (15)
Log. $\pi = 0.4971499$.

La superficie de un sector de círculo que abrace g grados es......
(16). . . . . $s = \frac{g \pi r^2}{360}$. La cantidad $\frac{\pi}{360}$ representa el arco de medio grado y
$\pi r^2 : s :: 360 : g$ tiene 7. 9408474 por logaritmo. Un segmento circular de g grados
(17). . . . . de amplitud abraza la superficie $s = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi g}{180} - \text{sen. } g\right)$. El logaritmo
de $\frac{\pi}{180}$, que expresa el arco de 1°, es 8.2418774.

Una elipse que tengn a y b por semi-ejes, comprende la superfi-
(18). . . . . cie $s = \pi a b$.

194º Veamos ahora el modo de utilizar las expresiones de las superficies elementales para calcular la de un polígono irregular cualquiera, tal como el que representa la fig. 149ª, cuyos lados y cuyos ángulos interiores se suponen conocidos. El primer camino que se presenta naturalmante es el de dividirlo en triángulos por medio de diagonales $P\,Y$, $P\,R$, $P\,M$, trazadas desde un vértice P. En el primero de esos triángulos se conocen los dos lados PA y $A\,Y$, así como el ángulo A que forman; podrá, pues, determinarse su superficie, el tercer lado PY, y los otros dos ángulos $A\,PY$ y $A\,YP$. Este último, restado del ángulo $A\,YR$ del polígono, dará el ángulo $PY\,R$ del segundo triángulo, en el cual conociéndose tambien el lado PY por el cálculo anterior, y $R\,Y$ por pertenecer al polígono, podrá determinarse igualmente la superficie, el otro lado PR y el ángulo PRY. En el triángulo siguiente PRM se conocerán los dos lados PR, RM y el ángulo que forman, por lo cual se procede del mismo modo que ántes.

Por las explicaciones anteriores se ve que en cada triángulo componente hay que aplicar una misma resolucion que puede formularse de esta manera. Designando por a, b, c, d, &c., los lados del polígono, por v, v', v'', &c., los ángulos que deben calcularse como lo indica la figura, y por $\triangle$, $\triangle'$, $\triangle''$, &c., las diagonales $P\,Y$, PR, PM, &c., tendrémos en el primer triángulo $PA\,Y$:

$$s = \tfrac{1}{2}\, b\, c \text{ sen. } A \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Para determinar el ángulo v opuesto al lado b, podria hacerse uso de las fórmulas usuales para este caso; pero me parece preferible proceder así: el triángulo dá las ecuaciones:

$$c \text{ sen. } v = b \text{ sen. } (A + v) \qquad \Delta \text{ sen. } v = b \text{ sen. } A$$

Desarrollando la primera, y dividiéndola por cos. v, se halla:

$c \frac{\text{sen } v}{\cos v} = b \text{ sen } A + b \cos A \frac{\text{sen } v}{\cos v}$, luego

$$\tan. v = \frac{b \text{ sen. } A}{c - b \cos. A} \qquad (2)$$

y entónces se obtiene por la segunda:

$$\Delta = \frac{b \text{ sen. } A}{\text{sen. } v} \qquad (3)$$

La fórmula (1) dá la superficie, y las (2) y (3) los elementos necesarios para que en el triángulo siguieute, conocidos dos lados y el ángulo comprendido, pueda aplicarse la misma resolucion, á saber:

$$s' = \tfrac{1}{2} \Delta\, d \text{ sen. } (Y - v)$$

$$\tan. v' = \frac{\Delta \text{ sen. } (Y - v)}{d - \Delta \cos. (Y - v)}$$

$$\Delta' = \frac{\Delta \text{ sen. } (Y - v)}{\text{sen. } v'}$$

Como en las tres fórmulas entra la cantidad b sen. A, ó sus semejantes en cada triángulo, la resolucion es bastante sencilla. Apliquémosla detalladamente á la figura 149ª cuyos elementos numéricos van á continuacion, y que proporcionan alguna variedad de casos en cuanto al juego de los signos.

$a = 11457^m0$	$P = 128^\circ\ 00'\ 22''$
$b = 15326.\ 6$	$A = 126\ \ 45\ \ 37$
$c = \ \ 5317.\ 7$	$Y = \ \ 56\ \ 38\ \ \ 9$
$d = \ \ 9682.\ 2$	$R = 231\ \ 49\ \ \ 8$
$e = \ \ 7665.\ 5$	$M = 114\ \ 26\ \ 58$
$f = 11715.\ 3$	$J = \ \ 62\ \ 19\ \ 46$

PRIMER TRIÁNGULO.

0.5	9.6989700	b	4.1854458		4.1854458		
b	4.1854458	sen. A	9.9037119	cos. A	9.7770411—	$c =$	5317^m7
c	3.7257238	b sen. A	4.0891577		3.9624869—	+	9172. 5
sen. A	9.9037119		4.1610744				14490. 2
s	7.5138515	tan. v	9.9280833	$v =$	$40^\circ\ 16'\ 39''$		
				$Y =$	56 38 9		
				$Y - v =$	$16^\circ\ 21'\ 30''$		

SEGUNDO TRIÁNGULO.

b sen. A	4.0891577						
sen. v	9.8105620						
Δ	4.2785957		4.2785957		4.2785957		
0.5	9.6989700	sen. $(Y-v)$	9.4497001	cos. $(Y-v)$	9.9820536	$d =$	$9682^{m}2$
d	3.9859740	Δ sen. $(Y-v)$	3.7282958		4.2606493		— 18224. 2
sen. $(Y-v)$	9.4497001		3.9315596				— 8542. 0
s'	7.4132398	tan. v'	9.7967362	$v' =$	147° 56′ 38″		
				$R =$	231 49 8		
				$R - v' =$	83° 52′ 30″		

TERCER TRIÁNGULO.

Δ sen. $(Y-v)$	3.7282958						
sen. v'	9.7248896						
Δ'	4.0034062		4.0034062		4.0034062		
0.5	9.6989700	sen. $(R-v')$	9.9975137	cos. $(R-v)$	9.0281560	$e =$	$7665^{m}5$
e	3.8845405	Δ' sen. $(R-v')$	4.0009199		3.0315622		— 1075. 4
sen. $(R-v')$	9.9975137		3.8188920				6590. 1
s''	7.5844304	tan. v''	0.1820279	$v'' =$	56° 40′ 14″		
				$M =$	114 26 58		
				$M - v'' =$	57° 46′ 44″		

CUARTO TRIÁNGULO.

Δ' sen. $(R-v')$	4.0009199						
sen. v''	9.9219595						
Δ''	4.0789604		4.0789604		4.0789604		
0.5	9.6989700	sen. $(M-v'')$	9.9273687	cos. $(M-v'')$	9.7268804	$f =$	$11715^{m}3$
f	4.0687534	Δ' sen. $(M-v'')$	4.0063291		3.8058408		— 6395. 0
sen. $(M-v'')$	9.9273687		3.7259361				5320. 3
s'''	7.7740525	tan. v'''	0.2803930	$v''' =$	62° 19′ 50″		

En el último triángulo se ha llevado la resoluccion hasta el ángulo v''' con el objeto de comprobar los cálculos, pues siendo este uno de los ángulos del polígono, debe ser igual al que resulta del cálculo. El ángulo de que se trata es en este caso el designado por J, y se ve que, en efecto, se obtiene sensiblemente el mismo valor por la resolucion, lo que indica que no hubo error alguno de importancia. Podrian tambien comprobarse las operaciones calculando el último lado JP del polígono para comparar el resultado con el valor que ya se tiene conocido, y que es el que se ha llamado a en el caso actual. Otra comprobacion sencilla consiste en deducir todos los ángulos que tienen su vértice en P, y cuyo conjunto debe reproducir el ángulo P del polígono. Es siempre muy conveniente hacer pruebas de este género para cerciorarse de la exactitud de las operaciones numéricas.

Las superficies de los cuatro triángulos, expresadas en miriaras, son:

$$
\begin{aligned}
s &= 32^{M}647617 \\
s' &= 25.\ 896423 \\
s'' &= 38.\ 408770 \\
s''' &= 59.\ 436397 \\
\hline
\text{Superficie total} &= 156^{M}389207
\end{aligned}
$$

195º La division del polígono en triángulos es el método que generalmente se sigue para calcular la superficie de una figura irregular; pero tambien podria dividirse en cuadriláteros procediendo como voy á indicar. En la fig. 149ª suponiendo trazada la diagonal PR, se tiene el cuadrilátero $PAYR$ en el cual se conocen los tres lados b, c y d que pertenecen al polígono, y sus ángulos en A y en Y; se podrá, pues, calcular su superficie por una de las fórmulas que constan al principio de este Capítulo. Obtuve esa fórmula por las consideraciones siguientes: vimos que el ángulo v se calcula por la ecuacion $\tan. v = \frac{b \text{ sen. } A}{c - b \cos. A}$, y como el mismo triángulo dá $\text{sen. } v = \frac{b \text{ sen. } A}{\Delta}$ resulta por la combinacion de este valor con el precedente:.......... $\cos. v = \frac{\text{sen } v}{\tan v}$
$\cos. v = \frac{c - b \cos. A}{\Delta}$. Por otra parte, suponiendo conocido el ángulo $Y - v$, la superficie del cuadrilátero seria:

$$s = \tfrac{1}{2}\, b\, c \text{ sen. } A + \tfrac{1}{2}\, d\, \Delta \text{ sen. } (Y - v)$$

Para determinar la cantidad Δ sen. $(Y - v)$ tenemos desarrollando:

$$\Delta \text{ sen. } (Y - v) = \Delta\, (\text{sen. } Y \cos. v - \cos. Y \text{ sen. } v)$$

y sustituyendo los valores de sen. v y cos. v hallados ántes, resulta:
$\Delta \text{ sen } (Y - v) = c \text{ sen } Y - b \text{ sen } Y \cos A - b \text{ sen } A \cos Y$

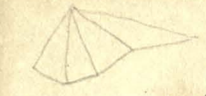
$$\Delta \text{ sen. } (Y - v) = c \text{ sen. } Y - b \text{ sen. } (A + Y)$$

y por consiguiente la expresion de la superficie del cuadrilátero vendrá á ser:

$$s = \tfrac{1}{2}\, b\, c \text{ sen. } A + \tfrac{1}{2}\, c\, d \text{ sen. } Y - \tfrac{1}{2}\, b\, d \text{ sen. } (A + Y) \ldots\ldots\ldots (4)$$

que es la fórmula á que me he referido. Al aplicarla es necesario

Puede tomar la sup. del polig. en funcion de los lados y los interiores, así como por procedimiento del planimetro —



atender al valor de $A + Y$; pues cuando este ángulo es mayor que 180°, varia de signo el último término.

Una vez calculada la superficie del primer cuadrilátero con los elementos conocidos del polígono, es preciso determinar el lado ...... $PR = \triangle'$ y el ángulo $PRY = v'$ á fin de que en el segundo cuadrilátero $PRMJ$ se conozcan tambien los tres lados PR, RM, MJ, y los dos ángulos R y M que demanda la fórmula (4) para aplicar la misma resolucion. Con este fin, la ecuacion (2) dá:

$$\tan. v = \frac{b \text{ sen. } A}{c - b \cos. A} \text{..........} \quad (5)$$

y por la misma razon obtendriamos:

$$\tan. v' = \frac{\Delta \text{ sen. } (Y - v)}{d - \Delta \cos. (Y - v)}$$

pero como no se conoce $\triangle = PY$, resulta sustituyendo en la última ecuacion el valor (3):

$$\tan. v' = \frac{b \text{ sen. } A \text{ sen. } (Y - v)}{d \text{ sen. } v - b \text{ sen. } A \cos. (Y - v)} \text{..........} \quad (6)$$

Para calcular $\triangle'$ el triángulo PYR suministra:

$$\triangle' = \frac{d \text{ sen. } (Y - v)}{\text{sen. } (Y - v + v')} \text{..........} \quad (7)$$

Las fórmulas (4), (5), (6) y (7), son las que se deben aplicar á cada cuadrilátero; pero si se calcula la (5) en primer lugar, puede darse á la (4) otra forma un poco mas sencilla. En efecto, si en la expresion que nos sirvió de punto de partida, á saber:

$$s = \tfrac{1}{2} b c \text{ sen. } A + \tfrac{1}{2} d \Delta \text{ sen. } (Y - v)$$

se introduce el valor de la ecuacion (3), obtendrémos

$$s = \tfrac{1}{2} b c \text{ sen. } A + \tfrac{1}{2} b d \text{ sen. } A \frac{\text{sen. } (Y - v)}{\text{sen. } v} \text{..........} \quad (4')$$

que es la que puede remplazar á la (4).

En el caso que representa la figura 149ª basta únicamente aplicar la fórmula (4); pues por tener solo seis lados el polígono, los dos cuadriláteros en que está dividido quedan completamente determinados con los elementos del mismo polígono; pero el método que he trazado es general para cualquiera otra figura de mayor número de lados. A la verdad las fórmulas son mas que las que establecí para el caso en que el polígono se divide en triángulos; pero puede haber compensacion de trabajo, y acaso alguna ventaja, por el hecho de que una figura de n lados tiene que dividirse en $n - 2$ triángulos; miéntras que solo admite $\frac{1}{2}(n - 2)$ cuadriláteros.

La aplicacion de la fórmula (4) á los datos de la figura 149ª produce:

$$\begin{aligned} PAYR &= 58^{\text{M}}_{.}543752 \\ PRMJ &= 97\ .843695 \\ \hline \text{Superficie total} &= 156^{\text{M}}_{.}387447 \end{aligned}$$

El último cuadrilátero se calculó por medio de los elementos del polígono, quiere decir, por medio de los lados a, f, e y de los ángulos J y M, y por consiguiente no fué preciso emplear las otras fórmulas; pero para comprobar las operaciones siempre es conveniente, en casos como este, calcular los dos ángulos parciales en R por la ecuacion (6), ó bien la diagonal PR por la (7); porque aquellos deben dar por suma el ángulo R del polígono, y los dos valores de la diagonal, que es lado comun á dos cuadriláteros, deben resultar iguales.

196º Voy á proponer un nuevo método para calcular las superficies que en mi concepto ofrece algunas ventajas respecto de los anteriores. Si en un polígono se suponen trazadas lineas desde todos sus vértices en una direccion cualquiera, con tal de que sea constante, quedará dividida la superficie en trapecios fácilmente calculables. La direccion de las rectas puede ser ó la de una diagonal del polígono ó la de uno de sus lados: en el primer caso, ademas de los trapecios, pueden resultar uno ó dos triángulos, y en el segundo un triángulo. La figura 150ª presenta esta última disposicion, habiéndose escogido la direccion del lado AY para trazarle paralelas por los vértices R, P y M; pero podria haberse elegido la direccion de la diagonal PY por ejemplo, y entónces habrian resultado dos trapecios y dos triángulos. De una ú otra manera el primer triángulo ó el primer trapecio quedan enteramente determinados con los elementos que suministra el polígono. Desarrollemos el cálculo aplicado á la figura 150ª, que es igual á la 149ª, y cuyos elementos designarémos con las mismas letras de que ántes hicimos uso.

En el primer trapecio $RYAr$ se conocen los lados $RY = d$, $YA = c$ y los ángulos en A y en Y, por lo cual comenzaré por hallar la expresion de su superficie en funcion de esos elementos. Si se conociera el lado $Ar = x$, la fórmula (4) daria:

$$s = \tfrac{1}{2}\, c\, d \text{ sen. } Y + \tfrac{1}{2}\, x \left(c \text{ sen. } A - d \text{ sen. } (A + Y)\right)$$

Para eliminar á x consideremos que si desde los puntos A é Y se supone trazada la altura del trapecio, su valor podrá expresarse en funcion de x y de d, puesto que los ángulos ArR y rRY son respectivamente suplementarios de A y de Y. Los dos valores de la altura son x sen. A y d sen. Y, que igualados, producen:

$$x = \frac{d \text{ sen. } Y}{\text{sen. } A}$$

Sustituyendo este valor en la ecuacion precedente, se obtiene:

Trapecio en funcion de tres lados y los 2 comprendidos

$$s = c\, d \text{ sen. } Y - \tfrac{1}{2}\, \frac{d^2 \text{ sen. } Y \text{ sen. } (A + Y)}{\text{sen. } A}$$

Esta fórmula suministra la superficie del trapecio en funcion de los elementos conocidos; pero es todavía susceptible de una forma mas sencilla. Si designamos por m la distancia Rr que es la segunda base paralela del trapecio, se tiene:

$$2\, s = (c + m)\, d \text{ sen. } Y$$

y eliminando á s entre esta ecuacion y la anterior resulta:

$$2cd \text{ sen } Y - \frac{d^2 \text{ sen } Y \text{ sen } (A+Y)}{\text{sen } A} = cd \text{ sen } Y + md \text{ sen } Y$$

Sup. trapecio en funcion de tres lados y los 2 comprendidos

$$m = c - d\, \frac{\text{sen. } (A + Y)}{\text{sen. } A} \quad \text{(8)}$$

con lo que la última expresion de s, produce:

$$s = \tfrac{1}{2}\, (c + m)\, d \text{ sen. } Y \quad \text{(9)}$$

La fórmula (8) ademas de proporcionar un dato necesario para la

(9), dá tambien la base Rr del segundo trapecio $Rr\,Pp$ para proseguir el cálculo. En cuanto al lado $P\,r$, se ve que es igual á $b - x$, habiéndose obtenido:

$$x = \frac{d \text{ sen. } Y}{\text{sen. } A} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (10)$$

De este modo en el trapecio siguiente se conocerá la base $R\,r = m$, $P\,r = b - x$, el ángulo $r = A$ y el ángulo R igual al interior YRM del polígono, ménos el suplemento de Y, quiere decir se tendrán datos semejantes á los del primer trapecio, y por consiguiente, se aplicará la misma resolucion representada por las fórmulas (8), (9) y (10). La cantidad $b - x$ reemplazará á d, m á c, R á A y A á Y, por lo cual se obtendrá:

$$Pp = m' = m - (b - x)\,\frac{\text{sen. } (A + R)}{\text{sen. } R}$$

$$s' = \tfrac{1}{2}\,(m + m')\,(b - x) \text{ sen. } A$$

$$Rp = x' = \frac{(b - x) \text{ sen. } A}{\text{sen. } R}$$

Esta resolucion dá los elementos necesarios del tercer trapecio. $Pp\,Mm$ para proseguir de una manera idéntica. En el último triángulo $Mm\,J$ se conocerán los lados Mm, mJ y el ángulo en $m = pPJ$, que bastan para calcular su superficie. Por comprobacion podrán determinarse los elementos MJ y J.

Apliquemos las fórmulas con los datos que han servido hasta aquí·

d..................	3.9859740	0.5............	9.6989700	d sen. Y........	3.9077603
sen. $(A + Y)$	8.7726049—	$c + m$........	4.0550456	sen. A............	9.9037119
sen. A..........	—9.9037119	d	3.9859740	x..................	4.0040484
	2.8548670—	sen. Y........	9.9217863		
	+ $715^{\text{m}}9$	s............	7.6617759	$x =$	$10093^{\text{m}}7$
$c =$	5317. 7			$b =$	15326. 6
$m =$	$6033^{\text{m}}6$	$s =$	$45^{\text{M}}896116$	$b - x =$	$5232^{\text{m}}9$

$b - x$..........	3.7187424	0.5............	9.6989700	$(b - x)$ sen. A	3.6224543
sen. $(A + R)$.	9.9145011—	$m + m'$......	4.2200558	sen. R...........	9.9770713
sen. R..........	—9.9770713	$b - x$......	3.7187424	x'................	3.6453830
	3.6561722—	sen. A........	9.9037119		
	+ $4530^{\text{m}}8$	s'..........	7.5414801	$x' =$	$4419^{\text{m}}6$
$m =$	6033. 6			$e =$	7665. 5
$m' =$	$10564^{\text{m}}4$	$s' =$	$34^{\text{M}}792056$	$e - x' =$	$3245^{\text{m}}9$

$e - x'$..........	3.5113351	0.5..........	9.6989700	$(e-x')$ sen. R	3.4884064
sen. $(R+P)$.	8.7496543—	$m' + m''$...	4.3287424	sen. P..........	9.9844654
sen. P..........	—9.9844654	$e - x'$.....	3.5113351	x''..........	3.5039410
	2.2765240—	sen. R.......	9.9770713		
	$+ 189^{\mathrm{m}}.0$	s''........	7.5161188	$x'' =$	$3191^{\mathrm{m}}.1$
$m' =$	10564. 4			$a =$	11457. 0
$m'' =$	$10753^{\mathrm{m}}.4$	$s'' =$	$32^{\mathrm{M}}.818508$	$a - x'' =$	$8265^{\mathrm{m}}.9$

0.5	9.6989700
$a - x''$	3.9172901
m''	4.0315458
sen P	9.9844654
s'''......	7.6322718
$s''' =$	$42^{\mathrm{M}}.881634$

Sumando las cuatro superficies parciales se encuentra la total de $156^{\mathrm{M}}.388314$, que es en consecuencia la del polígono.

197º La area de esta misma figura se ha calculado en las páginas 182 y 186 por métodos diversos de los que se han desarrollado en este Capítulo. Con el fin de compararlos, reunamos todos los resultados.

Por la triangulacion..............................	$s = 156^{\mathrm{M}}.386594$
Por las coordenadas de los vértices.........	$s = 156.\ 387220$
Por la division en triángulos..................	$s = 156.\ 389207$
Por la division en cuadriláteros.............	$s = 156.\ 387447$
Por la division en trapecios....................	$s = 156.\ 388314$

Las personas poco habituadas á apreciar el grado positivo de aproximacion que debe esperarse de una operacion numérica en determinadas circunstancias, se sorprenderán quizá al ver que son diferentes todos estos resultados no obstante haberse deducido directa ó indirectamente de los mismos datos, que son los de la triangulacion que consta en la pág. 133, y por métodos de la mas estricta exactitud; pero ya en otro lugar tuve ocasion de indicar la causa inevitable de esas diferencias, cual es la precision necesariamente limitada con que se obtienen, de los datos originales, los diversos elementos que demanda cada uno de los procedimientos por cuyo medio puede llegarse al resultado que se busca. Todos los métodos aplicados á nuestro ejemplo son de la mas rigurosa exactitud teórica; pero el simple hecho de que para aplicarlos es preciso preparar sus elementos propios por medio de algunos cálculos preliminares, basta para comprender la alteracion indispensable que en la práctica debe producirse en los resultados, puesto que esos elementos auxiliares intermedios tienen que aproximarse únicamente hasta cierto límite mas allá del cual no es prácticamente útil llevar la aproximacion, y aun cuando así se hiciera, seria esta enteramente ilusoria por no corresponder al grado de precision que tienen los datos originales ó primitivos. De aquí se infiere que el resultado final, no siendo otra cosa mas que una combinacion mas ó ménos complicada de esos elementos, debe participar de los errores que implícitamente se admiten en ellos al limitar su aproximacion, y como el error del resultado y los de los elementos guardan entre sí una relacion que depende de la forma de la funcion que enlaza aquel con estos, se comprende desde luego que en funciones tales como las superficies, los volúmenes, &c., que provienen de productos de ciertos datos, se hace generalmente mas perceptible la influencia de sus errores, ó por mejor decir, de la aproximacion numérica con que representamos sus valores y hacemos la combinacion de estos. Supongamos, por ejemplo, que una superficie provenga del producto de dos cantidades cualesquiera como 2785 y 240: suponiendo exactos estos números su valor seria de 668400 unidades cuadradas; pero si por tomar enteros los factores hubiéramos prescindido de una corta fraccion en el segundo de ellos, tal como $\pm$ 0.1, es evidente que el resultado tendria un error de $\pm$ 278.5 unidades cuadradas, y seria absurdo creer que el valor obtenido era exacto hasta las últimas cifras.

En vista de esta dependencia necesaria entre el resultado y los datos, y atendiendo á que en el polígono cuya area se ha calculado por distintos procedimientos, los lados se aproximaron solamente hasta los decímetros y los ángulos hasta las unidades de segundo, lo que verdaderamente sorprende es que los diversos valores de una superficie tan considerable concuerden perfectamente casi hasta los millares de metros cuadrados, lo que no debe atribuirse mas que á una compensacion fortuita de errores que, por otra parte, casi siempre se verifica en los cálculos. La mayor diferencia es la de los resultados primero y tercero, la cual siendo de 2613 metros cuadrados, apenas llega á $\frac{1}{60000}$ de la superficie del polígono, cuyo valor real puede suponerse de $156^{M}387000$.

Podria creerse que aproximando mas los datos se obtendria tambien mayor exactitud en el resultado; pero esta es una ilusion que solo abrigan las personas teóricas y de que debe desprenderse completamente un espíritu práctico. En efecto, podria suceder que de esta manera los resultados de diversos procedimientos concordasen mejor entre sí: pero tal concordancia en manera alguna mide su exactitud real, y no produciria mas que un aumento de trabajo enteramente inútil; porque de nada serviria aproximar, por ejemplo, los valores de los lados hasta los centímetros ó los milímetros, y los valores de los ángulos hasta los decimales de segundo, si los mejores instrumentos con que se toman sobre el terreno los datos primitivos apenas permiten medir las lineas con la aproximacion efectiva de $0^{m}.1$, y los ángulos con la de 4 á 5 segundos. Sirvan estas reflexiones para que el geómetra práctico se dedique á perfeccionar sus métodos de experimentacion directa mas bien que á buscar en los números una exactitud ficticia, y para que colocándose siempre en el punto de vista positivo que corresponda á cada caso, guie las operaciones numéricas en consonancia con la exactitud efectiva que atribuya á sus datos, no olvidando, sin embargo, que por regla general es conveniente apreciar en el cálculo cantidades algo menores que las suministradas por la medida directa, con el fin de no introducir en él una nueva causa de error originada por la aproximacion numérica.

198º En todos los métodos que para medir la superficie se han desarrollado en este Capítulo y en el anterior he supuesto conocidos los lados y los ángulos de la figura. Tal hipótesis queda plenamente justificada si se recuerda que sea cual fuere el procedimiento que se emplee para levantar un plano, siempre es posible conocer aquellos elementos, ya sea por la medida directa, ya sea por medio del cálculo. Los levantamientos por el método de coordenadas polares se hallan en el primer caso, y los que se hacen por triangulaciones, por el método de coordenadas rectangulares y por el de intersecciones, en el segundo. Este último es el que dá lugar á cálculos mas laboriosos, si bien es el mas rápido en el terreno, segun se ha indicado ya en la pág. 217 y siguientes.

Todos los métodos de la planometría se prestan tambien, de una manera mas ó ménos sencilla, á la determinacion de las coordenadas de los vértices; y atendiendo á las grandes ventajas que ofrecen esos elementos tanto para la construccion de los planos como para la resolucion de muchos problemas, no debe vacilarse en calcularlos siempre, y en servirse de ellos preferentemente para la determinacion de las superficies; pues aunque este camino parece mas largo á primera vista, no lo es en realidad si se recuerda la extremada sencillez de las fórmulas que suministran el contenido de un polígono en funcion de las coordenadas de sus vértices, y que se han establcido en las páginas 183, 184 y 185. Aunque allí se hizo una aplicacion numérica de una de las fórmulas, me parece conveniente presentar aquí otro ejemplo para que el lector no tenga que consultar diversas partes de esta obra en busca de procedimientos que realmente corresponden á una sola. Recordemos solamente que suponiendo que se recorria el perímetro dejando el polígono siempre á la izquierda, la regla que dedujimos de las fórmulas fué esta. *La superficie de un polígono es igual á la suma algebraica de los productos que se obtienen multiplicando la ordenada media de cada uno de los lados (semisuma de las ordenadas de sus extremos) por la diferencia de absisas de los mismos extremos, restando siempre cada una de la que le sigue y atendiendo á los signos de todos los factores:* (núm. 118.)

Puede inventarse otro planímetro fundado en esta regla, sobre dos guías rectang. y que sería mas preciso que el polar.

Apliquemos la regla al polígono de la página 244 cuyas coordenadas se repiten á continuacion.

ESTACIONES.	x	y
1...............	$+ 3788^{\text{m}}.7$	$+ 3730^{\text{m}}.0$
2...............	$+ 3938.0$	$- 620.0$
3...............	0.0	0.0
4...............	$+ 35.4$	$+ 1526.5$
5...............	$+ 622.8$	$+ 1515.8$
6...............	$+ 653.6$	$+ 2935.2$

El cálculo se dispone como sigue:

Ordenadas medias.	Dif. de absisas.	Productos positivos.	Prod. negativos.
$+ 1555^{\text{m}}.0$	$+ 149^{\text{m}}.3$	$23^{\text{H}}.2161$	
$- 310.0$	$- 3938.0$	122.0780	
$+ 763.2$	$+ 35.4$	2.7017	
$+ 1521.1$	$+ 587.4$	89.3494	
$+ 2225.5$	$+ 30.8$	6.8545	
$+ 3332.6$	$+ 3135.1$	1044.8034	
		Superficie $= 1289^{\text{H}}.0031$	$= 12^{\text{M}}.890031$

En este ejemplo todos los productos resultaron positivos, á diferencia del que se calculó en la pág. 186, por el mismo método.

Por todo lo que precede habrá ya notado el lector la poca importancia que tiene el plano del polígono en la aplicacion de los procedimientos analíticos, pues para dirigir las operaciones numéricas es suficiente un cróquis, y aun un simple bosquejo trazado de memoria.

Los métodos que preceden se aplican generalmente á los polígonos formados por las directrices que en la planometría parcial se toman como lineas auxiliares; y á la superficie que resulte debe agregarse la comprendida entre las directrices y los lados poligonales que se levantan por su intermedio. Es claro que esta última será sustractiva cuando el polígono auxiliar esté circunscrito al otro. En los casos en que las directrices corten en diversos puntos á las lineas de este, de tal manera que las areas aditivas no difieran mucho de las sustractivas, creo que no hay inconveniente en medir gráficamente los valores de esas areas, aun cuando se haya determinado por el cálculo la del polígono auxiliar. Esta marcha que abrevia mucho la operacion, puede hacerse mas exacta construyendo en grande escala cada directriz y la linea poligonal referida á ella, con el fin de obtener con mayor precision la superficie comprendida entre las dos. A pesar de esto, cuando la referencia se ha hecho por medio de coordenadas rectangulares, el cálculo de los trapecios que resultan se ejecuta con mas facilidad que la operacion gráfica, puesto que los mismos datos del terreno proporcionan sus bases y sus alturas.

199º Falta únicamente investigar la influencia que en el valor de una superficie tiene algun error de la cadena con que se hayan medido las lineas; porque sucede á veces que por descuido, ó por no descubrir ese error sino despues de hechos los cálculos, se determina la superficie sin corregir previamente las lineas, y en tales casos la fórmula que voy á desarrollar suministra la correccion que debe hacérsele.

La expresion de una superficie puede reducirse á la forma general:

$$S = M\,a\,b$$

en la que a y b representan las lineas que la determinan, y M un coeficiente que depende del ángulo que estas forman entre sí. Si designamos por l la longitud que se le supone á la cadena, y por n, n' los números de veces que cupo en las lineas medidas, se tendrá: $a = n\,l$, $b = n'\,l$, y la superficie obtenida es:

$$S' = M\,n\,n'\,l^2$$

Mas si por las comparaciones con la unidad fundamental se reconoce que la verdadera longitud de la cadena es $l' = l + c$, la superficie corregida será:

$$S = M n n' (l + c)^2 = \frac{S'}{l^2} (l^2 + 2 c l + c^2)$$

ó bien la correccion vendrá á ser:

$$S - S' = S' \left(2 \frac{c}{l} + \frac{c^2}{l^2} \right)$$

y como por lo comun c es muy pequeño respecto de l, podrá tomarse en todos casos:

$$S - S' = 2 \frac{c}{l} S'$$

El polígono que ha servido de principal ejemplo en este Capítulo proviene de una triangulacion cuya base se midió con una cadena de $24^{m}9857$, como consta en la pág. 15; pero si por no conocer la verdadera longitud de la cadena, la hubiera yo supuesto de 25^{m}, habria hallado $S' = 156,^{M}566000$ próximamente por superficie del polígono. Para corregirla por la fórmula precedente, tendriamos, $l = 25^{m}$, $c = -0^{m}0143$, y resultaria:

$$S - S' = -0.001144 \times 156566000 = -179111 \text{ met. cuadrados.}$$

La superficie correcta seria, pues:.................................. $S = 156566000 - 179111 = 156,^{M}376889$, ó bien sensiblemente la misma cantidad que han dado los diversos procedimientos de este Capítulo.

La fórmula indica que la relacion entre el error de la superficie y su valor, crece proporcionalmente á $2\frac{c}{l}$, por lo cual miéntras menor sea la cadena mayor debe ser el cuidado con que se determine su verdadero tamaño. En nuestro ejemplo se ha visto que poco mas de un centímetro de error en una cadena comparativamente larga, pues las mas comunes tienen solo un decámetro, produce una diferencia casi de 18 hectaras en la superficie. Este resultado, y en general, la forma de la ecuacion precedente manifiestan la gran trascendencia que tiene el servirse de una medida de longitud cuyo tamaño real no sea el que se le atribuye; trascendencia que indudablemente por falta de buenos conocimientos teóricos, no comprenden las personas que califican de nimiedad la cuidadosa comparacion que debe hacerse de la cadena con la unidad fundamental á fin de llevar en cuenta el error que tenga. Para opinar de esa manera se fundan en que al ejecutar la medida de una linea, cada vez que se aplica la cadena en su direccion puede cometerse un error de la misma magnitud que el que tenga el instrumento, y en consecuencia juzgan inútil apreciar este último; pero tal raciocinio no puede sostenerse cuando se examina la naturaleza de ambos errores. Efectivamente, entre los errores hay unos que se llaman *constantes*, cuyo carácter esencial consiste en no ser susceptibles de compensacion, á diferencia de los *accidentales* ó fortuitos, que por su naturaleza son esencialmente variables, no tanto en su magnitud como en su signo. A los primeros pertenece el error que tenga la cadena, y á los segundos los que se cometen al hacer las medidas. El pequeño error que se comete cada vez que se aplica la cadena en la direccion de una linea, puede tener una magnitud bastante apreciable; pero como unas veces se produce por exceso y otras por defecto, hay gran probabilidad de que en el resultado final se obtenga una compensacion mas ó ménos perfecta; miéntras que si á una cadena cuyo verdadero tamaño es $l + c$ se le atribuye solo la longitud l, es evidente que al aplicarla n veces sobre la linea, se cometerá el error $n\,c$ en la distancia total, sin que se conciba la posibilidad de compensacion, puesto que c no puede variar de signo.

En otra ocasion he dicho que una exactitud exagerada ademas de innecesaria es solo aparente cuando no corresponde á la que existe en los datos; pero tratándose de errores de cierto género es preciso no perdonar medio alguno de eliminar sus efectos, sobre todo, pudiéndose conseguir de una manera tan sencilla como en el caso que ha dado orígen á estas reflexiones.

CAPITULO IV.

REGLAS GENERALES PARA LA CLASIFICACION Y VALUACION DE LAS TIERRAS.

200º El conocimiento de la extension de una propiedad rústica, y el del valor de la unidad de superficie son los elementos indispensables para hacer su valuacion. El primero de dichos elementos se determina con gran precision por medio de los procedimientos que con la amplitud necesaria se han expuesto en los Capítulos que preceden, y en cuanto al segundo, aunque su determinacion depende de consideraciones agenas á los procedimientos geométricos de la topografía, es de tal importancia práctica, que no he podido ménos de consagrarle algunas lineas con el fin de establecer el corto número de reglas generales que pueden servir de norma al perito encargado de la difícil mision de valuar los terrenos de una propiedad rural.

«Asentar de antemano,» dice Mr. Laur, «que en ninguna parte existen *peritos clasificadores y valuadores* propiamente dichos, de los terrenos en general, y que el mejor perito en este género es el que está *mejor informado* respecto de los productos brutos y de los productos líquidos de un distrito ó de una heredad que se tiene necesidad de valuar, es anunciar desde luego las dificultades que tiene que vencer todo perito geómetra encargado de la delicada tarea de justipreciar una propiedad de cierta importancia.» Despues de esta opinion de un escritor tan experimentado y concienzudo como Mr. Laur, cuya obra es una de las mas completas en esta materia, nada ó muy poco podria añadirse en apoyo de esas dificultades; porque para comprenderlas basta considerar la dependencia que necesariamente existe entre todas las diversas circunstancias que concurren á la produccion de la renta ó rendimiento de una propiedad, y el carácter esencialmente variable y accidental de esas mismas circunstancias. En efecto, la extension, la calidad de las tierras, la mayor ó menor perfeccion de su cultivo y los gastos que demanda, las circunstancias meteorológicas, la abundancia de las cosechas, la distancia á los centros de consumo, &c., son otros tantos elementos que deben tomarse en cuenta para cada caso especial, y que inevitablemente varian de una localidad á otra.

Para ejercer de una manera conveniente la honrosa aunque difícil profesion de perito valuador, árbitra muchas ocasiones de grandes intereses presentes y futuros, es preciso no solo estar versado en la agrimensura, sino ser tambien agrónomo y poseer ciertos conocimientos de las leyes y de las costumbres locales; estar penetrado de los deberes que impone esa noble profesion; y á veces tener alguna práctica en los asuntos contenciosos, para dar á sus informes la concision y claridad propios de una persona habituada á esos negocios.

201º El rendimiento de las tierras, ántes de hacer la deduccion de los gastos de explotacion, se llama su *producto bruto:* y la renta efectiva que obtiene el propietario despues de deducir todos los gastos del cultivo, es lo que constituye el *producto líquido.* La determinacion de este es la que en último resultado tiene que hacer el valuador, para que considerado ese producto líquido como el rédito R del capital C que representa la propiedad, quede en aptitud de calcularlo por medio de la conocida relacion:

$$C = \frac{100\ R}{r}$$

en la que r expresa el tanto por ciento, ó sea el rédito medio de 100 pesos, que se considera como la unidad de capital.

En los casos en que el propietario no cultiva por sí mismo sus terrenos, sino que los arrienda, el producto líquido no es otra cosa mas que la cantidad que recibe anualmente por el arrendamiento. Si acaso hay que hacer de ese valor alguna deduccion, es solamente la pequeña suma que puede suponerse invertida durante el año en gastos de conservacion y reparacion de los edificios, molinos, &c., cuando no esté estipulado en el contrato de arrendamiento que se hagan por cuenta del arrendatario.

Si el propietario cultiva por sí mismo sus tierras, para hallar el producto líquido es preciso comenzar por la determinacion del producto bruto, y valuar en seguida los gastos de explotacion. Todos esos cálculos pueden evitarse si se tiene un conocimiento profundo de las localidades que permita estimar con alguna aproximacion el número y la calidad de las cosechas, así como el costo del cultivo. A falta de esos datos referentes á cada propiedad en particular, pueden tomarse los que correspondan á las propiedades inmediatas que se hallen poco mas ó ménos en las misma condiciones, adoptando un término medio de varios años con el fin de eliminar hasta donde sea posible las causas accidentales que con cierta periodicidad hacen variar los valores comunes ó normales de los rendimientos y de los gastos. Es claro que los datos deben referirse á superficies de igual extension y de la misma clase para que puedan ser comparables, y lo mejor será calcularlos para una unidad cualquiera de superficie, para una hectara por ejemplo, y aplicarlos despues á toda la extension de cada clase de terrenos.

202º La clasificacion de las tierras es, pues, lo primero de que debe ocuparse el valuador, formando grandes grupos separados por la naturaleza del cultivo y por el objeto á que están destinados los terrenos, y subdividiendo despues esos grupos en clases, ya sea por su calidad, ya por las obras de arte que tienen por objeto perfeccionar el cultivo, ó ya, en fin, por las condiciones especiales que constituyan una diferencia apreciable en su valor. Así, por ejemplo, la primera division separará las tierras labradas, las destinadas á pastos, los bosques, los terrenos eriales, &c.; en seguida las tierras labradas se dividirán en tierras de riego constante, y de temporal. (*) Una clasificacion análoga se hace en los demas grupos, estableciendo las diferencias que se juzguen necesarias segun la calidad de las tierras y la naturaleza del suelo. La superficie de cada clase de terreno debe determinarse con tanta mas precision cuanto mayor sea el valor de sus productos, y aplicando á cada una los datos referentes á la unidad que se haya adoptado y que correspondan á cada clase de tierras, se obtendrán los productos líquidos cuya suma constituye el de toda la propiedad.

203º Siempre que sea posible procurarse datos respecto de los terrenos mismos que van á valuarse, deben adoptarse de preferen-

(*) Las Ordenanzas mexicanas de tierras y aguas designan á las de riego seguro con el nombre de tierras de *pan llevar*, y á las de temporal con el de tierras de *pan coger*.

cia; porque hay veces que varian notablemente de una propiedad á otra aunque estén inmediatas. En todos casos es preciso adoptar resultados medios tomando el promedio del mayor número de años que sea posible. En Francia la ley de 15 de Mayo de 1818 que establece el impuesto sobre traslacion de dominio, prescribe que para calcular el valor de los productos de la agricultura deben tomarse los correspondientes á los catorce últimos años, y que se excluirán los dos mayores y los dos menores para hallar el promedio de los diez restantes que se considera como dato medio de un año *comun*. En el código del catastro de Bélgica el período prescrito es de quince años, y se hace la misma deduccion de los dos años de mayor y de menor precio. En uno y otro caso parece que la mente del legislador es sustraer el producto de la contribucion á las influencias accidentales que hacen oscilar dentro de ciertos límites los valores de los elementos que le sirven de base.

Puede darse una form. y con calcular todas valuacion de las relaciones de los disputados

Para determinar el producto bruto de las tierras labradas, debe atenderse á la especie de sus producciones, como maiz, trigo, cebada, &c., y al valor medio de estas en la localidad, conforme se ha dicho. Tambien es un buen dato para la asignacion del producto bruto, el conocimiento de la proporcion entre la cosecha y la semilla, que comunmente se indica por medio de guarismos, y así se dice que unas tierras producen 50, 100, 150, &c., por 1, lo que significa que la cosecha es á la siembra como 50, 100, 150, &c., es á 1.

Los gastos de explotacion se calculan sumando los que corresponden al costo de las labores y preparacion de las tierras, el importe de las semillas y el costo de las siegas. Los gastos de labor se estiman por el número de trabajadores y el jornal que ganan, así como por la especie y número de los animales que se emplean.

Una vez obtenidas esas dos sumas, su diferencia dá á conocer el producto líquido que debe capitalizarse, como se dijo al principio segun el rédito medio r que en cada localidad rinde el dinero en especulaciones del mismo género, pues nuestras leyes no fijan, y con razon, valor alguno legal de ese rédito, considerando al dinero como una mercancía que, lo mismo que cualquiera otra, es susceptible de alta y baja.

La generalidad misma de las reglas que se han establecido dá á conocer la necesidad que tiene el valuador de modificarlas en atencion á las circunstancias especiales que debe tomar en cuenta en cada caso que se le presente. Las costumbres locales y las leyes de cada país le prescribirán muchas veces esas modificaciones; pero cuando no sea así, y sobre todo cuando se le presenten casos que no puedan sujetarse á las reglas generales, debe tener presente que el valor venal de los bienes que tenga que justipreciar depende únicamente de su producto efectivo, y por consecuencia á la investigacion de este es á lo que es preciso que consagre todos sus esfuerzos. En algunos países que tienen ya arreglados sus códigos catastrales, se previene que los terrenos sustraidos á la agricultura y consagrados á objetos de recreo, de comodidad ó de lujo, como parques, jardines, estanques, bosques, avenidas, &c., deben valuarse como si fuesen tierras labradas de primera clase en cada localidad. En la República se ha intentado alguna vez establecer los impuestos sobre la propiedad territorial tomando por base la extension mas bien que el valor, con el objeto de promover la subdivision de la misma propiedad; tambien la ley de 20 de Julio de 1863 que prescribe los trámites para la enagenacion de terrenos baldíos, asigna en cada Estado un valor medio á la unidad de superficie sin atender á la calidad y producto real de que sean susceptibles las tierras; pero esta clase de prescripciones pueden considerarse como excepcionales respecto de las reglas generales de que he procurado dar una idea en las líneas anteriores.

Las personas que deseen detalles mas amplios para hacer segura y metódicamente el valuo de las propiedades, pueden consultar con fruto la obra titulada «*Guia de los hacendados*» por Young, ó la «*Guia de los propietarios*» por Gasparin; pues se comprende que en un tratado de topografía no es posible entrar en pormenores que corresponden á obras especiales de otro género.

CAPITULO V.

INVESTIGACION DE LA INFLUENCIA QUE LOS ERRORES DE LAS LINEAS Y DE LOS ÁNGULOS TIENEN EN LA DETERMINACION DE LAS SUPERFICIES. (*)

204º En las aplicaciones de la ciencia, especialmente de la matemática, se presentan dos extremos que conviene evitar con igual cuidado: al uno tienden por lo general las personas únicamente teóricas, y es el de buscar en todo una exactitud ideal; miéntras que se dirigen al otro las puramente prácticas, ó al ménos aquellas cuyos conocimientos teóricos no son bastante amplios, las cuales tienden por el contrario á despreciar todo aquello que consideran inútil para conseguir la ruda aproximacion que á su modo de ver es la única que puede alcanzarse. Los dos extremos son igualmente viciosos: el primero porque ocasiona mucho trabajo inútil, y puede producir el desaliento al ver que los resultados no corresponden á la perfeccion que indica la teoría; el segundo porque se opone al adelanto de los medios de observacion. Aunque varias veces he tenido ya ocasion de hacer algunas indicaciones respecto de este importante objeto, nada me parece mas á propósito para señalar el verdadero punto de vista práctico en que conviene colocarse, que el estudio de la influencia de ciertos errores que pueden calificarse de inevitables é inherentes á toda operacion material.

205º Los datos que el agrimensor recoge del terreno cuya superficie trata de determinar, son las longitudes de ciertas lineas y las amplitudes de los ángulos que estas forman entre sí; por consiguiente, el error que cometa en la medida de cualquiera de esos ele-

(*) Este Capítulo y el siguiente contienen el extracto de una memoria sobre este asunto que leí en el seno de una Sociedad científica; pero como no son esenciales para el estudio de la topografía, no hay inconveniente en suprimirlos en un curso elemental. Lo mismo puede decirse respecto de algunos otros trozos de esta obra; pero mas bien que omitirlos, me ha parecido preferible dejar á cada profesor la libertad de escoger lo que crea mas necesario, y mas conforme con la amplitud que desee dar á su curso.

mentos, debe producir un error correspondiente en el resultado que depende de ellos, de modo que investigando la relacion que existe entre los errores primitivos y los finales, será fácil estudiar la influencia de los primeros y estimar el grado positivo de precision que debe esperarse de un resultado en determinadas circunstancias.

Analizar á la vez y de una manera general la influencia de los errores de los ángulos y de las líneas en la superficie que se deduce de esos elementos, es un problema que en mi opinion presenta bastantes dificultades, y que acaso no puede resolverse con entera abstraccion de la *forma* que afecta la superficie misma; pero reflexionando que en último resultado las operaciones que se ejecutan en el terreno, ya sea en el perímetro de la figura, ya sea fuera de él, dán lugar directa ó indirectamente á la descomposicion de la misma en triángulos cuyos elementos se miden ó se calculan, será fácil convencerse de que se obtendrá el resultado que se desea aplicando el análisis á una figura elemental y generalizando sus consecuencias para el conjunto de los elementos.

Trataré, pues, de investigar la influencia de los errores de observacion tomando por base las relaciones que existen entre los lados y los ángulos de un triángulo, á lo que tambien me inclina la circunstancia de que la triangulacion es indudablemente el mejor procedimiento de que puede valerse un ingeniero para medir una superficie.

En las triangulaciones no se miden comunmente mas que uno ó dos lados, de suerte que las longitudes de los demas dependen necesariamente de los primeros datos y participan de sus errores. Designando por b la base medida, por A, B, C los ángulos del primer triángulo que supondré ya reducidos á 180°, haciéndoles la correccion de la tercera parte de la diferencia que resulte, y finalmente por a y c los lados que se calculan, la superficie del triángulo no puede determinarse con los datos del terreno, mas que por la ecuacion:

$$2s = b^2 \frac{\text{sen. } A \text{ sen. } C}{\text{sen. } B}$$

Si se supone todo variable en esta expresion, llamando α, β y γ respectivamente las diferenciales de los ángulos A, B y C, y e la de la superficie, se obtendrá la que sigue por la diferenciacion y despues de combinarla con la primitiva:

$$e = 2s \frac{\text{d} b}{b} + s \left(\frac{\gamma \text{ sen. } A \text{ cos. } C + \alpha \text{ cos. } A \text{ sen. } C}{\text{sen. } A \text{ sen. } C} - \beta \text{ cot. } B \right)$$

Abreviando y teniendo presente que $A + B + C = 180°$, resulta:

$$e = 2s \frac{\mathrm{d}\,b}{b} + s\left(\alpha \cot. A + \gamma \cot. C + (\alpha + \gamma) \cot. B\right) \ldots\ldots (1)$$

La inspeccion de este resultado indica que el primer término es el que mide la influencia del error lineal $\mathrm{d}\,b$, y el segundo la de los angulares α, β y γ. Para estudiarlos mejor los analizaré separadamente, designando el primero por m y el segundo por n, á saber:

$$\left.\begin{aligned} m &= 2s \frac{\mathrm{d}\,b}{b} \\ n &= s\left(\alpha \cot. A + \gamma \cot. C + (\alpha + \gamma) \cot. B\right) \\ e &= m + n \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

206º Los errores de las lineas provienen en general de dos causas: la una es la inexactitud del instrumento que sirve para medir las distancias, ya sea un resorte de acero, ya una cadena metálica. La segunda causa de error es la que proviene de la operacion misma, como lo es la pequeña diferencia que puede haber al establecer los contactos de los extremos de la cadena con el punto de partida, y en general, con el que sirvió de término en la medida precedente; la diversa tension que sufre la cadena durante la operacion; la inclinacion del terreno en que se trabaja, &c.

De ambas causas de error es sin duda alguna mas temible la primera; porque no hay compensacion posible si una medida de longitud no tiene realmente el tamaño que se le atribuye; miéntras que los errores accidentales que se cometen en el curso de la operacion, puesto que no todos tienden á obrar en el mismo sentido, es probable que al combinarse produzcan un efecto resultante menor que la suma absoluta de los efectos de cada uno en particular, y por tanto aun se concibe la posibilidad de que llegen á compensarse. Por fortuna un error en la longitud de la cadena puede ponerse en claro por medio de la comparacion que de ella se hace con el modelo ó patron de la unidad fundamental, y entónces pasa á la categoría de una correccion, como se ha visto en la pág. 337. Una vez eliminado el efecto de este error, analicemos la influencia de aquellos que pueden llamarse inherentes á las operaciones, ó que por mejor decir, nunca puede estar seguro de destruir el ingeniero, sea cual fuere su habilidad y la perfeccion de sus instrumentos, pues por su naturaleza son esencialmente inconstantes en su marcha, y su pequeñez no los hace notar mas que por la comparacion de los resultados finales.

Los errores accidentales existen, cualquiera que sea la magnitud de la linea que se mida, y si bien es cierto que debe variar su valor final segun las circunstancias particulares en que se trabaje, así como segun el instrumento con que se opere, cuando estas circunstancias é instrumentos sean idénticos, es natural admitir que cada una de las causas de error fortuito debe existir con el mismo grado de probabilidad, de suerte que su resultante será mayor para una distancia considerable que para una pequeña. En tal concepto supondré que el error final es proporcional á la longitud de cada linea. Esta hipótesis, perfectamente razonable, es por otra parte la única que en mi opinion puede admitirse tratándose de errores accidentales por naturaleza; y ademas, creo encontrarla comprobada por algunos experimentos que mencionaré en otro lugar.

Suponiendo, pues, que r es el *error posible* en la unidad de distancia y d b el que resulta en la linea b, se tendrá: $r = \frac{db}{b}$, con lo que la primera de las ecuaciones (2) se convertirá en la siguiente:

$$m = 2\,r\,s \qquad (3)$$

Luego que experimentalmente se haya encontrado el valor medio de r que corresponde á cada uno de los instrumentos que sirven para medir las lineas, la ecuacion anterior dará á conocer el error que puede resultar en la superficie; pero como hasta ahora no he considerado mas que la figura elemental, la primera cuestion que se presenta es esta: el error de la superficie total, ¿qué relacion guarda con el de sus elementos? Para resolverla de una manera satisfactoria sigamos la marcha de las operaciones topográficas. Si estas consisten en triangulaciones, todos los elementos lineales de los triángulos se deducen de las cantidades medidas, que son la base, y todos los ángulos de la cadena trigonométrica. Como los errores de estos últimos se han separado de los que provienen de la base, el valor..... $m = 2\,r\,s$ no tendrá mas orígen que el error lineal, como si los ángulos de la triangulaciou fuesen constantes ó libres de error. En tal virtud, y puesto que segun lo que vimos en la pág 30, un lado cualquiera a_n en funcion de la base b y los ángulos, es:

$$a_n = b \frac{\text{sen. } A_1 \text{ sen. } A_2 \ldots\ldots \text{ sen. } A_n}{\text{sen. } B_1 \text{ sen. } B_2 \ldots\ldots \text{ sen. } B_n}$$

resultará que el factor de b es constante, y la diferenciacion respecto de a_n y b produce, despues de eliminar ese factor: $b \, \text{d} \, a_n = a_n \text{d} b$, ó bien:

$$\frac{\text{d} \, a_n}{a_n} = \frac{\text{d} \, b}{b} = r$$

lo que demuestra de una manera general que el error de cualquiera lado guarda con la longitud del mismo la relacion constante r.

Segun esto, siendo S la superficie total compuesta de los elementos $s_1, s_2, s_3 \ldots\ldots s_n$, se tiene evidentemente:

$$S = s_1 + s_2 + s_3 + \ldots\ldots s_n$$

Llamando ahora M el error final de S en la parte que depende del primitivo de la base, y $m_1, m_2, m_3 \ldots\ldots m_n$ los que corresponden respectivamente á los elementos en virtud de la misma causa, se tendrá:

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots\ldots m_n$$

y sustituyendo los valores de m_1, m_2, &c., que por lo demostrado, deben ser de la misma forma que la ecuacion (3), resulta:

$$M = 2 \, r \, (s_1 + s_2 + s_3 + \ldots\ldots s_n) = 2 \, r \, S \ldots\ldots \quad (4)$$

lo que indica que el error de la superficie total, originado por el que se cometió en la base, es siempre proporcional á la superficie.

Veamos ahora si este principio que es estricto en una triangulacion por depender directamente de la base todos los lados calculados, puede aplicarse á otros métodos ménos exactos de que se vale la planometría especialmente en superficies de poca extension. En casi todos esos procedimientos no se mide un solo lado, sino muchos, de modo que en general sus longitudes como sus errores son independientes unos de otros. Segun esto, parece que deberia admitirse que los errores accidentales, cuyo carácter esencial consiste en la igualdad de probabilidad para que se produzcan con signo positivo que con signo negativo, podrian llegar á compensarse en el conjunto de lineas medidas de tal suerte que nulificaran el error final de la superficie.

Tratándose de errores realmente fortuitos no hay duda que esta hipótesis, si no enteramente admisible, no tendria al ménos carácter alguno de imposibilidad, suponiendo que los instrumentos fueran perfectos, y la manera de observar completamente libre de cualquiera vestigio de error constante; pero no existiendo jamas ninguna de esas circunstancias, hay casi una certidumbre de que es imposible la compensacion en el resultado final. En efecto, una diferencia en la cadena inapreciable á la vista, cierta tendencia que hay comunmente en cada observador para apreciar las cantidades pequeñas siempre mayores ó siempre menores de lo que son en realidad, y en general, para cometer esa clase de errores constantemente en el mismo sentido, son otras tantas causas cuyos resultados no admiten eliminacion, por no ser verdaderamente accidentales respecto del mismo ingeniero y del mismo instrumento; pues si las he considerado como tales, ha sido únicamente por la imposibilidad de asignarles un valor y aun de establecer la ley de su tendencia para aumentar ó disminuir la longitud verdadera de las lineas.

De lo expuesto resulta que si no hay plena certidumbre, sí un alto grado de probabilidad para juzgar que los errores muy pequeños de observacion tienden siempre á obrar en el mismo sentido; y en tal concepto, la relacion (4) dará igualmente un valor aproximativo de M, sea cual fuere el método de levantamiento, con tal que en ella se sustituya por r el guarismo que convenga al grado de exactitud de cada operacion. Verémos mas adelante cómo puede determinarse el valor de r para un instrumento dado.

207º La influencia de los errores angulares en la superficie del triángulo elemental está medida por la segunda de las ecuaciones (2), en la que α y γ representan respectivamente los pequeños errores que existan en los ángulos A y C adyacentes al lado conocido. Veamos ahora qué hipótesis podemos hacer respecto del valor relativo de estos errores, para lo cual conviene analizar la marcha y la naturaleza de las observaciones angulares.

Para medir un ángulo se dirige una visual á la primera de las señales que lo forman, y despues de anotar lo que indica la graduacion del instrumento con cuanta exactitud permite la *aproximacion* de sus divisiones, se dirige otra visual á la segunda de las señales, anotando lo mismo que ántes la indicacion angular del goniómetro, cuyo limbo se supone perfectamente inmóvil y horizontal durante la operacion, y su centro coincidiendo con la vertical que pasa por el vértice del ángulo. Si el instrumento y la observacion fuesen perfectos, es evidente que la diferencia de ambas indicaciones daria el ángulo con toda exactitud, puesto que el movimiento del anteojo al pasar de una posicion á otra, le hace describir en el órden creciente de las divisiones, la amplitud que mide el ángulo que se busca; pero esta exactitud no es admisible: el uso de los sentidos, cuya percepcion tiene siempre un límite, y mucho mas el de instrumentos, sea cual fuere el grado de perfeccion con que estén construidos, así como las circunstancias particulares que rodeen al observador, son otras tantas causas de error cuya influencia combinada debe modificar necesariamente sus resultados, y que constituyen la diferencia entre la teoría y la práctica, entre la abstraccion de la ciencia y la aplicacion material de sus principios. Señalando las mas influentes de esas causas y su modo de obrar, llegarémos al conocimiento de útiles indicaciones acerca del error resultante que se debe temer.

De los errores instrumentales figuran en primera linea: 1º la excentricidad, que proviene de que el telescopio y la alidada muchas veces no giran exactamente en el centro matemático de la graduacion; 2º las pequeñas inexactitudes de las divisiones; 3º la aproximacion limitada con que se obtienen en cada instrumento las fracciones de una division angular; 4º el espesor sensible de los hilos de la retícula, cuyo objeto es el de hacer visible el eje ideal del telescopio.

Las causas de error independientes del goniómetro son: 1º las que provienen de su manejo, como la falta de horizontalidad del limbo, y la desviacion de su centro respecto del punto de estacion; 2º el uso de señales de un grueso mas ó ménos apreciable para hacer perceptibles los puntos que se observan; 3º el estado de la atmósfera que en ciertas circunstancias comunica á las señales un movimiento ondulatario aparente, y hace mas ó ménos incierta la direccion de las visuales.

La construccion de los goniómetros, que se perfecciona de dia en dia, por una parte, y por otra el principio de la repeticion aplicado á las observaciones angulares, tienden á disminuir el efecto de los errores instrumentales; así es que debe reducirse considerablemente el de excentricidad cuando se usan dos ó mas vernieres, y casi nulificarse los de division y aproximacion midiendo el mismo ángulo en diversas partes del círculo graduado, sin hacer mas lecturas que las del principio y el fin de la observacion, cuya diferencia dividida por el número de medidas fracciona sus respectivos errores. De lo expuesto se deduce inmediatamente que el efecto de estas causas de error debe temerse poco generalmente hablando, cuando se procede de la manera que he indicado; miéntras que el de las demas no puede suponerse nulo mas que en virtud de compensaciones accidentales. Sin embargo, cualesquiera que sean las causas de error que se consideren, es cierto que el del resultado depende de la diferencia algebraica de los que se cometen en cada visual, puesto que el ángulo se obtiene por la diferencia de indicaciones que en ellas dá el instrumento, y como el resultante de los últimos tiene igual probabilidad para ser positivo que para ser negativo, se comprende desde luego la gran posibilidad que existe de que su efecto final sea siempre muy pequeño, y aun de que lleguen á destruirse completamente los errores accidentales; esto equivale á decir que las medidas angulares pueden considerarse exentas de error constante.

El mismo hecho de obtenerse el ángulo por una diferencia de indicaciones, sea cual fuere la situacion relativa de las señales, dá á conocer que en igualdad de circunstancias el error final debe ser el mismo para una distancia angular pequeña que para una mas considerable, ó bien independiente del valor del ángulo.

En la práctica de las triangulaciones se acostumbra á medir los tres ángulos de cada triángulo, lo cual aunque innecesario en teoría es sumamente útil para saber si existe en las observaciones algun error fuerte que provenga de equivocacion en las lecturas ó de otra causa cualquiera, y aun para dividir el error ordinario entre todos los ángulos. A falta de indicaciones ciertas respecto de la parte de error que corresponde á cada uno, se divide por igual la diferencia hallada, por lo ménos cuando todas las medidas se han ejecutado en circunstancias semejantes; mas si se tiene algun motivo para atribuir á unos resultados mas confianza que á otros, se reparte el error final en proporcion del grado de incertidumbre. Así, por ejemplo, si el número de repeticiones no ha sido el mismo para todos los ángulos, puede distribuirse en razon inversa del número de observaciones (pág. 117), y lo mismo deberia hacerse si el estado de la atmósfera ó cualquiera otra causa variasen de un ángulo á otro la claridad con que se distinguen las señales; pero se ve que en último resultado este modo de operar no es mas que un caso particular del primero, pues al distribuir así el error, lo que se hace es reducir á igualdad de circunstancias las observaciones que no lo estaban.

La suposicion de que el error proviene por igual de los tres ángulos está autorizada en gran manera por lo que ántes he dicho respecto de que en casos idénticos el error de la observacion es esencialmente fortuito é independiente de la amplitud del ángulo. Esa es, por otra parte, la única hipótesis razonable en todas aquellas circunstancias en que ningun indicio prevenga el ánimo en favor de un resultado mas que en favor de otro; pero no se crea, sin embargo, que haciendo la distribucion por igual se destruye en todos casos el error, aun dando por cierto que los de cada ángulo sean numéricamente iguales; porque es claro que la diferencia entre 180° y la suma práctica de los ángulos indica solamente que existen en ellos pequeños errores; pero no dá luz alguna respecto del signo con que estos entran en cada uno, y aquella diferencia no es mas que una resultante de tres cantidades que pueden ser iguales en valor aunque diferentes en signo. De esto se deduce que al ejecutar la distribucion lo que se hace es combinar el error final con sus componentes, de tal suerte que el que queda en cada ángulo despues de repartida la diferencia puede aumentar ó disminuir el error primitivo de observacion.

Aunque las consideraciones precedentes, por su extremada sencillez, no necesitan del auxilio del cálculo, voy, sin embargo, á expresarlas en el lenguaje algebraico con el objeto de deducir de ellas la medida aproximativa de la incertidumbre procedente de los errores angulares en la determinacion de la superficie. Sean x, y, z los pequeños errores que se cometen al medir los tres ángulos A, B, C de un triángulo, y ε el exceso ó defecto que resulta con relacion á la suma teórica. Puesto que los tres errores pueden ser positivos ó negativos con igual probabilidad, es evidente que habrá tres casos distintos que son igualmente posibles, y son: 1º cuando los tres errores son del mismo signo; 2º cuando los errores que corresponden á los ángulos adyacentes al lado conocido son de signo contrario; 3º cuando son iguales los signos de estos mismos. Habiendo designado por b el lado conocido, los tres casos están representados por su órden en las ecuaciones siguientes:

$$\pm x \pm y \pm z = \pm \varepsilon \qquad \pm x \pm y \mp z = \pm \varepsilon \qquad \pm x \mp y \pm z = \pm \varepsilon$$

Como en todos casos se distribuye ε entre los tres ángulos, y puesto que he designado por α, β y γ los que quedan en cada uno despues de reducirlos á 180°, tendrémos:

$$\begin{array}{lll}
\alpha = \pm \frac{1}{3}\left(2x - (z+y)\right) & \alpha = \pm \frac{1}{3}\left(2x - (y-z)\right) & \alpha = \pm \frac{1}{3}\left(2x - (z-y)\right) \\
\beta = \pm \frac{1}{3}\left(2y - (x+z)\right) & \beta = \pm \frac{1}{3}\left(2y - (x-z)\right) & \beta = \mp \frac{1}{3}\left(2y + (x+z)\right) \\
\gamma = \pm \frac{1}{3}\left(2z - (x+y)\right) & \gamma = \mp \frac{1}{3}\left(2z + (x+y)\right) & \gamma = \pm \frac{1}{3}\left(2z - (x-y)\right)
\end{array}$$

Admitamos ahora la hipótesis de igualdad numérica de los errores, que está fundada en las consideraciones de que me he ocupado. Suponiendo, pues, $x = y = z$, resulta en los tres casos:

$$\begin{array}{lll}
\alpha = 0 & \alpha = \pm \frac{2}{3} x & \alpha = \pm \frac{2}{3} x \\
\beta = 0 & \beta = \pm \frac{2}{3} x & \beta = \mp \frac{4}{3} x \\
\gamma = 0 & \gamma = \mp \frac{4}{3} x & \gamma = \pm \frac{2}{3} x
\end{array}$$

Por estos resultados se ve que exceptuando el primer caso, que es el mas favorable, en todos los demas el error que subsiste en los ángulos puede aun exceder al primitivo, y entónces varia de signo respecto de los otros. Nótese tambien que en los dos últimos casos x es igual á ε, de modo que llamando $\omega = \frac{1}{3}\varepsilon$ el valor medio del error tal como se distribuye, se tendrá que los errores reales son:

$$\begin{array}{lll}
\alpha = 0 & \alpha = \pm 2\omega & \alpha = \pm 2\omega \\
\beta = 0 & \beta = \pm 2\omega & \beta = \mp 4\omega \\
\gamma = 0 & \gamma = \mp 4\omega & \gamma = \pm 2\omega
\end{array}$$

Para sustituir estos valores en la segunda de las ecuaciones (2), demos á los ángulos del triángulo el valor de 60°, tanto por ser la forma equilátera la que se procura dar á los elementos de una cadena trigonométrica, como por ser 60° la amplitud media de los ángulos que se observan comunmente en los demas métodos topográficos, haciendo abstraccion de los suplementos, puesto que dos ángulos suplementarios tienen numéricamente iguales sus lineas trigonométricas. En este concepto, el valor de n en cada uno de los tres casos que he considerado, será:

$$n = 0 \qquad n = \mp 4\, \omega\, s \text{ cot. } 60^\circ \text{ sen.} 1'' \qquad n = \pm 8\, \omega\, s \text{ cot. } 60^\circ \text{ sen.} 1''$$

La naturaleza de los errores angulares es de tal manera accidental, atendidas las principales causas que los originan, que no puede dudarse que en identidad de circunstancias son igualmente probables los tres casos anteriores. Como prueba de esta verdad pueden citarse los hechos de que en una triangulacion casi siempre se verifica que el número de triángulos cuyo error es por exceso, con poca diferencia es el mismo que el de aquellos en que el error es por defecto, y de que la suma de los errores positivos no difiere mucho de la de los negativos. Ambos hechos reunidos tienden á nulificar el valor medio del error angular, y son tan generales, que casi bastan por sí solos, aun sin atender á otras consideraciones, para justificar el principio tan conocido de los topógrafos, de que siempre que se tenga libre la eleccion de los procedimientos, debe procurarse medir en el terreno muchos ángulos y pocas lineas, sin hacer jamas lo contrario. Yo estableceria otro que no me parece ménos cierto, y es el de que cuando en una triangulacion el número de triángulos de error positivo difiere notablemente de aquel en que el error es por defecto, ó bien cuando la suma absoluta de los errores por exceso se aleja mucho de la que producen los negativos, debe buscarse alguna causa de error constante, algun vicio radical en el instrumento, en su colocacion ó en el modo de usarlo; porque los errores verdaderamente fortuitos siempre tienden á destruirse mutuamente. Despues haré la comparacion de algunas triangulaciones que corroboran este aserto; pero ántes hagamos extensiva á toda la superficie las consideraciones que se han hecho respecto de uno de sus elementos, admitiendo desde luego la hipótesis de ser igualmente posibles los tres casos de que hice mencion.

Sean S_1, S_2, S_3 respectivamente las porciones de la superficie total S en que tiene lugar cada uno de los casos; ω_1, ω_2, ω_3 los *errores angulares medios* que les corresponden; y q_1, q_2, q_3 los coeficientes que miden la incertidumbre, esto es:

$$q_1 = 0 \qquad q_2 = \mp 4\, \omega_2 \text{ cot. } 60^\circ \text{ sen. } 1'' \qquad q_3 = \pm 8\, \omega_3 \text{ cot. } 60^\circ \text{ sen. } 1''$$

Designando ahora por N el error de toda la superficie debido á los errores angulares, y por q su coeficiente, se tiene:

$$N = qS = q_1 S_1 + q_2 S_2 + q_3 S_3$$

Como suponemos que todos los casos son igualmente probables, y por otra parte los triángulos nunca son muy desiguales en dimensiones, resulta que cada una de las porciones puede considerarse sensiblemente igual á la tercera parte de la superficie total; y si tomamos en lugar de ω_1, ω_2 y ω_3 el promedio de los errores, de tal suerte que ω represente el error angular medio de la triangulacion entera, se obtiene:

$$N = qS = \pm \tfrac{4}{3}\, \omega\, S \cot. 60^\circ \text{ sen. } 1'' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Por comodidad he calculado la tabla siguiente de los valores del coeficiente medio $q = \pm \frac{4}{3}\, \omega \cot. 60^\circ \text{ sen. } 1''$, expresando á ω en segundos desde 1″ hasta 6′.

ω	q	ω	q	ω	q
0″	0.000000	10″	0.000037	1′	0.000224
1	. 4	20	. 75	2	. 448
2	. 8	30	. 112	3	. 672
3	. 12	40	. 149	4	. 895
4	. 16	50	. 187	5	. 1120
5	0.000020	60	0.000224	6	0.001344

Las fórmulas (4) y (5) dán separadamente la influencia de los errores lineales y angulares, y aunque se comprende con facilidad que r y q pueden tener el mismo signo ó signos contrarios, conviene considerar el caso mas desventajoso en que tanto los errores lineales como los angulares conspiren á producir el mismo efecto, de modo que el error final de la superficie S será:

$$E = M + N = \pm (2r + q) S \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

208º Paso ahora á comparar los resultados de varias triangulaciones ejecutadas unas por mí y otras por diversas personas, pero todas con buenos instrumentos. Para facilitar su inspeccion presentándolas en forma de tabla, llamaré R la relacion entre el número de triángulos que dieron error por exceso y el de los que lo dieron por defecto. Siendo n_1 y n_2 esos números, se tomará el menor de ellos por numerador á fin de que R nunca sea mayor que 1. Designaré igualmente por m el término medio numérico de los errores, esto es, la suma absoluta de ellos con abstraccion de sus signos, dividida por el número de ángulos observados; miéntras que ω representa el medio aritmético atendiendo á los signos, ó lo que es lo mismo, siendo ε_1 la suma de los errores positivos, ε_2 la de los negativos y n el número total de triángulos, se tendrá:

$$m = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{3\,n} \qquad \omega = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{3\,n}$$

Como tambien conviene hacer mencion del número de triángulos, del de observaciones y del de vernieres, así como de la aproximacion angular del instrumento, la tabla que sigue contiene todos esos datos. En ella se han arreglado las triangulaciones por los valores crecientes de R.

NUMERO DE							
LA TRIANG.	TRIÁNGULOS.	REPETICIONES	VERNIERES.	APROXIMACION.	R	m	ω
I	29	de 3 á 6	2	10″	0.45	7″.4	— 3″.4
II	28	6	2	20	0.47	9. 3	— 3. 4
III	4	3	2	60	0.50	11. 7	— 0. 8
IV	11	2	3	10	0.57	4. 9	+ 1. 1
V	15	6	2	10	0.67	7. 0	— 1. 8
VI	75	6	2	60	0.70	6. 8	— 1. 9
VII	29	6	2	20	0.71	6. 7	+ 1. 8
VIII	12	2	2	60	0.71	24. 6	+ 2. 9
IX	7	6	4	10	0.75	3. 5	— 0. 9
X	42	12	2	10	1.00	1. 8	0. 0

La comparacion de estos resultados dá á conocer desde luego que en general ω va decreciendo al paso que R se acerca á su límite superior que es la unidad; y es digno de notarse que si m fuese numéricamente igual en toda una triangulacion, deberia resultar $\omega = 0$ siempre que R fuese igual á 1. En efecto, los valores de m y ω podrian expresarse así:

$$m = \frac{(n_1 + n_2)\,m}{n} \qquad \omega = \frac{(n_1 - n_2)\,m}{n}$$

que divididos uno por otro dán:

$$\frac{\omega}{m} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

mas como con abstraccion del signo, se tiene $R = \frac{n_1}{n_2}$, suponiendo $n_2 > n_1$, podrá trasformarse la ecuacion anterior en la siguiente:

$$\omega = m \frac{R - 1}{R + 1}$$

que nulificará el valor ω cuando $R = 1$, ó bien cuando $n_1 = n_2$.

Puede suceder que R sea igual á **1** sin que ω sea nulo, ó al contrario; pero esto proviene de que m no es numéricamente el mismo en toda la triangulacion, pues designando por m_1, m_2 los errores medios por exceso y por defecto, y por u un coeficiente tal que se tenga $R\,u = \frac{m_1 n_1}{m_2 n_2}$, será fácil obtener por consideraciones análogas á las precedentes:

$$\omega = m \frac{R\,u - 1}{R\,u + 1}$$

En esta ecuacion puede ser $R = 1$, y ω no será nulo mas que cuando $m_1 = m_2$ y por el contrario puede tenerse $\omega = 0$, para lo cual basta que $R\,u = 1$, ó bien que los valores numéricos de m_1 y m_2 sean inversamente proporcionales á los números de triángulos n_1 y n_2. Esto es casi lo que se verifica en la triangulacion III de la tabla en que uno de los triángulos dió 180° por suma, y como n es igual á 4 solamente, el valor de R es bastante pequeño no obstante la bondad de la operacion. En igualdad de circunstancias, es claro que miéntras mayor sea n debe notarse mejor la simultaneidad de los valores $R = 1$ y $\omega = 0$.

Como el hecho de ser m igual y de distinto signo en ambas partes de una triangulacion, debe considerarse como una prueba de que el error angular es esencialmente fortuito, ó por lo ménos es un indicio de mucho peso de que no hay error constante de importancia en las observaciones, creo como dije ántes, que se podrá juzgar de la bondad ó mérito relativo de una triangulacion, por la proximidad de R á la unidad, al mismo tiempo que por la pequeñez de ω

Otro hecho que manifiesta la tabla anterior, muy curioso y no ménos interesante bajo el punto de vista práctico, es que los valores de m y ω no guardan relacion constante con la aproximacion angular del instrumento, aun teniendo en cuenta los números de repeticiones y de nonius; y esto parece indicar que puede alcanzarse la misma exactitud con un teodolito cuya graduacion no esté muy subdividida que con otro de mucha aproximacion, con tal que el primero esté bien construido. Con esta condicion puede asegurarse, casi sin temor de equivocacion, que el valor de ω no excederá de $4''$ á $6''$ repitiendo los ángulos de 2 á 6 veces, que es lo bastante para las operaciones mas delicadas de la topografía, aun suponiendo que el instrumento solo permita la lectura directa de $1'$ como sucede comunmente en los teodolitos pequeños. Si se atiende ahora á los valores de q se verá que es de esperarse que la incertidumbre que resulte en la superficie á causa del error angular, no pase de........ $0.00002\ S$ en una triangulacion ejecutada con esmero sirviéndose de un teodolito digno de confianza.

Aunque los resultados que constan en la tabla, por ser bastante variados, proporcionan una buena prueba de las consecuencias á que me habia conducido solo la teoría, convendrá presentar otros que, obtenidos por procedimientos defectuosos, indican desde luego la existencia de vicios de ejecucion por la simple inspeccion de los resultados finales. Las operaciones que siguen, tabuladas como ántes, se han practicado con teodolitos que tenian algun defecto; así por ejemplo, en la primera se midieron los ángulos haciendo la lectura de un solo vernier por estar muy deteriorado el otro. En la que va señalada con el núm. II se midieron dos ángulos de cada triángulo con el mismo teodolito, y el tercero con un instrumento en buen estado. En la III se tomaron los ángulos con el mismo teodolito con que se ejecutó la triangulacion núm. VIII de la tabla precedente; pero que recibió despues un golpe que probablemente deformó algo el limbo. La IV se hizo por varias personas midiéndose dos ángulos de cada triángulo con un buen instrumento, y el tercero con un teodolito que solo tenia servible uno de sus nonius. Las triangulaciones V y VI fueron ejecutadas por un ingeniero que por falta de buen teodolito se vió obligado á trabajar con uno que á consecuencia de un golpe tenia sensiblemente separados el limbo y la alidada, lo que hacia muy dudosa la lectura del único vernier que se conservaba en regular estado.

NUMERO DE							
LA TRIANG.	TRIÁNGULOS.	REPETICIONES	VERNIERES.	APROXIMACION.	R	m	ω
I	12	6	1	10″	0.33	9.″6	+ 7.0
II	4	6	....	10	0.33	8. 6	+ 6.7
III	14	2	2	60	0.40	32. 6	+ 10.4
IV	6	6	....	10	1.00	9. 1	+ 1.8
V	13	5	1	10	0.86	32. 6	— 8.2
VI	22	5	1	10	0.47	8. 0	— 4.6

Si no se supieran de antemano los defectos de que he hecho mencion, la mayor parte de estos resultados indicarian un vestigio de error constante, con excepcion acaso de la triangulacion núm. IV, en que parece haber habido una compensacion casual.

209º Indiquemos ahora el modo de fijar los valores de r y ω para determinados instrumentos. Se ha visto que r representa el error de la unidad de distancia, de modo que midiendo con un instrumento determinado una linea cuya longitud se conozca exactamente, la diferencia que se obtenga servirá para deducir el valor de r que corresponda á ese instrumento, y repitiendo las pruebas varias veces se llegará á un resultado medio de bastante precision. Mas como en realidad es imposible conocer la longitud matemáticamente exacta de una linea, no queda mas recurso que tomar por término de comparacion la que se obtiene por aquellos procedimientos que puedan suministrar resultados tan aproximados á la verdad como se necesitan en las aplicaciones mas delicadas de la geometría: tales son, por ejemplo, las lineas medidas por métodos geodésicos.

En general de este medio me he valido para hacer algunas experiencias dirigidas á determinar el valor de r. Habiendo medido geodésicamente una pequeña base de 502.ᵐ198, repetí la medida con un resorte de acero por el método expuesto en la pág. 12 y hallé ..... 502.ᵐ063. Por diferencia se obtiene $\mathrm{d}\,b = 0^{\mathrm{m}}135$, de donde resulta $r = \frac{\mathrm{d}\,b}{b} = 0.00027$.

Por encargo mio, el ingeniero D. Miguel Iglesias midió con un decámetro comun de eslabones de hierro un tramo de la base geodésica en que se apoya la triangulacion del Valle de México. La longitud exacta de ese tramo era 1849.ᵐ693, y el Sr. Iglesias, llevando en cuenta el grueso de las fichas, halló 1848.ᵐ746, por lo cual se obtiene $r = 0.00051$ para ese instrumento.

Si se hubiera despreciado el grueso de las fichas, como se hace comunmente en las medidas de detalles, habria resultado 1847ᵐ918; y entónces se obtendria $r = 0.00096$.

Tambien tuve ocasion de comparar la longitud de una linea de 4239ᵐ bien medida, con el resultado que dió un cordel de cáñamo encerado de 50 varas, como lo usan todavía algunos prácticos, y hallé una diferencia de 21ᵐ, lo que produce $r = 0.00495$. El ingeniero D. Francisco Jimenez, que ha hecho tambien algunas comparaciones de esos cordeles con instrumentos mas perfectos, me asegura, sin embargo, haber hallado diferencias superiores á 1 por 100, lo que supone á r mayor que 0.01.

Los valores precedentes de r para cada instrumento no deben considerarse como concluyentes, tanto por haberse deducido de muy pocos experimentos, como porque se han obtenido midiendo lineas horizontales, y generalmente con un esmero superior al que se tiene en las medidas comunes. Por eso me parece indudable que en la mayor parte de los casos deben ser mucho mas considerables, y es de desearse que los ingenieros que se hallen en posibilidad de hacer esta clase de observaciones contribuyan con sus experimentos á la asignacion de ese límite del que pueden derivarse tan importantes consecuencias, variando al efecto las circunstancias de las observaciones para que el promedio que corresponda á cada instrumento sea realmente el que conviene á las condiciones comunes en que se usa. Por ahora basta lo expuesto para mi objeto, y á reserva de valerse de guarismos mas exactos cuando se hayan determinado para cada instrumento y para cada sistema peculiar de operaciones, supondré los valores siguientes:

1º—Para el resorte de acero.. $r = 0.00025$
2º—Para la cadena comun con el grueso de las fichas....... $r = 0.00050$
3º—Para la cadena comun sin el grueso de las fichas......... $r = 0.00100$
4º—Para el cordel encerado (*como mínimum*)..................... $r = 0.00500$

En cuanto al valor de ω del cual depende q, lo suministra el resultado de una triangulacion, segun se ha visto en las tablas precedentes; y respecto del que corresponda á cualquiera otro de los goniómetros que se usan en la planometría parcial, es fácil hallar un resultado medio tomando con él los tres ángulos de un triángulo ó bien varios ángulos al derredor de un punto, y comparando su suma con la suma teórica. En el primer caso si ε es la diferencia de los observados respecto de 180°, se tendrá $\omega = \frac{1}{3}\varepsilon$; en el segundo siendo n el número de ángulos y ε su diferencia á 360°, se tiene: $\omega = \frac{1}{n}\varepsilon$. Es necesario hacer repetidas observaciones y tomar el término medio de todos los resultados. Este método suministrará *a priori* el valor medio de ω para un instrumento dado; pero si despues de levantado un plano pueden compararse las sumas de los ángulos interiores de los polígonos que lo forman con la suma teórica......... $(n - 2)$ 180°, siendo ε la diferencia y n el número de ángulos de cada polígono, se obtendrá en término medio el valor de ω que conviene á esa operacion, por la fórmula $\omega = \frac{1}{n}\varepsilon$.

Por medio de esas comparaciones aplicadas á operaciones topográficas de diversas clases, y ejecutadas por distintos ingenieros, he hallado con poca diferencia los valores siguientes. Para las triangulaciones, $\omega = \pm 5''$; para los levantamientos hechos con otros goniómetros, ó con la brújula tomando en cada estacion los azimutes directo é inverso, $\omega = \pm 3'$; y para los casos en que solo se toman los directos, $\omega = \pm 6'$. Tomando con estos datos los valores de q en la pequeña tabla que se formó ántes, y designando por C el coeficiente $2r + q$ de la ecuacion (6), pueden calcularse entre otras muchas, las siguientes combinaciones principales:

Para triangulaciones en que se emplea el resorte....................	$C = \pm$ 0.00052
Para triangulaciones en que se usa la cadena comun...............	$C = \pm$ 0.00102
Planos levantados con cadena y brújula tomando los dos azimutes	$C = \pm$ 0.00267
Planos levantados con cadena y brújula tomando un solo azimut	$C = \pm$ 0.00334
Planos levantados con cordel y brújula tomando un solo azimut	$C = \pm$ 0.01134

Solo con el objeto de hacer en el Capítulo siguiente algunas aplicaciones de la fórmula (6) es por lo que adopto estos guarismos, como podria haber adoptado arbitrariamente cualesquiera otros; pero repito que los valores de ω deben determinarse por el exámen de los datos correspondientes á una operacion ya terminada, ó bien calcular para cada instrumento un valor medio deducido de la experiencia, con el fin de formarse una idea *a priori* del error que puede cometerse en la medida de una superficie. Con ese dato y con el valor de r que tambien experimentalmente se haya asignado al instrumento con que se miden las lineas, se podrá calcular el del coeficiente C, y por consecuencia el error posible, así como todas las otras cantidades que pueden derivarse de este, segun vamos á indicarlo.

CAPITULO VI.

CONSECUENCIAS DE LA INVESTIGACION ANTERIOR.

210º Cuando dos ingenieros ejecutan la medida de una misma linea ó de una misma superficie, aunque sigan los mismos métodos con igual habilidad y en circunstancias enteramente semejantes, se encuentra que sus resultados jamas son idénticos, lo cual se explica por la existencia de las causas de error que se han enumerado. Sea L la longitud exacta de una linea, l_1 y l_2 respectivamente los resultados de uno y otro ingeniero, y finalmente, $\mathrm{d}\,l_1$ y $\mathrm{d}\,l_2$ los errores que les corresponden atendiendo á los valores de r que convengan á los instrumentos de que hacen uso. Es claro que habiendo ambigüedad en los signos de esos errores, puede suceder en el caso extremo, que uno de los topógrafos se aleje de la verdad por exceso, y el otro por defecto, de modo que se tendrán las dos ecuaciones:

$$L = l_1 \pm \mathrm{d}\,l_1 \qquad L = l_2 \mp \mathrm{d}\,l_2$$

Restando una de la otra y designando por t la diferencia entre los dos resultados, se obtiene:

$$t = \pm\,(\mathrm{d}\,l_1 + \mathrm{d}\,l_2)$$

ecuacion que representa la cantidad que podrán diferir, sólo en virtud de los errores puramente accidentales ó inherentes á las operaciones. Esta diferencia admisible es la que designaré con el nombre de *tolerancia.*

Para calcular los errores puede usarse un valor aproximativo de la línea, tal como el término medio l de los resultados l_1 y l_2; y representando por r_1, r_2 los valores de r que correspondan á los instrumentos empleados, se tendrá:

$$t = \pm\,(r_1 + r_2)\,l \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

El cálculo de esta fórmula servirá para juzgar del grado de concordancia que debe esperarse entre los resultados de dos topógrafos, y conocer por consiguiente si en sus trabajos hay algun error fuerte que acaso provenga de equivocaciones en los cálculos ó en las operaciones mismas del terreno.

De igual manera se hallaria que la tolerancia en la medida de la superficie del mismo terreno, tendrá por expresion:

$$T = \pm (C_1 + C_2) S \qquad (2)$$

Supongamos, por ejemplo, que en los apuntes de dos ingenieros que han medido la misma propiedad agrícola, consta que el error angular medio es para el uno de $5''$, y de $15''$ para el otro; que el primero midió sus lineas con un resorte á tension constante, y el segundo con un decámetro de anillos llevando en cuenta el grueso de las fichas; finalmente, que el uno encuentra $S_1 = 2507^{H}159$, y el otro $S_2 = 2508^{H}37$. Tomando los valores de C de acuerdo con los datos anteriores, se tendrá:

$$C_1 = 0.00052$$
$$C_2 = 0.00106$$
$$C_1 + C_2 = 0.00158 \qquad T = 0.0016 \times 2507^{H}76 = 4^{H}012$$

Como la diferencia que encuentran los dos ingenieros es solo de $1^{H}211$ ó bien 12110 metros cuadrados, deducirémos que puede explicarse por la influencia de los pequeños errores inevitables; miéntras que si, por ejemplo, excediere notablemente de 4 hectaras, habria fundamento para sospechar la existencia de algun error importante.

211º La utilidad del cálculo de las tolerancias se comprende fácilmente recordando que para la decision de ciertos asuntos acuden las partes interesadas al fallo de un tercero en discordia cuando los peritos nombrados por las mismas partes no concuerdan en sus resultados, erogando por consiguiente nuevos gastos que se evitarian al saber que la diferencia hallada no sale de los límites de la precision que debe esperarse. Pero hay mas todavía: si el tercero en discordia no hace uso de métodos mucho mas exactos que los que adoptaron los primeros geómetras, se colocará generalmente en las mismas condiciones que ellos, y acaso una concordancia enteramente casual con alguno de los resultados primitivos, dará orígen á un fallo que tal vez no sea el mas justo y razonable atendiendo al mérito de las operaciones. Refiriéndome al ejemplo anterior, supongamos que el tercero empleando procedimientos comparables en exactitud con los del segundo ingeniero, hubiera encontrado $S_3 = 2509^{\text{m}}85$. Como este resultado difiere $2^{\text{m}}69$ del primero y solo $1^{\text{m}}48$ del segundo, hará juzgar á este último mas digno de confianza que al otro, siendo así que bajo el punto de vista científico el primero es de mayor mérito que el segundo, como puede juzgarse por la comparacion de los coeficientes C_1 y C_2 que miden respectivamente sus errores posibles.

En la imposibilidad de apreciar el error real de los resultados, creo que el mérito relativo de las operaciones es el que debe servir de base á toda ley que establezca los límites de tolerancia y las reglas para la decision en los casos de discordancia, tanto por ser la que mas se aleja de toda consideracion arbitraria ó heterogénea, como porque tiende á uniformar y perfeccionar los procedimientos científicos interesando la reputacion de los ingenieros, que es sin duda uno de los estímulos mas poderosos. Hablando de las discordancias de los topógrafos, las Ordenanzas de tierras y aguas establecen los casos siguientes: 1º Cuando los ingenieros son desiguales en número é iguales en aptitud, se ha de seguir el parecer del mayor número. 2º Cuando hay mayor pericia en unos que en otros y discrepan en igual número, debe preferirse el voto de los mas inteligentes. 3º Cuando hay igualdad tanto en el número como en la pericia de los discrepantes, se debe seguir el dictámen de los que favorecen á la parte que en juicio hace las veces de reo. 4º Si fuesen varios los peritos que contradicen á uno solo, aunque este tenga mas pericia ha de creerse á aquellos. 5º Finalmente, cuando uno es mas anciano y práctico que el otro, debe seguirse el dictámen del primero.

El espíritu de estas reglas, cuando se apliquen á resultados geométricos, es indudablemente el de atender al mérito relativo de las operaciones, y para estimarlo nada me parece mas propio que tomar en cuenta el error posible que corresponda á cada una. En la ecuacion $E = \pm\ C\,S$, dependiendo el valor C de la naturaleza de las operaciones, es el que mide la magnitud de su error, y puesto que el buen juicio indica que debe concederse mayor confianza á aquel resultado que provenga de procedimientos mas exactos ó sujetos á ménos error, estableceremos el mérito relativo M en razon inversa del módulo C del error; por lo cual designando por a una cantidad constante arbitraria, tendrémos:

$$M\,C = a$$

y los méritos M_1 y M_2 de dos operaciones serán inversamente proporcionales á los coeficientes C_1 y C_2 de los errores posibles que les corresponden. Siendo arbitrario el producto a, puede suponérsele igual al coeficiente del error que convenga á una operacion cualquiera, cuyo mérito servirá en tal caso de unidad para valuar los de otras operaciones. Tomando, por ejemplo, por unidad de mérito el de una medida ejecutada con cordel y brújula, designando por C_u el coeficiente que le corresponde é introduciendo este valor en lugar de a, la ecuacion anterior dá:

$$M = \frac{C_u}{C} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Para aplicar esta fórmula adoptemos $C_u = 0.01134$ como se supuso al fin del Capítulo anterior, y determinemos el mérito relativo de las dos operaciones que sirvieron de ejemplo en el cálculo de la tolerancia, para las cuales se tenia $C_1 = 0.00052$ y $C_2 = 0.00106$. Obtendrémos:

$$M_1 = \frac{1134}{52} = 21.8 \qquad M_2 = \frac{1134}{106} = 10.7$$

lo que indica que el mérito de la segunda operacion es casi la mitad del de la primera.

De este modo de medir el mérito relativo de las operaciones se deduce el de distribuir la diferencia de dos resultados para obtener el valor mas plausible de la superficie, entendiéndose por supuesto que aquella es tolerable. Sea e la diferencia, e_1, e_2 las correcciones que correspondan á los resultados S_1 y S_2 respectivamente, y se tendrá:

$$e_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2}\, e \qquad e_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2}\, e \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

lo que equivale á distribuir la diferencia e en razon directa de C_1 y C_2. El valor de la superficie que deberá adoptarse, es: $S = S_1 \pm e_1$, ó bien $S = S_2 \mp e_2$. En el ejemplo precedente como se halló....... $e = 1^{H}211$, resultará $e_1 = 3996$ metros cuadrados y $e_2 = 8144$; por consiguiente, el valor mas plausible de la superficie es $S = 2507^{H}557$

Adoptando cantidades medias y bien determinadas por valores de r y C, las ecuaciones (1) y (2) suministrarian *a priori* los límites de tolerancia que debe prescribir la ley, los cuales no serian otra cosa mas que las sumas de las r para las lineas, y las C para las superficies, correspondientes á dos operaciones que se comparasen. Se pueden hacer muchas combinaciones para trabajos de diverso grado de exactitud; pero bastaria que la ley fijara la tolerancia para operaciones de la misma clase; tolerancia que seria igual al doble de los coeficientes r ó C que les correspondiesen. Si pudiéramos suponer exactos los guarismos adoptados al fin del Capítulo precedente, resultaria para las superficies:

CLASE DE OPERACIONES.	MÉRITO.	TOLERANCIA.
Triangulaciones con resorte y teodolito................	21.8......	$0.00104 = \frac{1}{960}$
Triangulaciones con cadena y teodolito................	11.1......	$0.00204 = \frac{1}{490}$
Planometría con cadena y brújula (*ambos azimutes*)..	4.2......	$0.00534 = \frac{1}{190}$
Planometría con cadena y brújula (*un azimut*)........	3.4......	$0.00668 = \frac{1}{150}$
Planometría con cordel y brújula (*un azimut*)........	1.0......	$0.02268 = \frac{1}{44}$

Se ha expresado tambien el valor aproximativo de las tolerancias en fracciones comunes, que es como se emplea generalmente. Inútil parece advertir que todo lo que se ha dicho respecto de tolerancias solo es aplicable cuando está bien limitada la superficie que forma el objeto de la medida. Si, como sucede á veces, hubiera vaguedad en los linderos, seria preciso que los ingenieros se pusieran de acuerdo respecto de las lineas en que deben terminar sus operaciones, pues de otra manera no podrian ser comparables los resultados que obtuviesen.

212º La fórmula que suministra el error posible de la superficie se presta á otra aplicacion de alguna importancia, cual es la de elegir el método mas conveniente para efectuar una medida atendiendo á su costo y al valor venal de la incertidumbre que puede producir. «La estimacion exacta del contenido de una propiedad rural,» dice Mr. Sang, «es un dato del que depende la seguridad de las fortunas de los interesados en herencias ó traslaciones de dominio, y el buen éxito de muchas especulaciones agrícolas. Si la determinacion es inexacta, puede engañar por mucho tiempo las esperanzas del agricultor y perjudicar el capital de los dueños ó arrendatarios; porque una vez hecha no puede rectificarse mas que por la repeticion completa de la medida, la cual en todos casos es costosa. Por tanto, es de la mayor importancia que sean exactas y económicas las operaciones del ingeniero.» La idea emitida por el geómetra inglés respecto de la conveniencia de conciliar la exactitud con la economía, puede precisarse, en mi concepto, introduciendo en las fórmulas que he desarrollado, el nuevo elemento que depende del precio de la unidad de superficie, así como el costo relativo de las operaciones. Sea A el importe de una medida ejecutada por un método tal, que deje de incertidumbre la cantidad $E = C\ S$, y $A + a$ el de otro procedimiento mas exacto cuyo error posible sea $E' = C'\ S$. Si designamos por p el precio medio de la unidad de superficie, tendrémos que $p\ C\ S$ y $p\ C'\ S$ representarán los valores venales de la incertidumbre, y su diferencia $p\ (C - C')\ S$ la superioridad de un método respecto del otro, debida al exceso de costo a. Llamando $V = p\ S$ el valor de toda la propiedad, y v la ventaja, expresada en numerario, de preferir el segundo sistema de operaciones, podrá establecerse la ecuacion:

$$v = (C - C')\ V - a$$

y como por el supuesto $C - C'$ es esencialmente positivo, lo será v siempre que $(C - C')\ V$ sea mayor que el exceso de costo a.

Para hallar una expresion equivalente á esta última cantidad, reflexionemos que una superficie puede determinarse en general por dos métodos tan diferentes en exactitud como en costo, y son ó la simple medida del contorno ó perímetro de la propiedad por los procedimientos de la planometría parcial, ó la medida del mismo contorno referida y enlazada á una triangulacion previa del terreno. Así, pues, si se designa por m el costo de la triangulacion por unidad de superficie, y por n el de la medida del perímetro c, por unidad itineraria, el importe de una operacion exacta será $m\ S + n\ c$, en el que puede tomarse $c = 5\sqrt{S}$ (*); miéntras que el costo de la simple con-

(*) Siempre es posible determinar la relacion R entre el perímetro c y la raiz de la superficie cuando se trata de figuras regulares, siendo próximamente 3.5 y 4.5 sus límites. En las figuras irregulares crece con la irregularidad; pero como raras veces llega á 7.0, he adoptado el valor medio $\frac{c}{\sqrt{S}} = 5$. En todas estas operaciones es preciso expresar á L y c en unidades correlativas: si la primera indica *sitios*, la segunda deberá indicar *leguas*; expresando S miriaras, c expresará kilómetros, &c.

figuracion del contorno será solo $n\,c = 5\,n\,\sqrt{S}$. Segun esto, estableceremos las ecuaciones:

$$A = 5\,n\,\sqrt{S} \qquad A + a = m\,S + 5\,n\,\sqrt{S}$$

de donde resulta:

$$a = m\,S$$

Por consiguiente habrá ventaja para el propietario en pagar una buena operacion cuando $p\,(C - C')\,S > m\,S$, ó lo que es lo mismo, cuando

$$p > \frac{m}{C - C'}$$

Supongamos, por ejemplo, que tomando en cuenta el trabajo de campo y el de gabinete, se hubiera calculado en \$4 el costo de la triangulacion por miriara, y que quisiera saberse si en un terreno en que la misma unidad de superficie vale \$ 2000 en término medio, convendria hacer una triangulacion esmerada ó bastaria medir á rumbo y distancia los linderos observando solamente los azimutes directos. A falta de mejores datos tomemos los valores correspondientes de C que hemos adoptado, á saber: $C = 0.00334$ y $C' = 0.00052$. Con ellos se obtiene: $p > 1418$ pesos, lo que indica que en este caso deberian preferirse las operaciones trigonométricas.

Todas las consideraciones de que me he ocupado tanto en este Capítulo como en el anterior, por su misma naturaleza no deben mirarse como concluyentes; y las presento por el contrario, solo con el fin de señalar nuevos puntos de investigacion dirigidos á establecer las tolerancias, el mérito de las operaciones, &c., sobre bases ménos arbitrarias de lo que lo han sido hasta aqui.

PARTE TERCERA.

AGRODESIA.

CAPITULO I.

PRINCIPIOS GENERALES.—DIVISION DE LAS FIGURAS ELEMENTALES.

213º La agrodesia tiene por objeto la division de la superficie de los terrenos en dos ó mas partes iguales, ó desiguales, que guarden entre sí una relacion cualquiera. A veces tambien se ocupa de la separacion de cierta cantidad de superficie tomándola de un terreno mas ó ménos extenso; pero en uno y en otro caso los procedimientos son absolutamente los mismos. De estas definiciones se deduce que en el primer caso es indispensable haber determinado previamente el contenido del terreno que va á dividirse, y en el segundo es tambien necesario el conocimiento de algunos de sus elementos, al ménos en la parte que se tiene que separar; de modo que podrémos considerar á la agrodesia como una aplicacion de la planometría y de la agrimensura.

Cuando se trata de dividir un terreno lo primero que debe hacerse es determinar la superficie de cada fraccion, para poder hacer efectivo el fraccionamiento. Sea S la superficie total, s_1, s_2, s_3,...... s_n las de las n fracciones, cuyos contenidos supondré que deben estar en la relacion de las cantidades $m_1, m_2, m_3 \ldots\ldots\ldots m_n$. Las areas de estas partes serán:

$$s_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + \ldots\ldots m_n} S$$

$$s_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2 + \ldots\ldots m_n} S$$

....

....

$$s_n = \frac{m_n}{m_1 + m_2 + \ldots\ldots m_n} S$$

Las expresiones anteriores son las mas generales, y por ellas se ve que si las n fracciones debieran ser iguales entre sí, cada una de ellas tendria $\frac{S}{n}$ por superficie. Supongamos, por ejemplo, que una propiedad que contiene 39 miriaras se quisiera dividir en tres partes cuyas superficies estuvieran en la relacion de los tres números 3, 5 y 7. Se tendria:

$$s_1 = \frac{3 \times 39}{15} = 7^{M}\!.8$$

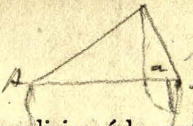
$$s_2 = \frac{5 \times 39}{15} = 13.\ 0$$

$$s_3 = \frac{7 \times 39}{15} = 18.\ 2$$

La comprobacion del cálculo consistirá en que la suma de todas las partes deberá reproducir la superficie total S.

Despues de calculadas de esa menera las areas de las fracciones se procede á determinar sobre un plano ó cróquis del terreno las lineas que les deben servir de perímetro, y por último se trazan sobre el terreno mismo.

Muchas veces las lineas divisorias tienen que sujetarse á ciertas condiciones, como son: la de partir de un punto dado, la de tener una direccion determinada, &c., y de aquí se originan diversos problemas de los que me propongo indicar los mas usuales é importantes. Para la resolucion de la mayor parte de ellos, es frecuente servirse de un sistema provisional de lineas sujetas á las condiciones que se hayan prescrito, y despues de calculada la superficie que abrazan, como por lo general no es exactamente la que se desea, se tiene necesidad de agregarle ó quitarle cierta cantidad que determina la correccion del primer sistema de lineas. Por lo regular esta correccion consiste en



Si desde el vert. de un triang. se baja una perp. á la base, dha. perpend. dividirá el triángulo en otros dos que estarán en la relacion

la adicion ó la sustraccion de una area de forma sencilla, como la de un triángulo ó un cuadrilátero, y por eso es conveniente comenzar el estudio de la agrodesia indicando los diferentes métodos que pueden aplicarse para dividir una figura elemental.

DIVISION DEL TRIÁNGULO.

214º Prob. 1º—*Dividir un tiángulo* A B C (fig. 151ª) *por medio de rectas que partan de uno de sus vértices.* La resolucion consiste simplemente en dividir el lado opuesto AB en el número de partes que se desee, guardando estas entre sí la relacion que deban tener las areas. En la figura se ha supuesto una division en tres fracciones ACD, DCE y ECB, cuyas areas están en la relacion de los números 1, 2 y 3.

$S : s :: \frac{a\,h}{2} : \frac{l\,h}{2} : \frac{c\,h}{2}$ :: a : l : c

Prob. 2º—*Dividir un triángulo* A B C (fig. 152ª) *por rectas paralelas á uno de los lados.* Como las superficies de todas las fracciones deben resultar triangulares y semejantes, puede hallarse la distancia x del primer punto de division n al vértice C por la simple comparacion de las areas con los cuadrados de sus lados homólogos. Designando por S la superficie de todo el triángulo, y por s la de la primera fraccion, determinada por las fórmulas generales que se han expuesto al principio, tendrémos:

$S : s :: a^2 : x^2$

$$Cn = x = a\sqrt{\frac{s}{S}}$$

Introduciendo en esta fórmula el valor de la segunda fraccion s', se obtendrá la distancia Cq, y así las demas. De igual manera podrian determinarse sobre el lado b del triángulo los puntos m, p, &c.

Este problema puede resolverse tambien gráficamente trazando una semi-circunferencia sobre CB como diámetro, y dividiendo ese lado en D, E, &c., en la proporcion que se quiere que tengan las fracciones. En seguida, por los puntos de division se trazan las perpendiculares Dd, Ee, &c., y finalmente desde C como centro, y con los radios Cd, Ce, &c., se determinan los puntos n, q, &c., desde los que deben partir las lineas divisorias. *

No solamente este sino otros muchos problemas agrodésicos pueden resolverse por métodos gráficos; pero aunque indicaré algunas de esas

* $S : s :: a^2 : Cn^2 = Cd^2$ y como $Cd^2 = CB \times CD = a \times CD$ resulta $S : s :: a : CD$

resoluciones, es preciso no olvidar los defectos á que están sujetas, y que hacen generalmente preferibles los procedimientos analíticos.

Prob. 3º—*Dividir un triángulo* A B C (fig. 153ª) *por medio de rectas perpendiculares á uno de los lados.* Sea s la superficie de la primera parte $A\,F\,E$, x la base $A\,F$, é y su altura $E\,F$: tendrémos las dos ecuaciones: $xy = 2\,s$, $y = x$ tan. A, de cuya combinacion resulta fácilmente: $x = \sqrt{2\,s\,\text{cot.}\,A}$, $y = \sqrt{2\,s\,\text{tan.}\,A}$. Aunque el conocimiento de x basta para trazar la perpendicular $F\,E$, si se desea conocer el punto E, podrá calcularse la distancia $A\,E$ por medio de la ecuacion $2\,s = A\,E \times x$ sen. A, en la que sustituyendo el valor de x, se obtiene: $A\,E = 2\sqrt{\frac{s}{\text{sen.}\,2\,A}}$. Si se designa por s' la superficie del triángulo $A\,H\,G$, que es igual á la suma de la primera y la segunda partes, se determinarán las nuevas incógnitas $x' = A\,H$, $y' = G\,H$, así como $A\,G$, introduciendo s' por s en las fórmulas anteriores. Con ayuda del ángulo B y el valor de la última fraccion, se determinan de la misma manera $B\,N$, $M\,N$ y $B\,M$. #

Prob. 4º—*Dividir un triángulo desde un punto dado en su interior.* Supongamos que el punto dado P (fig. 154ª) lo esté por sus coordenadas $A\,M = x$, $M\,P = y$. Si no se impone á la primera linea divisoria mas condicion que la de partir de P, podrá elegirse libremente y adoptarse, por ejemplo, la recta PA. En el triángulo PAM se tiene: tan. $P\,A\,M = \frac{y}{x}$, y $AP = \frac{y}{\text{sen.}\,A}$. Llamando ahora A el ángulo $B\,A\,C$ del triángulo, y s la superficie de la primera fraccion $P\,A\,D$, para determinar el punto D, se tendrá:........................
$2s = A\,P \times A\,D$ sen. $(A - P\,A\,M)$, de donde resulta:

$$A\,D = \frac{2\,s}{A\,P\,\text{sen.}\,(A - P\,A\,M)}$$

Si el punto está dado por sus coordenadas polares $A\,P$ y PAM, se puede aplicar evidentemente la misma resolucion, sin tener que hacer de antemano el cálculo de esas cantidades.

Para obtener la segunda porcion s', calculemos la superficie del triángulo $A\,PB$, que tiene por expresion $A\,PB = \frac{1}{2}\,c\,y$. Si esta resultare igual á s' es claro que $P\,B$ seria la segunda linea divisoria; pero como en general no es así, tendrémos que añadirle ó restarle la diferencia, segun que $A\,P\,B$ sea menor ó mayor que s'. Para esto calculemos el ángulo PBA por la fórmula: tan. $P\,B\,M = \frac{y}{c - x}$, y tambien $P\,B = \frac{y}{\text{sen.}\,PBM}$; entónces podrémos establecer la ecuacion:

Para la construccion grafica, tirando las perpendiculares CD, se puede averiguar las superficies de los Δ ADC y BDC; despues viendo la relacion de estos nuevos triangulos con las superficies de las fracciones en que se queria dividir el primero, se dividen los lados AC, BC como en el problema anterior. La relacion entre la superficie del Δ total, y cada uno de los ADC, BDC, tambien

$2(s'-APB)=PB\times BE$ sen. $(B-PBM)$, de la que se obtiene: $BE=\frac{2(s'-APB)}{PB \text{ sen.}(B-PBM)}$. Si s' fuese menor que APB, seria preciso restar de esta última superficie la del triángulo PBE', determinando la distancia BE' por la ecuacion $BE'=\frac{2(APB-s')}{PB \text{ sen. } PBM}$.

Para la tercera y siguientes fracciones se procederá de una manera análoga partiendo de D ó de E, lo cual dá lugar á la misma resolucion que se aplica en el caso que voy á indicar.

Supongamos que ademas de partir de P se imponga á la primera linea divisoria la condicion de pasar por E dado sobre el lado a. Entónces á la superficie del triángulo CPE cuya expresion es.. ..... $\frac{1}{2}PE\times EC$ sen. PEC, será preciso sumarle ó restarle lo necesario para que resulte una area $EPDC$ igual á la primera porcion s, y para determinar el punto D se resolverá el triángulo CPE, en el que se conocen dos lados PE y EC, así como el ángulo comprendido, para hallar CP y el ángulo PCE. Hecho esto se tendrá como antes; $CD=\frac{2(s-CPE)}{CP \text{ sen.}(C-ECP)}$. Es claro que si s fuese menor que CPE se fijaria el punto D' entre E y C por el cálculo de la ecuacion: $CD'=\frac{2(CPE-s)}{CP \text{ sen. } ECP}$.

Prob. 5º—*Dividir un triángulo desde un punto* P (fig. 155ª) *dado sobre uno de los lados.* Este puede considerarse como un caso particular del anterior, pues la posicion del punto dado envuelve la condicion $y=0$, lo que reduce el cálculo al de la fórmula:.......... $AD=\frac{2s}{x \text{ sen. } A}$. De igual manera se determinarán las distancias AF y BE, sustituyendo en el primer caso por s las superficies de las dos primeras porciones; y en el segundo la de otra de las partes, y haciendo uso de $(c-x)$ sen. B en el denominador.

Este problema se presta á una resolucion gráfica muy sencilla, que consiste en dividir el lado a del triángulo en partes AL, LM, MN, NB proporcionales á las fracciones de superficie que se desean obtener, y en trazar por los puntos de division paralelas á la linea CP, las cuales determinan los puntos D, F, E que unidos con P resuelven la cuestion, en virtud de la equivalencia de los triángulos comprendidos entre lineas paralelas.*

DIVISION DEL CUADRILÁTERO.

215º Prob. 1º—*Dividir un cuadrilátero por medio de rectas que partan de uno de sus vértices.* Siendo D (fig. 156ª) el vértice desde

*Considerando á PC como la base comun de todos los triángulos APC, DPC, FPC, EPC, BPC, tenemos sup. APC : sup. DPC : sup FPC : sup. EPC : sup BPC :: Ph : Ph' : Ph'' : Ph''' : Ph'''' :: AL : LM : MP : PN : NB donde han de partir las lineas divisorias, se determinará el punto E por la fórmula: $A\,E = \frac{2\,s}{A\,D \text{ sen. } A}$. En seguida se calcula $D\,E$ y el ángulo $A\,E\,D$ con el fin de ver si el triángulo $D\,E\,B$ tiene mas ó ménos superficie que la segunda porcion s', y para esto se tiene: $D\,E\,B = \frac{1}{2}\,D\,E \times (A\,B - A\,E) \text{ sen. } D\,E\,B$. Suponiendo que sea preciso agregarle la del triángulo $D\,B\,F$, se calcula como ántes $D\,B$ y el ángulo $D\,B\,E$, y en seguida se obtendrá: $B\,F = \frac{2\,(s' - D\,E\,B)}{B\,D \text{ sen. } D\,B\,F}$.

Prob. 2º—*Dividir un cuadrilátero por medio de lineas paralelas á uno de sus lados* A B (fig. 157ª). Suponiendo prolongados los lados opuestos ~~adyacentes~~ $A\,D$ y $B\,C$ hasta que se encuentren en O, podrémos considerar á la superficie S del cuadrilátero como la diferencia de los dos triángulos $A\,B\,O = S'$ y $D\,C\,O = S''$. Haciendo para abreviar $A\,B = m$ y $C\,D = n$, las expresiones de esas superficies son:

$$S' = \frac{1}{2}\,m^2\,\frac{\text{sen. } A \text{ sen. } B}{\text{sen. } (A + B)} \; * \qquad S'' = \frac{1}{2}\,n^2\,\frac{\text{sen. } C \text{ sen. } D}{-\text{ sen. } (C + D)}$$

Si designamos ahora por s la primera parte $A\,B\,N\,M$, tendrémos que los triángulos semejantes $A\,B\,O$ y $M\,N\,O$ abrazarán respectivamente las superficies S' y $S' - s$, y resultará como en el 2º problema de la division de los triángulos:

$$O\,M = O\,A\,\sqrt{\frac{S' - s}{S'}}$$

y como ademas se tiene $A\,M = A\,O - M\,O$, sustituyendo el valor de $A\,O$ se obtendrá finalmente:

$$A\,M = \frac{m \text{ sen. } B}{\text{sen. } (A + B)} - \frac{m \text{ sen. } B}{\text{sen. } (A + B)}\sqrt{\frac{S' - s}{S'}}$$

De la misma manera se calcula $B\,N$, introduciendo en el numerador de esta fórmula el ángulo A en lugar de B. Se ve que no es necesario el cálculo de S''.

Cuando son varias las fracciones, es conveniente calcular $M\,N = x$, á fin de proceder con x en la segunda porcion $M\,N\,P\,Q$ lo mismo que se ha hecho con m en la primera, habiendo las ventajas de que ya no es necesario calcular la superficie del triángulo $M\,N\,O$, puesto que es evidente que tiene $S' - s$ por valor y de que los ángulos M y N son respectivamente iguales á A y B. Para determinar á x

$*$ sup. $B\,O\,A = S' = (\frac{1}{2}\,O\,B \times O\,A \text{ sen } O) = \frac{1}{2}\,O\,B \times O\,A \text{ sen } (A + B)$

$\text{sen } O = \text{sen } (A+B) : \text{sen } A :: A\,B = m : O\,B = \frac{m \text{ sen } A}{\text{sen } (A+B)}$

$\text{sen } O = \text{sen } (A+B) : \text{sen } B :: A\,B = m : O\,A = \frac{m \text{ sen } B}{\text{sen } (A+B)}$

$S' = \frac{1}{2}\,m^2\,\frac{\text{sen } A \text{ sen } B}{\text{sen } (A+B)}$

harémos uso de la fórmula $2\,s = (m + x)\,y$ que representa la superficie de la primera fraccion $A\,B\,N\,M$, siendo y la altura del trapecio. La altura será $y = A\,M$ sen. A, que sustituida en la ecuacion anterior, produce:

$$x = \frac{2\,s}{A\,M\ \text{sen.}\ A} - m$$

Debe tenerse presente que cuando $A + B > 180°$, el sen. $(A + B)$ es negativo, y entónces la superficie S' tendrá el mismo signo. La interpretacion de este resultado se comprende con la simple inspeccion de la figura, pues con tal valor de $A + B$, los lados $A\,D$ y $B\,C$ serán convergentes hácia un punto de posicion opuesta á la de O. Siendo S' negativa, la cantidad que está debajo del radical en el valor de $A\,M$ será: $\frac{-S' - s}{-S'} = \frac{S' + s}{S'}$. Para quitar toda duda, apliquemos las fórmulas á un ejemplo. Sea $m = 1500^{\text{m}}$; $A = 104°\ 43'$; $B = 110°\ 28'$; y supongamos que la primera porcion s es de una miriara. Se tendrá $A + B = 215°\ 11'$

0.5	9.6989700
m^2	6.3521826
sen. A	9.9855135
sen. B	9.9716820
	6.0083481
sen. $(A + B)$	9.7605692—
S'	6.2477789—

$S' =$	— 1769208
$s =$	1000000
$S' - s =$	— 2769208
m	3.176091
sen. B	9.971682
sen. $(A + B)$	9.760569—
	3.387204— .... — 2439. 0

$S' - s$	6.442356—
S'	6.247779—
	0.194577
$\sqrt{\ }$	0.097288
$\frac{m\ \text{sen.}\ B}{\text{sen.}\ (A+B)}$	3.387204—
	$\left\{\begin{array}{l} 3.484492— \\ + 3051^{\text{m}}.4 \end{array}\right.$
	— 2439. 0
$A\,M =$	$612^{\text{m}}.4$

Una vez obtenida la distancia $A\,M$, el cálculo de $M\,N = x$, es:

$2\,s$	6.301030		
$A\,M$	— 2.787035		
sen. A	— 9.985513		
		$m =$	$1500^{\text{m}}.0$
	3.528482		3376. 6
		$x =$	$1876^{\text{m}}.6$

Con los mismos valores de m y de s, si los ángulos hubieran sido $A = 75°\ 17'$ y $B = 69°\ 32'$ que por ser suplementarios de los anteriores, tienen los mismos senos, habria resultado $A\,M = 830^{\text{m}}.8$, y $x = 989^{\text{m}}.0$. Convendrá que el lector haga el cálculo con estos da-

Igualmte $S' = -\frac{1}{2} m^2 \tan B$

tos, para que vea la diferencia originada por el juego de los signos.

Prob. 3º—*Dividir un cuadrilátero por medio de rectas perpendiculares á uno de sus lados.* Sea s la primera porcion, y designando por n el lado $A\,D$ (fig. 158ª), el triángulo $A\,D\,E$ tendrá una superficie $e = \frac{1}{2}\,n \times D\,E$ cos. A; pero como $D\,E = n$ sen. A, resulta sustituyendo $e = \frac{1}{2}\,n^2$ sen. A cos. $A = \frac{1}{4}\,n^2$ sen. $2\,A$. Entónces la superficie del trapecio $D\,E\,M\,N$ será $s - e$, y podrá procederse como en el caso anterior para determinar las distancias $D\,N$ y $E\,M$. Atendiendo á que es recto el ángulo E, y designando por B el ángulo $E\,D\,N$, las fórmulas son:

$$m = D\,E = n \text{ sen. } A;\quad S' = \tfrac{1}{2} m^2 \text{ tan. } B;\quad D\,N = \frac{m}{\text{cos. } B} - \frac{m}{\text{cos. } B}\sqrt{\frac{S' - (s - e)}{S'}}\,;\quad E\,M = D\,N \text{ sen. } B$$

$2(s-e) = (m + MN)\,EM = (m + DN)$ sen B de donde se obtiene MN

Tambien se tiene: $M\,N = \frac{2\,(s - e)}{D\,N \text{ sen. } B} - m$, distancia que usada en lugar de m, permite proseguir el cálculo de las demas fracciones.

Prob. 4º—*Dividir un cuadrilátero desde un punto dado en su interior.* La marcha que debe seguirse es del todo semejante á la que indicamos al resolver el cuarto problema relativo á la division del triángulo. Siendo x, y las coordenadas del punto P (fig, 159ª), referidas á la linea $A\,B$ como eje, se elegirá arbitrariamente la primera linea divisoria $P\,M$, y se tendrá:

$$\text{tan. } P\,M\,B = \frac{y}{x - A\,M} \qquad P\,M = \frac{y}{\text{sen. } P\,M\,B}$$

En seguida se calcula el contenido del triángulo $P\,M\,A$ por la fórmula: $e = \frac{1}{2}\,A\,M \times P\,M \times$ sen. $P\,M\,A$, y solo se tratará de determinar el punto N de tal manera que la superficie del triángulo $P\,A\,N$ sea igual á $s - e$, para lo cual se tiene:

$$\text{tan. } P\,A\,M = \frac{y}{x} \qquad P\,A = \frac{y}{\text{sen. } P\,A\,M} \qquad A\,N = \frac{2\,(s - e)}{P\,A \text{ sen. } P\,A\,N}$$

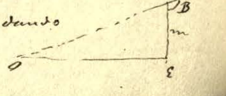
y se prosigue del mismo modo en el resto de la figura con los elementos del polígono y los valores de las demas fracciones.

Prob. 5º *Dividir un cuadrilátero desde un punto dado en su perímetro.* Tambien este problema se resuelve de una manera semejante al que se refiere al triángulo y no difiere del anterior mas que en

* Hemos visto en el Prob 2º que la superficie de un triángulo es igual á la mitad del cuadrado de un lado multiplicado por el producto de los senos de los angulos adyacentes, dividido por el seno de la suma de los mismos angulos

Sup. $DEO = S' = \frac{1}{2} m^2 \frac{\text{sen } E \text{ sen } D}{\text{sen } (E + D)}$; desarrollando y recordando que $E = 90°$ y sen D = sen NDE = sen B y cos D = cos B

$S' = \frac{1}{2} m^2 \frac{\text{sen } B}{\text{cos } B} = \frac{1}{2} m^2 \tan B$ $\qquad S' = -\frac{1}{2} m^2 \tan B$



que $y = 0$. Para no incurrir en repeticiones inútiles, escribiré únicamente las fórmulas aplicadas á la fig. 160ª

$$AM = \frac{2s}{AP\,\text{sen.}\,A} \qquad \text{tan.}\,AMP = \frac{AP\,\text{sen.}\,A}{AM - AP\cos.\,A} \qquad PM = \frac{AP\,\text{sen.}\,A}{\text{sen.}\,AMP}$$

$$e = \tfrac{1}{2}(AD - AM)\,PM\,\text{sen.}\,PMD$$

y en el lado $D\,C$ tendrá que situarse el punto N, de tal manera que el triángulo $D\,P\,N$ tenga $s' - e$ por superficie, siendo s' el valor de la segunda fraccion.

Debe notarse que el método que se ha seguido en los últimos problemas puede hacerse general para cualquiera figura, sea cual fuere el número de sus lados, como se verá en el Capítulo siguiente; y conviene advertir desde ahora la necesidad de comprobar los cálculos para cerciorarse de que no ha habido equivocacion en ellos. Despues de determinar la última linea divisoria tal como $P\,Q$ (fig. 160ª), la mejor comprobacion consistirá en calcular la area del triángulo $P\,B\,Q$ que deberá resultar igual á la última fraccion de superficie, ó por lo ménos no deberá diferir de esta mas que la pequeña cantidad que puede provenir de los errores inevitables de la aproximacion numérica.

caso gral que hay que reducir y [illegible] al polígono

CAPITULO II.

DIVISION DE UN POLIGONO CUALQUIERA.

216º Cuando se tiene que dividir en dos ó mas partes una superficie terminada por un contorno irregular de muchos lados, como el de la fig. 161ª, puede reducirse el problema en último resultado á la division de una figura elemental. Supongamos conocidas las coordenadas rectangulares de todos los vértices, y sea ademas s la superficie de la primera de las fracciones. Imaginémonos ahora trazada la linea $B\,G$ entre dos vértices elegidos de manera que por una estimacion aproximativa se juzgue que la supeficie $B\,A\,H\,G$ no difiere mucho de s, y por el método de la pág. 335 calculemos exactamente el contenido de $B\ A\ H\ G$, que designaré por a. Es claro que entónces $s - a$ representará la correccion que debe sufrir la area a; luego no quedará que hacer otra cosa mas que tomar del triángulo $G\ B\ F$ una parte $G\ B\ P$ igual á $s - a$, ó bien del cuadrilátero $G\ B\ C\ F$ una porcion $G\ B\ N\ M$ del mismo contenido.

Lo mismo se haria si las lineas divisorias tuvieran que sujetarse á partir desde un punto dado, ya fuese en el interior ó en el perímetro de la figura, pues con las coordenadas de ese punto y las de uno ó dos vértices del polígono se cerraria otro contorno cuya area a podria calcularse por el mismo procedimiento para aplicarle en seguida la correccion $s - a$ tomándola de una figura elemental que tuviese uno de sus vértices en el punto dado. Tomemos por ejemplo el polígono representado en la fig. 162ª cuyas coordenadas son las siguientes:

VÉRTICES.	x	y
A	+ 3788ᵐ7	+ 3730ᵐ0
B	+ 3938. 0	— 620. 0
C	0. 0	0. 0
D	+ 35. 4	+ 1526. 5
E	+ 622. 8	+ 1515. 8
F	+ 653. 6	+ 2935. 2

En la pág. 335 vimos que la superficie de este polígono es....... $S = 12^{M}89$, y supongamos que se quisiera dividir desde el punto P cuya distancia á A es de 500^{m}, poniendo el problema en estos términos: *se desea demarcar una area tal que pueda contener 10 millones de plantas de maiz sembradas con una equidistancia de 0ᵐ8.* Lo primero que debe hacerse es calcular la superficie necesaria s, y para esto, designando por e la equidistancia de las plantas y por n su número, se tendrá: $s = n\ e^2$.(*) En nuestro caso resulta................. $s = 0^{m}64 \times 10000000 = 6^{M}4$

Calculemos ahora las coordenadas del punto dado, para lo cual hallarémos por el método de la pag. 176 que el azimut del lado $A\ B$ es $u = 178°\ 2'$, y que en consecuencia las diferencias de coordenadas

(*) Cuando se conoce la extension de un campo cultivado y la equidistancia de las plantas, podrá calcularse con bastante aproximacion su número por la ecuacion $n = \frac{s}{e^2}$. El conocimiento de n puede ser muy útil en las valuaciones para formarse una idea del producto de la siembra.

entre A y P son: d $x=17^m2$; d $y=-499^m7$ por lo que las coordenadas de este último punto serán: $x=+3805^m9$ $y=+3230^m3$. Segun esto, suponiendo trazada la recta $P\,C$, veamos si la area $P\,B\,C$ es mayor ó menor que s. Para calcularla por la fórmula de la pág. 335, tendrémos:

VÉRTICES.	x	y
P	$+3805^m9$	$+3230^m3$
B	$+3938.0$	-620.0
C	0.0	0.0

Con estos datos se obtiene $a=7^M539712$; y como $s=6^M4$, la correccion que debe hacerse á la superficie $P\,B\,C$ será:................ $s-a=-1^M139712$, que por resultar negativa indica que el otro extremo de la linea divisoria deberá tener una posicion tal como Q, entre B y C. Con el fin de determinarlo exactamente calculemos la distancia $C\,P$ y el azimut de esa linea, así como el de $C\,B$, lo que no ofrece dificultad alguna puesto que se conocen las coordenadas de los puntos P, B y C. Ejecutando el cálculo se halla: $C\,P=4992^m$; az. $C\,P=49°\ 40'\ 36''$; az. $C\,B=98°\ 56'\ 50''$. Entónces el ángulo C, diferencia de ambos azimutes, resulta de $49°\ 16'\ 14''$, y en consecuencia se tendrá:

$$C\,Q=\frac{2\,(s-a)}{C\,P\ \text{sen.}\ C}$$

2......	0.30103
$s-a$......	6.05680
$C\,P$......	—3.69827
sen. C......	—9.87955
$C\,Q=602^m6$......	2.78001

Luego que se ha señalado el punto Q, se podrá trazar en el terreno la linea $P\,Q$ que resuelve el problema. Para comprobar la operacion convendrá calcular las coordenadas de Q con ayuda de la distancia $C\,Q$ y el azimut de $C\,B$, y se encontrará para ese punto:............ $x=+595^m2$, $y=-93^m7$. Con este nuevo dato determinemos el contenido del triángulo $P\,B\,Q$.

VÉRTICES	x	y	Ord. medias.	Dif. de abs.	Productos.
P	$+3805^m9$	$+3230^m3$	$+1305^m1$	$+132^m1$	$+0^M172$
B	$+3938.0$	-620.0	-356.8	-3342.8	$+1.193$
Q	$+595.2$	-93.7	$+1568.3$	$+3210.7$	$+5.035$
				Superficie	$=6^M400$

Se ve que resulta efectivamente la area que se deseaba separar.

Este ejemplo que se ha desarrollado con todos sus pormenores, indica la marcha del todo semejante que debe seguirse en cualquiera otro caso, y manifiesta la gran ventaja de servirse de las coordenadas de los vértices de preferencia al cálculo puramente trigonométrico, que en general daria lugar á operaciones numéricas mas complicadas. Tambien con esos elementos se facilita el trazo mismo de la linea divisoria cuando sus extremos estén distantes ó no sean visibles uno de otro, pues entónces valiéndose de las coordenadas se tendrá la magnitud y la direccion de la linea, para hacer su demarcacion material en el terreno por el método de las páginas 176 y 177.

217º Una vez indicado el procedimiento general para efectuar la division de un polígono cualquiera, expondré brevemente los principales casos que pueden presentarse en la práctica, ademas de los que he mencionado.

Se ha trazado ya la marcha que debe seguirse cuando se trata de dividir un polígono desde un punto dado en su interior, y la misma se seguirá si ademas de esa condicion se prescribe que una de las lineas divisorias sea una recta tal como PM (fig. 163ª). Con las coordenadas de P, M, A, G y F se calcula la superficie a de ese polígono, y se procede como en el ejemplo anterior para situar el punto N ó el punto N', segun que la primera fraccion s sea mayor ó menor que a. Despues de calculadas las coordenadas de ese punto, y suponiendo que haya sido N, se determina la area a' de otro polígono $P\,N\,E\,D\,C$, para fijar el punto Q, de manera que $P\,N\,E\,D\,Q$ sea igual á la segunda porcion de superficie que se quiere demarcar.

Si se señalan dos lineas tales como $P\,Q$ y $Q\,R$ (fig. 164ª) que deban servir en parte de límite á las fracciones, se comenzará por adoptar otra linea $R\,B$ para calcular el contenido a del polígono $P\,Q\,R\,B\,A\,H\,G$, cuya diferencia con s permitirá la determinacion de la última recta $P\,M$, y se prosigue lo mismo que ántes. Cuando son curvas ó muy irregulares las lineas que se señalan como parte forzosa del linde (fig. 165ª), se establecerán alineamientos rectilineos $P\,Q\,R$ y se determinarán las areas $P\,a\,Q$, $Q\,b\,R$ comprendidas entre el límite dado y las lineas auxiliares, las que combinadas por suma ó resta, segun el caso, con la superficie del polígono $F\,P\,Q\,R\,A\,I\,H\,G$, darán por resultado la cantidad a, que debe compararse con s para fijar la última linea PM. Siendo curvilinea la parte dada $PaQbR$ como sucederia si el límite fuese un camino, la orilla de un rio, &c., se determinarán las areas PaQ y QbR por alguna de las fórmulas de las páginas 316 y siguientes.

Suele presentarse el caso de tener que dividir un polígono por medio de lineas que formen cierto ángulo con uno de los lados, ó en general que tengan una direccion determinada. Para efectuar el fraccionamiento con esa condicion, puede suponerse trazada por uno de los vértices A (fig. 166ª) una recta AL en la direccion dada, y determinarse por consiguiente el ángulo que forma con el eje de las ordenadas á que esté referido el polígono. Con ese ángulo y las coordenadas del punto A se conocerá la ecuacion de la linea auxiliar AL, y como tambien se conocen las coordenadas de los puntos E y F, se tendrá igualmente la ecuacion del lado EF, y en consecuencia se podrán determinar las coordenadas de su punto de interseccion L por medio de las fórmulas (1) y (2) de las páginas 172 y 173. Una vez obtenida la posicion de L se calcula la superficie a del polígono $AHGFL$ con el fin de determinar los puntos M y N del trapecio $MNLA = s - a$, lo cual se hará como se ha indicado en el segundo problema relativo á la division de un cuadrilátero en el Capítulo anterior, que es el mismo procedimiento de que voy á ocuparme.

218º Cuando se trata de fraccionar un polígono por medio de lineas paralelas á uno de sus lados, ó bien cuando se quieren separar de él porciones de determinadas superficies en forma de zonas paralelas, es preciso calcular las alturas de los trapecios que deben formarse, ó mejor aún, las distancias Ap ó Bq (fig. 167ª) que fijan la posicion de la linea divisoria. Para conseguirlo comencemos por expresar la superficie de un trapecio $ABFG$ en funcion de dos lados $AG = a$, $AB = b$ y dos ángulos $GAB = A$, y $ABF = B$. Llamando z la distancia incógnita BF, una de las fórmulas de la página 323 dá:

$$S = \tfrac{1}{2}\, ab \text{ sen. } A + \tfrac{1}{2}\, bz \text{ sen. } B - \tfrac{1}{2}\, az \text{ sen. } (A + B)$$

Con el fin de eliminar á z formemos una nueva ecuacion de los dos valores de la altura y del trapecio, que son $Gg = Ff$, y obtendrémos:

$$a \text{ sen. } A = z \text{ sen. } B$$

Sustituyendo el valor de z en la fórmula precedente y reduciendo, resulta:

$$S = a b \text{ sen. } A - \tfrac{1}{2} a^2 \frac{\text{sen. } A \text{ sen. } (A + B)}{\text{sen. } B} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

Esta expresion suministrará la superficie del trapecio en funcion de dos ángulos y de dos lados. Sea ahora s el contenido de la primera fraccion $p\ A\ B\ q$: si designamos por u la distancia incógnita $A\ p$, podrá determinarse por medio de la ecuacion anterior que vendrá á ser:

$$s = b u \text{ sen. } A - \tfrac{1}{2} u^2 \frac{\text{sen. } A \text{ sen.} (A + B)}{\text{sen. } B}$$

y de la cual se deduce:

$$u = \frac{b \text{ sen. } B}{\text{sen. } (A + B)} \pm \frac{b \text{ sen. } B}{\text{sen. } (A + B)} \sqrt{1 - \frac{2 s \text{ sen. } (A + B)}{b^2 \text{ sen. } A \text{ sen. } B}} \dots (2)$$

Representando por S' la superficie del triángulo formado por $A B$ y la prolongacion de los lados $A\ G$ y $B\ C$, se infiere que el binomio contenido en el radical equivale á $1 - \frac{s}{S'}$, que fué la forma adoptada en el Capítulo precedente. El valor de u será real siempre que $A + B$ sea mayor que 180°; pero en el caso contrario solo es real cuando $S' > s$. El hecho de que u resulta imaginario cuando se reunan las dos circunstancias de ser $A + B < 180°$ y $S' < s$, no indica, sin embargo, que el problema sea irresoluble; sino únicamente que la distancia u no podrá tomarse en la direccion de $A\ G$; pero si se calcula el trapecio $A\ G\ F\ B$ por la ecuacion (1), su area restada de s dará la superficie que falta para completar la primera fraccion, que podrá tomarse formando otro trapecio $G\ F\ q'\ p'$. Por una razon análoga, el hecho de que u sea real siempre que $A + B > 180°$ no quiere decir que en todos casos deba quedar el punto p entre A y G, pues la figura 168ª indica que si s es mayor que el contenido del trapecio $A\ B\ F\ G$, deberá tomarse el exceso en el lado siguiente formando otro trapecio $F\ G\ p'\ q'$.

En uno y en otro caso puede evitarse el cálculo del radical de la fórmula (2) introduciendo un ángulo subsidiario que facilita el cálculo logarítmico. Cuando $A + B < 180°$, y ademas $S' > s$, la relacion $\frac{s}{S'}$ es positiva y menor que la unidad, por lo cual puede suponerse igual al cuadrado de un *seno* ó de un *coseno*. Si $A + B > 180°$, sean cuales fueren los valores relativos de s y S', la relacion $\frac{s}{S'}$ podrá igualarse al cuadrado de una *tangente* ó de una *cotangente*. En ambos casos se simplificará el cálculo de la fórmula, que puede disponerse de este modo, adoptando el valor positivo de u:

PRIMER CASO............ $A + B < 180°$	SEGUNDO CASO............ $A + B > 180°$
$c = \dfrac{b \text{ sen. } B}{\text{sen. } (A + B)}$	$c = \dfrac{b \text{ sen. } B}{\text{sen. } (A + B)}$
$\text{sen. } m = \sqrt{\dfrac{2\,s}{b\,c \text{ sen. } A}}$	$\text{tan. } n = \sqrt{\dfrac{-2\,s}{b\,c \text{ sen. } A}}$
$u = c - c \cos. m = 2\,c \text{ sen.}^2 \tfrac{1}{2} m$	$u = c - \dfrac{c}{\cos. n} = - c \text{ tan. } n \text{ tan. } \tfrac{1}{2} n$

Ejemplo.—Supongamos que de un polígono (fig. 168ª) en que el lado $b = 804^m7$ y los ángulos adyacentes son $A = 127° \; 16'$,......... $B = 154° \; 24'$, se quiera separar una area s de 25 hectaras.

b......	2.90563				
sen. B......	9.63557	$-2s$......	5.69897—		
		b......	—2.90563		
	2.54120	c......	—2.55027—		
sen. $(A + B)$......	—9.99093—	sen. A......	—9.90082		
c......	2.55027—	tan.² n......	0.34225	$c =$	-355^m0
cos. n......	9.74749				
		tan. n......	0.17112	$-\dfrac{c}{\cos. n} =$	$+635.0$
$\dfrac{c}{\cos. n}$......	2.80278—		$n = 56° \; 00' \; 24''$	$u =$	280^m0

Si con el mismo valor de b, los ángulos fueran $A = 52° \; 44'$ y $B = 25° \; 36'$, el de u resultaria imaginario, porque la superficie s es mayor que la del triángulo que tiene b por base y A y B por ángulos adyacentes. Este resultado indicaria que no es posible separar la area s de la primera parte $G\,A\,B\,F$ (fig. 167ª) del polígono, y que será preciso calcular primero el contenido S del trapecio $G\,A\,B\,F$ para tomar despues $s - S$ en un nuevo trapecio que tenga $G\,F$ por base. Supongamos que $A\,G = a$ es de 317^m5, y con los datos anteriores tendrémos por la ecuacion (1):

a	2.50174....................................		2.50174
sen. A.........	9.90082	*0.5*.........	9.69897
	2.40256....................................		2.40256
b.........	2.90563	sen. $(A + B)$.........	9.99093
	5.30819		4.59420
		sen. B.........	9.63557
	203325		
	— 90914....................................		4.95863
	$S = 112411$		

\# Siendo (A+B) < 180 ... 5 ... al ... no puede provenir ... sen (A+B) ...

$1 + \tan^2 = \sec^2 = \frac{1}{\cos}$

$\frac{1-\cos A}{\cos A} = \frac{\text{sen} A}{\cot \frac{1}{2} A} \cdot \frac{1}{\cos A} = \tan A \tan \frac{1}{2} A$

$\text{sen} \frac{1}{2} A =$

$\cos A = 1 - 2 \text{sen}^2 \frac{1}{2} A \qquad 1 - \cos A = 2 \text{sen}^2 \frac{1}{2} A$

$\frac{1-\cos A}{\text{sen} A} = \frac{2 \text{sen}^2 \frac{1}{2} A}{2 \text{sen} \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A} = \tan \frac{1}{2} A \qquad 1 - \cos A = \frac{\text{sen} A}{\cot \frac{1}{2} A}$

Lo que falta á este resultado para ser igual á 25 hectaras es....... $13^{H}7589$, que es lo que debe tomarse formando el nuevo trapecio $F\,G\,p'\,q'$; pero ántes es preciso calcular la base $F\,G$ por la ecuacion:

$$b' = F\,G = \frac{2\,S}{a\ \text{sen.}\ A} - b$$

De este modo se obtiene $b' = 85^{m}1$, y si designamos por G el ángulo interior $A\,G\,E$ y por A' el ángulo $F\,G\,E$, se tendrá:......... $A' = A + G - 180°$. Los datos para calcular $G\,p'$ serán, pues: b', A', B y $s' = 13^{H}7589$, con los cuales se aplica la que convenga de las fórmulas precedentes segun sea el valor de $A' + B$.

Aunque los puntos p ó p' determinan completamente el trapecio, puesto que una vez demarcados en el terreno pueden trazarse las paralelas al lado $A\,B$, es preferible calcular las distancias $B\,q$ ó $B\,q'$, lo que se hace por las mismas fórmulas introduciendo el ángulo A en lugar de B.

219º—En la práctica de la agrimensura muchas veces se ofrece regularizar parte de un lindero $A\,a\,b\,c\,B$ (fig. 169ª) que es demasiado sinuoso remplazándolo por otro que tenga pocas lineas y que abrace por supuesto la misma superficie. Para resolver este problema se traza una recta $A\,B$ entre los extremos del contorno irregular, y se determina la superficie s comprendida entre él y esa recta, lo cual es conveniente hacer tomando la linea $A\,B$ por eje y refiriendo á ella por medio de coordenadas rectangulares el alineamiento curvilíneo, para aplicar el método de cálculo ó fórmula de Simpson (página 318). Con este dato, la magnitud de $A\,B = b$ y los ángulos que forma con los lados adyacentes del polígono, es fácil determinar una figura sencilla que contenga la misma area s, y trazarla en el terreno. Si se adopta un triángulo, su altura será: $y = \frac{2\,s}{b}$, quedando el ingeniero en libertad para situar el vértice opuesto á AB en el punto que le parezca mejor, con tal que sea sobre una paralela á $A\,B$ trazada á la distancia y de esa linea. Puede tambien adoptarse un rectángulo $A\,m\,n\,B$, cuya altura $A\,m$ ó $B\,n$ será: $y = \frac{s}{b}$, ó bien un paralelógramo cualquiera de la misma altura. Finalmente, se puede trazar un trapecio $A\,p\,q\,B$ cuyos lados $A\,p$ y $B\,q$ se cuenten en las prolongaciones de los lados poligonales adyacentes á $A\,B$, calculándose esas distancias por el método expuesto en el párrafo precedente.

CAPITULO III.

DIVISION DE TERRENOS QUE CONTIENEN PORCIONES DE DIVERSOS VALORES.

220º Todo lo que se ha dicho hasta ahora supone que tienen el mismo valor las tierras en la totalidad de la extension que se trata de fraccionar, y en ese supuesto se determinaron al principio del Capítulo I las superficies de las diversas fracciones de acuerdo con la relacion que se les hubiera asignado; pero lo mas general es que aun en la misma propiedad agrícola tenga diverso precio la unidad agraria, ya sea por la naturaleza de los mismos terrenos, ya por la superioridad del cultivo, del riego &c., y por tanto pasaré ahora á examinar el caso en que la superficie que tiene que dividirse comprenda porciones de distintos valores.

Siendo S_1, S_2,.....S_q las areas de esas partes, y M_1, M_2,..... M_q los precios correspondientes de la unidad de superficie, es evidente que sus valores venales serán $S_1 M_1$, $S_2 M_2$,...... $S_q M_q$, y el de toda la propiedad

$$V = S_1 M_1 + S_2 M_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots S_q M_q$$

En consecuencia, si el fraccionamiento tiene que hacerse en n partes que guarden entre sí las mismas relaciones que los números m_1, m_2,. ..... m_n, debe entenderse que la determinacion de esas partes se refiere al valor venal y no á la extension de superficie que pueda abrazar cada una. Designando por v_1, v_2...... v_n estos valores, se tendrá:

$$v_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + \ldots\ldots m_n} V$$

$$v_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2 + \ldots\ldots m_n} V$$

....

....

$$v_n = \frac{m_n}{m_1 + m_2 + \ldots\ldots m_n} V$$

y entónces la comparacion de estas cantidades con los valores de cada especie de terreno dará á conocer la superficie que en último resultado habrá que tomar de alguno ó algunos de ellos.

Antes de indicar el método general que debe seguirse para determinar la cantidad de superficie que ha de comprender cada parte, hagamos notar que la resolucion del problema puede reducirse al de la division de los terrenos de igual valor. En la figura 170ª supongamos que las lineas *a b c* y *d e f g* sean los límites que separan las tierras de tres calidades y precios diferentes. Es claro que cada una de las tres areas S_1, S_2 y S_3 que les corresponden puede dividirse en la relacion asignada, siguiendo cualquiera de los procedimientos del Capítulo anterior, y entónces las dos ó mas partes en que se haya dividido toda la propiedad contendrán terrenos de las tres clases, y tanto sus extensiones como sus valores resultarán en la proporcion que se haya prescrito al ingeniero. Se ha supuesto en la figura que $M N$ es la linea divisoria de la primera superficie S_1, $N P$ la de la segunda S_2 y $P Q$ la de la tercera, pues hemos visto que siempre es posible hacer la division desde puntos dados en el perímetro de cada polígono, como serian en este caso M, N y P. El límite total $M N P Q$ seria generalmente el mas sencilio; pero nada impediria elegir de antemano un punto en cada contorno de las superficies de diversa clase, y trazar desde él la linea divisoria que le correspondiese. Así, por ejemplo, si los puntos dados fuesen M en la primera, *e* en la segunda y *b* en la tercera, se trazaria la linea $M N$, y en lugar de hacer desde N la division de la segunda superficie, se haria desde *e*, siendo entónces $N e$ una parte del límite entre las dos.

221º Este modo de efectuar el fraccionamiento tiene en mi opinion la ventaja de dejar mas completas, en cuanto á calidad de terrenos, las pequeñas propiedades en que se divide la total, y por este motivo acaso sea el mas conveniente para distribuir una propiedad entre personas que desean dedicarse á la explotacion agrícola de sus tierras; pero es evidente que puede adoptarse otro sistema que dé el mismo resultado en cuanto al valor venal de las diversas fracciones, y es el que paso á considerar. Luego que se han determinado los valores v_1, v_2, &c., de cada una de las partes, y los totales de las diferentes clases de tierras, se comparan unos con otros para establecer las compensaciones que sean necesarias: Si v_1, por ejemplo, es menor que el valor M_1 S_1 de la primera superficie, será necesario quitar de esta última cierta extension x deducida de la ecuacion: $(S_1 - x)\ M_1 = v_1$, de la que resulta:

$$x = \frac{M_1\ S_1 - v_1}{M_1}.$$

Si por el contrario, v_1 es mas de lo que vale la primera superficie, será preciso tomar cierta cantidad de la segunda, el precio de cuya unidad es M_2, estableciendo al efecto la ecuacion: .... $M_1\ S_1 + M_2\ x = v_1$, de la cual se obtiene:

$$x = \frac{v_1 - M_1\ S_1}{M_2}$$

De una manera análoga se procede respecto de las otras partes atendiendo al residuo de las superficies despues de la separacion de x; pues, por ejemplo, en este último caso el valor de la segunda superficie quedará reducida á $M_2\ (S_2 - x)$. Es claro que x resulta expresada en las unidades agrarias á las cuales se refieren los precios M_1, M_2, &c., y que una vez obtenida esa extension, se separará por medio de una ó mas lineas divisorias aplicando cualquiera de los métodos que constan en el Capítulo precedente.

Ejemplo.—Supongamos que una propiedad que contenga 25 sitios de á \$10000 cada uno, 11 sitios de á 12000 y 7 de á 15000, se debe dividir entre cinco herederos cuyas acciones están representadas por los números *2*, *3*, *5*, *6* y *7*.

Los valores de los diversos terrenos serán:

Los 25 sitios	$M_1\ S_1$	= \$250000
Los 11 ,,	$M_2\ S_2$	= \$132000
Los 7 ,,	$M_3\ S_3$	= \$105000
Valor de toda la propiedad	V	= \$487000

De aquí se deduce que las acciones de los herederos tendrán los siguientes valores:

La del primero	v_1	= \$ 42347.90
La del segundo	v_2	= \$ 63521.70
La del tercero	v_3	= \$105869.50
La del cuarto	v_4	= \$127043.50
La del quinto	v_5	= \$148217.40
	V	= \$487000.00

Como el valor de S_1 es superior al que corresponde á las tres primeras acciones, tendrémos:

Para el primer heredero	$M_1\,x_1 = 42347.9$,	de donde resulta:	$x_1 = 4.23479$ sitios.
Para el segundo.........	$M_1\,x_2 = 63521.7$,	,,	$x_2 = 6.35217$,,
Para el tercero.........	$M_1\,x_3 = 105869.5$,	,,	$x_3 = 10.58695$,,

De los 25 sitios quedan, pues, 3.82609 cuyo valor es de \$38260.90; y así para completar la parte del cuarto heredero tomarémos de la segunda superficie cierta cantidad y, determinada por la ecuacion: $38260.9 + M_2\,y = 127043.5$, de la que se obtiene:

y	$=$ 7.39855 sitios.
Quedaban de la primera..........	3.82609 ,,
x_4	$=$ 11.22464 sitios.

Habiendo quitado y sitios de los 11 que contiene la segunda superficie, quedan para el último heredero 3.60145, cuyo valor es de \$43217.4, mas los 7 de la tercera superficie. Para comprobar los cálculos supongamos desconocida esta última parte, y tendrémos: $43217.4 + M_3\,z = 148217.4$, de donde resulta $z = 7$, lo que indica que no ha habido equivocacion.

Tambien se comprueban las operaciones por medio del siguiente resúmen de las superficies distribuidas:

	DE S_1	DE S_2	DE S_3	TOLAL.
Al primer heredero......	4.23479			4.23479
Al segundo ,, ...	6.35217			6.35217
Al tercero ,, ...	10.58695			10.58695
Al cuarto ,, ...	3.82609	7.39855		11.22464
Al quinto ,, ...		3.60145	7.00000	10.60145
Sumas..........	25.00000	11.00000	7.00000	43.00000

Por este método general se ve que en las fracciones que deben contener terrenos de una sola clase, se determinan sus extensiones dividiendo los valores de las acciones por los precios de la unidad de superficie; y que cuando una misma fraccion debe comprender tierras de dos calidades diferentes, se establece la compensacion atendiendo á los precios que les corresponden.

222º El mismo camino debe seguirse para distribuir en partes iguales el valor que representan dos ó mas terrenos de diversas clases, puesto que este no es mas que un caso particular del anterior. Siendo en efecto V el valor de toda la propiedad y n el número de fracciones iguales, el valor de cada una será $v = \frac{V}{n}$, y si suponemos que v es menor que el valor $M_1\ S_1$ de la primera superficie, tendrémos la ecuacion $M_1\ (S_1 - x) = \frac{V}{n}$, de la que resulta:

$$x = \frac{n.M_1\ S_1 - V}{n.M_1}$$

Entónces x representa la area que debe quitarse de S_1 para que el resto valga v. Podria tambien ponerse $M_1\ x = \frac{V}{n}$, como lo hicimos en el ejemplo, y en tal caso x representará la superficie que corresponde á la primera fraccion.

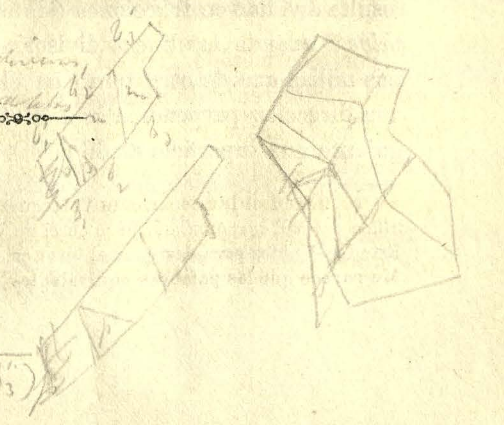
Si por el contrario v es mayor que $M_1\ S_1$, tomarémos cierta cantidad de la superficie S_2 poniendo la ecuacion: $M_1\ S_1 + M_2 x = \frac{V}{n}$, para obtener:

$$x = \frac{V - n.M_1\ S_1}{n.M_2}$$

siendo entónces $S_1 + x$ la extension que debe contener una de las fracciones. Lo mismo se hace para calcular cualquiera de las demas, y una vez obtenida la area x se separa por medio de los elementos conocidos del polígono, dándole la forma que se crea mas conveniente. En la figura 170ª se ha supuesto el primer caso admitiendo que $M d N e f g$ representa la superficie S_1, y se ve que la separacion de x se ha hecho por medio del triángulo $f g R$, calculando la distancia $g R$ por la ecuacion: $g R = \frac{2x}{fg\ \text{sen.} fgR}$. El segundo caso está indicado por la adicion de la superficie del cuadrilátero $f g\ T R'$ que supongo igual á x, calculándose de una manera análoga la distancia $T R'$ que la determina.

Div. de una superf. de diversos
valores por lineas paralelas
á uno de los lados

$s_1 = \frac{1}{2}(b_1+b_1')h_1'$ $s_2 = \frac{1}{2}(b_2+b_2')h_2$
$s_3 = \frac{1}{2}(b_3+b_3')h_3$



CAPITULO IV.

SISTEMA ADOPTADO EN LOS ESTADOS-UNIDOS PARA LA DIVISION DE LOS TERRENOS PUBLICOS.

223º Los procedimientos agrodésicos que se han descrito hasta aquí, si bien muy exactos y enteramente generales para cualquiera figura, suponen levantado su plano, determinados los elementos de su perímetro y calculada su superficie; pero esta serie de operáciones preliminares generalmente dilatadas y costosas, no son las mas convenientes cuando se trata de dividir terrenos de extension considerable y de escasos productos, como lo son casi siempre los baldíos ó terrenos de propiedad nacional. Por otra parte, los gobiernos necesitan muchas veces medir y fraccionar esos terrenos con el fin de tenerlos disponibles para su colonizacion ó su venta, y por tanto es de la mayor importancia servirse de métodos económicos en su ejecucion y suficientemente exactos en sus resultados. Probablemente ninguno reune esas ventajas en tan alto grado como el adoptado por el gobierno norteamericano, y del cual me propongo dar una idea por juzgarlo perfectamente aceptable en nuestro país haciéndole las ligeras modificaciones que demanda nuestro sistema de medidas.

El método americano consiste en dividir las tierras nacionales por medio de lineas dirigidas de Norte á Sur y de Oriente á Poniente, trazadas á distancias iguales en toda la extension del terreno, el cual resulta dividido en fracciones ó lotes que reciben el nombre de *townships* (*) cuando las lineas divisorias se establecen á la distancia de seis millas una de otra tanto en el sentido del meridiano como en una direccion perpendicular á él. Cada township tendria por consiguiente una superficie de 36 millas cuadradas si fueran paralelos los

(*) Segun el Diccionario de Velazquez de la Cadena, la palabra *township* significa *cabildo, ayuntamiento;* pero en el de Webster consta que esa voz se usa en los Estados-Unidos para designar el territorio comprendido dentro de ciertos límites. Me parece que las palabras equivalentes en castellano deberian ser *fundo* ó *lote.*

meridianos; pero á causa de su convergencia resulta su area un poco diferente.

Cuando en un territorio tiene que aplicarse ese sistema de division, se comienza por trazar astronómicamente y con toda precision uno ó mas meridianos para que sirvan de lineas de referencia, los cuales se llaman *meridianos principales*, y se procura que partan de algun lugar notable. Tambien se trazan paralelos de latitud que en una extension no muy considerable se confunden sensiblemente con las lineas perpendiculares al meridiano, y que se denominan *paralelos fundamentales*, *lineas de correccion* y tambien *bases*. Todas estas lineas se establecen á distancias de unas 30 millas unas de otras, valiéndose de procedimientos que por estar basados en operaciones astronómicas, no son de este lugar, y los espacios comprendidos entre ellas son los que se dividen en townships ó lotes, como lo indica la figura 171ª Las lineas *A B* y *C D* representan el meridiano y el paralelo principales á los que se refiere el fraccionamiento. Ambas lineas se dividen en espacios *O a*, *a b*...... *O c*, *c d*....... &c., de 6 millas cada uno, y marcan por consiguiente los puntos desde los cuales deben partir las lineas de los lotes. Al trazarlas y medirlas se anotan los puntos en que encuentran los detalles topográficos que deben figurar en el plano, como rios, límites de bosques, montañas, &c., y de este modo, por medio de una marcha inversa, al paso que se practica el fraccionamiento que es el objeto principal de la operacion, se logra tambien medir la superficie del terreno y levantar su plano con bastante aproximacion. Todos los lotes tales como *M*, *N*, *P*, *Q*, &c., que están unos al Norte de los otros, se dice que se encuentran en la misma zona, y para distinguirlos se numeran partiendo de la base tanto hácia al Norte como hácia el Sur; y así *M* será el primero al Norte, *R* el primero al Sur, *S* el segundo al Sur, &c. Las zonas se distinguen por su distancia al meridiano principal ya sea al Oriente ó al Occidente, y se dice primera, segunda, &c., zona al Este ó al Oeste. Segun esto, un lote cualquiera puede definirse por la zona en que se halla y por el número que en ella le corresponde; por ejemplo, el que en la figura está señalado con la letra *Q* será el cuarto al *N* de la tercera zona del Oeste, ó con una abreviatura semejante á la que usan los americanos, la posicion del lote *Q* será: 4° N. 3ª O. Por una razon análoga la posicion del lote *T* es: 2° S. 2ª E, la de *R*: 1° S. 3ª O, &c.

En los Estados-Unidos los lados de cada lote se dividen en 6 partes iguales con el fin de subdividir el lote mismo en 36 porciones llamadas *secciones*, cada una de las cuales resultará próximamente de una milla cuadrada. A veces las secciones se dividen tambien en cuatro partes, que se llaman *cuartos de seccion*, por medio de lineas trazadas desde las mitades de los lados de la seccion. La figura 172ª representa un lote dividido en secciones y el modo de numerarlas, que es comenzando desde su ángulo *N. E.* y contando hasta 6 de Oriente á Poniente, de 7 á 12 de Poniente á Oriente, de 13 á 18 de Oriente á Poniente, &c., siempre precediendo por zonas hácia el Sur hasta terminar en el ángulo *S E* del lote.

Antes de exponer algunos detalles respecto del modo de trazar las lineas divisorias de los lotes y de sus secciones, hagamos notar que el método americano podria adoptarse en nuestro pais arreglándolo al sistema decimal de nuestras medidas. El meridiano y la base principales convendria que se dividiesen en miriámetros, y entónces un miriámetro seria el lado de cada lote cuya superficie resultaria de 100 miriaras próximamente. Dividiendo sus lados en 5 partes se tendrian 25 secciones de unas cuatro miriaras cada una, las que á su vez se podrian subdividir en cuartos, que tendrian una miriara.

224º Indiquemos ahora el modo de trazar los lotes, y para mayor sencillez supongamos adoptado el sistema decimal como acaba de decirse. Admitamos ademas que astronómicamente se haya trazado ya el meridiano principal *A B* (fig. 171ª), la base *C D* y las lineas de correccion *E F* al Sur y *G H* al Norte, las que como *C D*, deben ser paralelos de latitud, y que tanto el meridiano como la base se hayan dividido en miriámetros. El método americano requiere que las lineas divisorias de las zonas sean tambien meridianos, y por consiguiente en virtud de la convergencia de estos, no podrán ser exactamente cuadrados los lotes ni tampoco tener la superficie que corresponderia á un cuadrado del mismo lado. Partiendo desde la base hácia el Norte, los lados septentrionales de los lotes resultarán siempre menores que los meridionales; y por el contrario los lotes colocados hácia el Sur de la base tendrán sus lados meridionales tanto mayores cuanto mayor sea su distancia á la misma base. De esta consideracion resulta que si los tres paralelos *C D*, *E F* y *G H* se dividen en miriámetros, las divisiones de los dos últimos, que se marcan en el terreno por medio de señales permanentes, podrán servir para indicar los puntos en que deben terminar las lineas de las zonas que se han trazado partiendo de *CD*. Basta para esto conocer el efecto de la convergencia de los meridianos comprendidos entre la base y los paralelos extremos *EF* y *GH*. Los paralelos de latitud, siendo círculos menores de la esfera, van decreciendo en extension desde el ecuador hácia ambos polos, y de aquí resulta que en nuestro hemisferio septentrional los paralelos situados al Norte de la base *CD* tendrán sus arcos de igual amplitud menores que los correspondientes á los paralelos que estén al Sur de la misma linea. La tabla siguiente manifiesta las extensiones de los arcos de un grado contados en paralelos de distintas latitudes, y que comprenden todas las de nuestro pais.

Latitud.	Extension.	Dif.	Latitud.	Extension.	Dif.	Latitud.	Extension.	Dif.
15°........	107538^m	516	21°........	103958^m	708	27°........	99243^m	893
16	107022	549	22	103250	740	28	98350	923
17	106473	580	23	102510	770	29	97427	952
18	105893	613	24	101740	802	30	96475	982
19	105280	645	25	100938	832	31	95493	1011
20	104635	677	26	100106	863	32	94482	1040
21........	103958		27........	99243		33........	93442	

En cuanto á la extension de 1° del meridiano, puede tomarse la de 110750^m, como constante en toda la República.

Supongamos ahora que el terreno que se quiere dividir en lotes segun el sistema americano fuese un baldío situado entre los 28 y 29 grados de latitud, y calculemos la cantidad que deben ir disminuyendo los lados septentrionales de los lotes. Desde luego entre esas latitudes cabrian próximamente 9.75 zonas de lotes en cada grado de paralelo, y como el efecto de la convergencia en 1° de latitud es de 923^m, resultará de 94^m.7 por cada zona que estuviese comprendida entre los paralelos extremos de 28° y 29°. Por otra parte, un grado del meridiano abrazaria poco mas de 11 lotes....... (11.075), y por consecuencia el decremento de los lados septentrionales seria para cada uno $\frac{94.7}{11.1} = 8^m5$ respecto de la longitud de sus lados meridionales, y la misma cantidad daria el incremento de los lados meridionales de los lotes situados al Sur de la base *CD*. Los primeros lotes al *N* de la base tendrian, pues, sus lados septentrionales de 9991^m.5, los segundos de 9983^m.0, &c.; así como los primeros al *S* de la misma linea los tendrian de 10008^m.5, los segundos de 10017^m.0, los terceros de 10025^m.5, &c.

Representando en general por n el número de lotes de cada zona comprendida entre la base CD y un paralelo de correccion GH, tendrémos que la cantidad $8^m5 \times n$ representaria en nuestro ejemplo la distancia de la primera division de GH al punto h en que la misma linea deberá ser cortada por el meridiano $c\,h$ que señala la primera zona; la distancia de la segunda division de GH al punto k será $8^m5 \times 2\,n$, y así sucesivamente tanto hácia el Este como hácia el Oeste. En la figura se han supuesto las zonas de cuatro lotes, por lo cual el lado $A\,h$ seria de 9966^m en lugar de 10000 que corresponden á la primera division de GH, ó lo que es lo mismo, ambas señales distarán 34^m; la distancia $A\,k$ seria de 19932^m, y como la segunda division de GH distaria 2 miriámetros de A, resulta que la misma division se hallaria á 68^m de k. Por estas explicaciones se comprende la causa de haberse dado el nombre de *lineas de correccion* á los paralelos tales como EF y GH.

Cuando el terreno que debe fraccionarse se extiende mucho de Norte á Sur, los paralelos que han servido para hacer las correcciones sirven á su vez de bases para proseguir el fraccionamiento. Así, por ejemplo, la linea EF ya dividida en miriámetros seria la base para continuar las operaciones hácia el Sur, y GH dividida de igual manera se aplicaria á la prosecucion del fraccionamiento hácia el Norte.

225º La demarcacion material de los lotes se hace comunmente con brújula (*) y cadena; pero como segun dijimos en otra parte, dos ó mas brújulas no indican por lo regular la misma declinacion magnética, es indispensable que cada uno de los agrimensores ocupados en el fraccionamiento observe la que corresponde á su brújula, para lo cual basta que tome con ella el rumbo del meridiano astronómico $O\,A$, y la declinacion que obtenga será la que le sirva para practicar el trazo y medida de los otros meridianos $c\,h$, $d\,k$, &c.

Hecho esto, se procede á ejecutar la operacion por zonas de este modo: comenzando por c y caminando en el meridiano $c\,h$ se mide un miriámetro de c á e, dejando señales en cada dos kilómetros para

(*) Los americanos suelen hacer uso de un instrumento, inventado en los Estados-Unidos, que se llama *compas solar*, y que tiene por objeto el trazo de los meridianos por medio de observaciones del sol. En su construccion participa algo del aparato astronómico llamado *ecuatorial*, y su manejo demanda algunos conocimientos de Astronomía práctica. Tanto por esto como porque la brújula es el instrumento que se usa con más generalidad, no he creido necesario describirlo.

marcar los puntos de division de las secciones, ó en cada kilómetro si se ha de practicar el fraccionamiento en cuartos de seccion. Al llegar á *e* se marca ese punto y se comienza á medir hácia *a*, quiere decir, de Poniente á Oriente, direccion que se deduce de la que ha indicado la brújula de *c* á *e*, teniendo cuidado de dejar señales *provisionales* en cada 2 kilómetros para las secciones ó en cada kilómetro para los cuartos de seccion. Por lo general la medida no irá á terminar precisamente al punto *a* señalado de antemano por el ingeniero que dirige el fraccionamiento y que ha trazado y dividido los meridianos y paralelos fundamentales: en tal caso se anota la distancia del término de la medida, ya sea al Norte ó al Sur del punto *a*, y partiendo desde *a* se vuelve á medir la linea *a e*, corrigiendo proporcionalmente al error hallado las señales provisionales para dejar los *permanentes* que han de servir para la subdivision de cada lote, y las cuales ya no resultarán exactamente á la distancia de 1 ó 2 kilómetros una de otra, sino con la reduccion que les corresponda por el efecto de la convergencia de los meridianos.

De *e* se prosigue hácia *f* y despues hácia *b* de un modo enteramente semejante y haciendo de igual manera la correccion de las señales provisionales establecidas en *f b*; se pasa despues al lote siguiente y en general á todos los de la zona, siguiendo el mismo procedimiento hasta terminar en el paralelo de correccion. Para trazar los lotes de las demas zonas se adopta una marcha idéntica, partiendo siempre de las divisiones de la base, rectificando la demarcacion de cada lote en los puntos *e*, *f*, *g*, &c., de la zona anterior y terminando la operacion en el paralelo; mas como la acumulacion de los pequeños errores puede dar por resultado que el último meridiano *m n* difiera en magnitud de la verdadera distancia que debe haber de la base al paralelo, la ley en los Estados-Unidos prescribe que todo el error se deje en el último lote hácia el Norte; así como respecto de los errores que se refieren á las lineas de Oriente á Poniente, prescribe que se dejen en el último lote del Oeste, apreciando, sin embargo, el valor de los errores que debe hacerse constar en el registro de las operaciones.

No me parece necesario indicar el método que se sigue para subdividir los lotes en secciones ó cuartos de seccion, porque es del todo semejante al que se ha explicado para la demarcacion de los lotes, y solo recordaré que al medir cualquiera de las lineas divisorias, deben anotarse en el registro los puntos en que se vayan encontrando detalles topográficos de alguna importancia, de acuerdo con las instrucciones que se reciban del director del fraccionamiento. De esa manera podrá configurarse con mucha aproximacion el curso de los rios, la direccion de las veredas, los límites de las propiedades particulares, &c., así como formarse una idea de la naturaleza y producciones del terreno.

Aunque los lotes difieren sensiblemente de la forma de un cuadrado, su area se calculará fácilmente considerándolos como trapecios cuyos lados paralelos son los dirigidos de Oriente á Poniente.

PARTE CUARTA.

NIVELACION.

CAPITULO I.

PRINCIPIOS GENERALES.—EFECTOS DEL NIVEL APARENTE Y DE LA REFRACCION.

226º En la parte primera de este libro se ha enseñado el modo de determinar las posiciones de los puntos del terreno por medio de sus coordenadas referidas á dos ejes rectangulares; pero como se recordará que el objeto de la planometría es únicamente el de construir la *proyeccion horizontal* del mismo terreno, resulta que el sistema de coordenas, que es bastante para determinar la proyeccion de cada punto, conviene igualmente bien á todos los que estén situados en la misma linea vertical, y en consecuencia es por sí solo insuficiente para caracterizar de una manera completa la posicion de un punto de la tierra. Esta consideracion indica que cuando se desea fijar la situacion de un punto de una manera enteramente determinada, ademas del conocimiento de las coordenadas de su proyeccion, es tambien indispensable el de la distancia vertical del mismo punto á la superficie en que se haya proyectado. La nivelacion es la parte de la topografía que se ocupa de la valuacion de esas distancias verticales ó *alturas* de los puntos.

En la planometría se supuso que la superficie de proyeccion era un plano horizontal tangente á la superficie de la tierra en la parte central del terreno, y vimos que la extension de ese plano se confundia sin error de importancia con la del casco esférico correspondiente en una distancia bastante considerable; pero esta hipótesis, que trae consigo la del paralelismo de las verticales de todos los puntos del terreno, deja de ser admisible en la nivelacion, á causa de que la superficie de la tierra se separa rápidamente del plano horizontal al paso que crecen las distancias á su punto de contacto. Por esta razon consideraré desde ahora á la tierra como una esfera de 6366738 metros de radio, pues su elipticidad, por ser bastante pequeña, no tiene influencia sensible aun en las mayores operaciones de la nivelacion.

Cuando se considera en su conjunto el globo terrestre es preciso prescindir completamente de las desigualdades de su superficie que son casi nulas respecto de su radio; y así al decir *superficie de la tierra* debe entenderse que se hace referencia á la de la esfera ideal que resultaria de prolongar en todos sentidos encima ó debajo de los continentes la superficie de los mares con su curvatura uniforme. Asentado esto, toda superficie concéntrica con la de la tierra ó paralela á las aguas del oceano, se llama *superficie de nivel*, y todas las lineas que pueden imaginarse trazadas en ella reciben igualmente el nombre de *líneas de nivel*. De acuerdo con su definicion es evidente: 1º Que toda superficie de nivel está caracterizada por la propiedad de ser normal en cualquiera de sus puntos á la direccion de la vertical correspondiente, que es la que indica una plomada, y esta propiedad basta por sí sola para definirla. 2º Que conociendo la altura de uno ó mas puntos respecto de una superficie de nivel, se podrán conocer sus alturas con relacion á otra cualquiera, cuya posicion se haya determinado respecto de la primera.

Cuando dos puntos están situados en una superficie de nivel, ó lo que equivale á lo mismo, cuando se hallan equidistantes del centro de la tierra, se dice que están *á nivel:* en el caso contrario, el exceso de altura del uno sobre el otro se llama *diferencia de nivel*, y en la valuacion de esta diferencia es en lo que consiste la teoría y la práctica de la nivelacion, puesto que una vez conocida podrán referirse ambos puntos á la misma superficie, ya sea esta la ideal del Oceano, ya otra que le sea paralela.

Para dar una idea del modo de determinarla, supongamos dos puntos A y B (figura 173ª), cuya distancia sea bastante pequeña para poder admitir sin error sensible que son paralelas sus verticales $A\ Z$ y $B\ Z'$, ó que las superficies de nivel $A\ C$ y $B\ O$ se confunden sensiblemente con sus planos tangentes. Es claro que la diferencia de nivel $A\ O$ quedará determinada midiendo la parte $B\ C$ de la vertical de B, interceptada por el plano horizontal $A\ C$, puesto que el paralelismo de $A\ C$ y $B\ O$ nos dá: $A\ O = B\ C$.

Tambien podria calcularse $B\ C$ midiendo el ángulo $B\ A\ C$ que la visual $A\ B$ forma en el plano $A\ C$; porque en el triángulo rectángulo $A\ B\ C$ se tiene: $B\ C = A\ O = k$ tan. a, designando por k la distancia horizontal entre los puntos y por a el ángulo observado. Este ángulo se llama de *altura* ó de *depresion*, segun que el punto visado B esté mas alto ó mas bajo que A, y como en todos casos es complemento de la distancia zenital $Z\ A\ B = z$, puede escribirse $B\ C = k$ cot. z; fórmula en la cual el signo de cot. z indica si B está mas elevado ó mas bajo que A, segun que z sea menor ó mayor que 90°.

De la breve explicacion anterior se deduce que hay dos métodos generales para determinar las diferencias de nivel; llamándose *topográfico* el primero y *trigonométrico* el segundo.

227º He supuesto hasta ahora el paralelismo de las verticales, que deja de ser admisible cuando es algo considerable la distancia que separa los puntos; porque á causa de la forma y dimensiones de la tierra, convergen hácia el centro á razon de 1″ por cada 31ᵐ próximamente. Así es que á medida que aumentan las distancias, se hacen mas sensibles las diferencias entre el plano horizontal ó *nivel aparente*, que señalan los instrumentos que se usan en la nivelacion, y la superficie de nivel ó *nivel verdadero*.

Sean O y B (figura 174ª) los dos puntos cuya diferencia de nivel se quiere determinar. $O\ A'$ es el plano tangente en O, y $O\ n\ C$ la superficie de nivel que pasa por el mismo punto. El estadal colocado en B quedará interceptado en A', de manera que la indicacion del punto de mira será $h' = B\ A'$; miéntras que la diferencia de nivel es realmente $B\ C = O\ m$. Si llamamos h la verdadera diferencia $B\ C$, tendrémos:

$$h = h' - x \qquad (1)$$

Vamos á calcular la correccion x, que es la diferencia entre el nivel aparente y el verdadero. Llamemos k la distancia $O\,A'$, R el radio de la tierra, y fundados en la propiedad de la tangente y la secante tiradas desde un mismo punto A', se obtendrá:

$$k^2 = (2\,R + x)\,x = 2\,Rx + x^2$$

De aquí resulta $x = \frac{k^2}{2\,R} - \frac{x^2}{2\,R}$; pero atendiendo á que x es siempre muy pequeño respecto del radio de la tierra, se puede desechar sin error sensible la fraccion $\frac{x^2}{2\,R}$ para obtener $x = \frac{k^2}{2\,R}$, valor que sustituido en la ecuacion (1) produce:

$$h = h' - \frac{k^2}{2\,R}$$

228º En todo el cálculo anterior he supuesto que la mira que se ve en A' está realmente en ese punto; pero esto no es exacto. Se sabe, en efecto, que cuando un rayo luminoso atraviesa oblicuamente medios de diversa densidad, se desvía de su direccion inicial, ó se *refracta.* La masa de aire comprendida entre el observador y la mira tiene ese poder refringente, y suponiéndola compuesta de capas diversamente densas, el rayo luminoso que parte de la mira irá sufriendo refracciones en cada una de ellas, y formará de este modo una linea quebrada cuyos elementos son bastante pequeños para que pueda considerarse como una curva. El observador en O recibe, pues, el rayo que parte de A segun la curva $A\,O$, y lo refiere á la direccion de la tangente $O\,A'$ en el último elemento de la curva; de manera que aunque ve la mira en A', no está realmente sino en el punto A. Segun esto, para obtener la cantidad $h' = B\,A'$ que figura en la ecuacion (1), es necesario añadir $A\,A' = y$ á la verdadera indicacion $h'' = B\,A$ de la mira, y la ecuacion (1) se convertirá en:

$$h = h'' + y - x \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Para determinar á y, en los triángulos $A\,O\,A'$ y $A'\,O\,C$ por ser muy pequeños los ángulos en O, sus valores serán sensiblemente proporcionales á los lados opuestos, y tendrémos .... $A\,O\,A' : A'\,O\,C :: A\,A' : A'\,C$, de donde resulta:

$$A\,A' = A'\,C\,\frac{A\,O\,A'}{A'\,O\,C}$$

Si llamamos C el ángulo central $A\,C\,O$ formado por las verticales de O y B, se tiene: $A'\,O\,C = 0.5\,C$, por ser el ángulo de una tangente y una cuerda. Por otra parte, se ha encontrado por medio de numerosas experiencias que en circunstancias iguales de la atmósfera el *ángulo de la refraccion* $r = A\,O\,A'$ es sensiblemente proporcional el ángulo C de las verticales; de modo que designando por c un coeficiente constante, se tiene $r = c\,C$, y así sustituyendo los valores de $A\,O\,A'$ ó r, y de $A'\,O\,C$ en el de $A\,A'$, resulta:

$$y = A\,A' = \frac{c\,C}{0.5\,C}\,A'\,C = 2\,c.A'\,C$$

y como $A'\,C$ es la diferencia entre el nivel aparente y el verdadero, cuyo valor es $x = \frac{k^2}{2\,R}$, obtendrémos:

$$y = \frac{c\,k^2}{R}$$

Sustituyendo en la ecuacion (2) los valores de x y de y, se hallará finalmente:

$$h = h'' - \frac{k^2}{R}\,(0.5 - c) \qquad (3)$$

La cantidad $\frac{k^2}{R}\,(0.5 - c)$ es, pues, la correccion sustractiva que debe hacerse á la indicacion de la mira por los efectos combinados del nivel aparente y de la refraccion, para obtener la verdadera diferencia de nivel entre los puntos O y B.

El valor de c varia ligeramente con el estado de la atmósfera. En Europa se ha hallado que es de 0.10 en el invierno y de 0.06 en el verano, por lo cual comunmente se adopta el término medio $c = 0.08$. En la República se han hecho pocas observaciones para determinar esa constante; pero todas ellas indican que el valor admitido en Europa es demasiado fuerte para nuestro clima, sobre todo, en la parte mas elevada del pais. El ingeniero D. Miguel Iglesias encontró por dos observaciones hechas en el Valle de México y en el verano $c = 0.05$, que es muy poco menor que el valor que yo habia obtenido por un corto número de experiencias. Cuando se tenga oportunidad de medir directamente esa constante por el método que se indicará en el Capítulo V, será preferible hacer uso del resultado que se obtenga; pero entretanto me parece conveniente adoptar...... $c = 0.06$ para nuestro país. Con este valor la fórmula (3) vendrá á ser:

$$h = h'' - \frac{0.44}{R} k^2$$

y por ser constante el coeficiente de k^2 resultará calculando su logaritmo:

$$h = h'' - (2.8395)\ k^2$$

Ejemplo.—Calculemos la verdadera diferencia de altura entre dos puntos cuando la mira indica $h'' = 3^m25$, siendo su distancia al observador $k = 1500^m$.

Log. const...............	2.8395		
,, 2250000..........	6.3522	$h'' =$	3^m25
	9.1917...........		-0.16
		$h =$	3^m09

De estas correcciones se han formado tablas que tienen por argumento las distancias k; pero como el cálculo directo es tan sencillo no me parece necesario reproducirlas.

CAPITULO II.

DE LOS NIVELES.

229º Los instrumentos que se usan en la nivelacion son de dos clases: los unos indican la direccion del plano horizontal en el punto de estacion, y reciben el nombre genérico de *niveles*. Los otros permiten medir el ángulo que forma con el plano horizontal la visual inclinada que se dirige al punto observado, y se llaman *clisímetros*. Los primeros se aplican al método topográfico de nivelacion y los segundos al trigonométrico. En este Capítulo me ocuparé de los niveles.

El mas sencillo de estos instrumentos es el *nivel de agua* representado en la fig. 175ª, y que consiste en un tubo metálico $A B$, cuyos extremos se encorvan para recibir otros dos tubos de vidrio C y D de igual diámetro. Todo el aparato se fija en un tripié por medio de la rodilla M.

Para hacer uso de este nivel se coloca la parte $A B$ en una posicion sensiblemente horizontal y se vierte agua en uno de los tubos C ó D hasta que en ambos llegue á la mitad ó los dos tercios de la altura. Es claro que en virtud de la propiedad de los líquidos, luego que se establece el equilibrio las cuatro visuales que se pueden dirigir tangentes á los dos cilindros C y D á la altura del agua, se hallan situadas en el plano horizontal $H H'$.

La interseccion de la superficie del líquido con los tubos no es una linea exactamente determinada, sino que á causa de la atraccion molecular entre el agua y el vidrio, llamada *capilaridad*, se adhiere el líquido á las paredes del vaso formando así una superficie cóncava que hace bastante incierta la direccion de las visuales. Para disminuir el efecto de esta incertidumbre conviene alejarse algunos pasos del instrumento, á fin de que las elevaciones del agua presentándose á la vista en su conjunto, aparezcan como lineas terminadas con mas claridad.

Si no son exactamente iguales los diámetros de los tubos de vidrio, la capilaridad se manifestará con mas intensidad en el de menor diámetro, haciendo que las visuales se desvíen tanto mas de la horizontalidad cuanto mayor sea la diferencia de los diámetros. Para calcular el efecto de cualquiera de estas causas de error supongamos que en la distancia d que separa los tubos, la visual dirigida se desvíe la cantidad m de la verdadera linea horizontal: á la distancia k de la mira al instrumento la desviacion producida será: $x = \frac{k}{d}\, m$. Así admitiendo que la incertidumbre m no sea mas que de $0^{m}0005$ siendo $d = 1^{m}$, para una distancia k de 50^{m} el error ocasionado seria de $0^{m}025$, que es muy superior al que puede tolerarse en las nivelaciones de alguna importancia. Este resultado indica que para servirse de este nivel no deben exceder de 25 ó 30 metros las distancias entre las estaciones, y que en general debe desecharse para la ejecucion de operaciones algo delicadas.

230º Otro nivel llamado *de perpendículo*, y mas comunmente *nivel de albañil*, consiste en dos reglas $A C$ y $B C$ (fig. 176ª) de igual longitud, unidas por otra DE, de manera que formen el triángulo isóceles DCE. Los extremos A y B de las dos reglas están cortados por un plano perpendicular á la linea CR llamada *linea de fé*, marcada en el instrumento por medio del punto C y de la señal trazada en O á la mitad de la regla trasversal. Suspendiendo en C una plomada que tenga un hilo muy delgado, la linea AB será horizontal cuando la señal O quede cubierta por el hilo CR.

Para hacer uso de este nivel se le coloca sobre una regla FG, que va unida al tripié: si esta no es horizontal, la plomada se inclinará al lado mas bajo, y haciendo mover la regla hasta que la plomada pase por O, la linea HH' será horizontal, y por consiguiente suministrará la visual que conviene en el punto de observacion.

Es necesario advertir que la menor inexactitud en el trazo de la linea CO, así como el espesor del hilo CR, producen la desviacion de la visual y en consecuencia un error en la indicacion de la mira. Sea AB (fig. 177ª) la verdadera linea horizontal y AD la visual inclinada á causa de la desviacion de la plomada CR, que deberia pasar por o en vez de indicar el punto d. Los triángulos semejantes cod y ABD dán la ecuacion: $BD \times co = AB \times do$, y haciendo $co = r$, $od = m$ y $AB = k$, se tendrá que x ó BD es:..... $x = \frac{k}{r} m$. Si la altura del instrumento es $r = 0^m 2$, y suponemos que la desviacion m es solamente de $0^m 0001$, el error que se produce á una distancia de 50^m tiene por valor $x = \frac{0.005}{0.2} = 0^m 025$.

Por lo que precede se ve que este nivel, lo mismo que el anterior solo puede emplearse en operaciones de muy poca importancia y haciendo estaciones á cortas distancias.

El nivel de perpendículo no siempre tiene la figura que se ha descrito, pues consiste muchas veces en dos reglas que forman entre sí un ángulo recto. A lo largo de una de ellas está la plomada, y la otra indica la direccion de las visuales. Sin embargo, cualquiera que sea la forma del aparato es el mismo el fundamento de su construccion y los mismos tambien sus defectos.

231º El mas perfecto de los niveles es el llamado de *burbuja de aire*, ó simplemente *nivel de aire*. Consiste en un tubo de vidrio AB (fig. 178ª) cerrado herméticamente y lleno casi en su totalidad de alcohol ó de éter, de manera que solo un pequeño espacio C de su capacidad quede ocupado por el aire ó por el gas que proviene de la evaporacion del mismo líquido. Es claro que cualquiera que sea la posicion de este instrumento la burbuja de gas irá siempre á ocupar la parte mas elevada del tubo en virtud de su menor densidad, y si suponemos que este fuera enteramente cilíndrico y recto, cuando su eje estuviese exactamente horizontal la burbuja se extenderia á lo largo de la generatriz superior, y bastaria la mas leve inclinacion para que pasara de un extremo al otro del tubo, siendo en consecuencia muy difícil lograr que indicara la horizontalidad. Para evitar este inconveniente se dá una ligera curvatura á la parte interior del tubo, de modo que sus extremos A y B queden mas bajos que la parte media, y entónces la tangente en el centro C de la burbuja será la horizontal HH'.

Por lo general se divide el tubo en partes iguales que se numeran desde el centro hácia uno y otro extremo, ó se le adapta una escala dividida y numerada. Estas divisiones sirven tanto para indicar la horizontalidad perfecta del tubo, como para cerciorarse de si es ó no uniforme su curvatura interior. Para lo primero basta evidentemente hacer que los límites de la burbuja señalen el mismo número de divisiones hácia un lado y otro del centro; y para lo segundo que la misma burbuja ocupe igual extension en todo su curso á lo largo del tubo.

232º Un nivel es tanto mas sensible, quiere decir, indica la horizontalidad con tanta mayor precision cuanto menor es su curvatura, y como esta es inversamente proporcional al radio de su círculo osculador, resulta que el radio de curvatura podrá servir de medida á la sensibilidad. Para calcularlo sea e la extension de una de las divisiones y v su *valor angular*, esto es: el cambio de inclinacion del tubo respecto del horizonte cuando cada extremo de la burbuja pase de una division á otra ó recorra el espacio e. Expresando á v en segundos y teniendo presente que la semicircunferencia πr del círculo osculador tiene $648000''$, resulta la proporcion:

$$v : e :: 648000 : \pi r$$

de donde se obtiene por valor del radio de curvatura:

$$r = 206265 \frac{e}{v}$$

El valor lineal e de las divisiones se obtiene midiéndolas con una escala de milímetros, y en cuanto al angular v enseñarémos á medirlo en el Capítulo siguiente.

Supongamos que las divisiones de un nivel están trazadas á distancias de $0^{m}.003$, y que se ha reconocido que cuando el tubo se inclina 15′ respecto del horizonte cada extremo de la burbuja recorre 30 divisiones. Tendrémos: $e = 0^{m}.003$ y $v = \frac{900''}{30} = 30''$, por lo cual su radio de curvatura será:

$$r = 206265 \times \frac{0.003}{30} = 20^{m}.6$$

Para los grandes aparatos astronómicos se construyen niveles hasta de 600^{m} de radio; pero tal grado de sensibilidad seria no solamente inútil en los instrumentos topográficos, que no necesitan tanta precision, sino mas bien perjudicial para la rapidez de las operaciones en atencion á que es casi imposible conseguir la permanencia de la burbuja en el centro del tubo en un instrumento móvil cuando el nivel es demasiado sensible. Por lo general los niveles topográficos tienen de 15^{m} á 30^{m} de radio, y es evidente que equivalen á un nivel de perpendículo de las mismas dimensiones.

233º Comunmente los tubos de vidrio se guarnecen de armaduras metálicas que dejan el espacio suficiente para observar la marcha de la burbuja, y que van unidas por sus extremidades A y B (fig. 179ª) á una regla CD. El extremo B, aunque á una distancia invariable de D, puede girar al derredor de la charnela que lo une al apoyo BD, y en virtud de este movimieno, que se comunica por medio del tornillo T, es posible variar la distancia de la regla al eje del nivel, y por consiguiente establecer su paralelismo como lo voy á indicar.

Supongamos que la regla inferior del nivel se ha colocado en EF (fig. 180ª) sobre la superficie CD inclinada respecto del horizonte HH'. Es claro que para que la burbuja ocupe el medio O del tubo ha sido necesario bajar el extremo B ó subir el A, y el nivel ocupará la posicion AB. Si la superficie CD fuera horizontal, invertiendo el nivel, esto es, llevando el apoyo E á F y situando este último en E, la burbuja O no variaria de lugar; porque durante el movimiento el tubo AB no cesaria de estar en un plano horizontal. Pero en la hipótesis admitida la superficie CD forma un ángulo $DRH' = i$ con el horizonte; luego al ejecutar la inversion del nivel

ocupará su tubo la posicion $B'A'$ formando un ángulo $A'OB = n$ con su situacion anterior, esto es, con la horizontal AB, y la burbuja ya no se encontrará en O.

Si en el triángulo isóceles $A'OB$ designamos por m los ángulos iguales A' y B, tendrémos: $n = 180° - 2m$. Ademas, como el ángulo M del triángulo rectángulo RME es igual á $OAB' = m$, resulta que CRH ó i tiene por valor: $i = 90° - m$. De la comparacion de este ángulo con n se deduce: $n = 2i$; lo cual indica que *despues de la inversion de los extremos del nivel, el eje de este forma con la horizontal un ángulo igual al doble de la inclinacion de la superficie que le sirve de apoyo.*

El teorema que acaba de demostrarse, conocido con el nombre de *principio de la inversion*, es el que sirve de fundamento para corregir los niveles y para nivelar la superficie en que se apoyan, ó lo que viene á ser lo mismo, para poner verticales las columnas de los instrumentos á que aquellos van unidos. Aunque ya se ha descrito el modo de efectuar la correccion al exponer las rectificaciones de los instrumentos angulares, especialmente las del círculo y del teodolito, recordemos el método general que se deduce del principio de la inversion.

Despues de mover los tornillos del pié del instrumento hasta que la burbuja de su nivel se encuentre hácia la mitad del tubo, obsérvese en cuál de las divisiones se detiene cada una de sus extremidades aun cuando no estén equidistantes del centro. Inviértase en seguida el nivel haciendo que gire 180° la columna vertical del instrumento, y si en su nueva posicion indica la burbuja iguales divisiones y del mismo lado respecto del observador, que permanece en el mismo lugar, el nivel estará correcto, y la desviacion que se note con respecto al centro es debida á la inclinacion de la columna. Pero si no son iguales las divisiones que señala en sus dos posiciones, muévase el tornillo del nivel hasta que la burbuja haya recorrido una longitud igual á la semidiferencia de sus dos indicaciones y el nivel quedará corregido.

En otros términos, si $2l$ es la longitud actual de la burbuja expresada en divisiones de la escala, supongamos que en la primera posicion uno de sus extremos, el de la derecha, por ejemplo, indique $p = l + m$: el de la izquierda señalará $q = l - m$. Despues de la inversion admitamos que el extremo que en esta nueva posicion queda á la derecha indique $p' = l + n$ y el de la izquierda $q' = l - n$. Entónces $p - p' = q' - q = m - n$ representará el doble del error del nivel, y en consecuencia deberá moverse el tornillo que modifica la longitud de uno de sus apoyos hasta que los extremos de la derecha y de la izquierda señalen respectivamente $P = l + \frac{1}{2}(m + n)$ y $Q = l - \frac{1}{2}(m + n)$. Como es muy difícil destruir todo el error de una sola vez, conviene volver á la primera posicion para ver si se ha logrado destruirlo, y si no es así, se vuelve á leer la indicacion, que comparada con la última, dará la nueva diferencia cuya mitad debe aplicarse como correccion moviendo el tornillo del nivel, y se prosigue así hasta que en las dos posiciones el mismo extremo de la burbuja, esto es, el que en ambas queda á la derecha por ejemplo, señale indicaciones iguales.

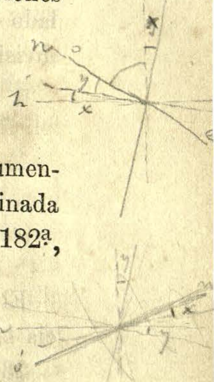
Cuando se ha conseguido que así sea, el nivel estará correcto, y si sus dos extremidades no marcan el mismo número de divisiones, la diferencia ó desviacion respecto del centro de la burbuja proviene de la inclinacion de la columna á cuyo derredor gira todo el instrumento, y puede hacerse desaparecer moviendo convenientemente los tornillos de su tripié. Esta última operacion debe repetirse en dos ó mas posiciones de la columna hasta que en una revolucion completa del instrumento cada extremo de la burbuja señale l, siendo $2l$ su longitud segun supusimos, lo que es ya una prueba de que la columna ha quedado completamente vertical.

Uua vez explicada la manera de corregir el nivel ántes que la columna, se comprenderá sin esfuerzo alguno que las dos correcciones pueden hacerse simultáneamente, quiere decir, moviendo tanto el tornillo del nivel como los del tripié, de tal modo que la mitad de la diferencia se destruya con el primero y la otra mitad con los segundos. Esta práctica es, en efecto, la que comunmente se sigue.

234º Siempre que se hace uso de niveles muy sensibles es bastante difícil destruir completamente su error y establecer verticalmente la columna con toda exactitud; pero pueden determinarse las magnitudes de los pequeños errores que queden y llevarlas en cuenta para corregir los resultados. A la verdad en las operaciones topográficas casi nunca es necesario llevar la precision hasta ese extremo; mas con el fin de completar la teoría de los niveles indicaré el modo de medir ambos errores.

Sea CZ' (fig. 181ª) la columna de un instrumento que supondré inclinada respecto de la linea vertical CZ, el pequeño ángulo...... $x = ZCZ'$, y AB el nivel unido directa ó indirectamente á la columna, y que en lugar de serle perpendicular forma con ella un ángulo $AOZ' = 90° - y$. Designando siempre por $2l$ la longitud de la burbuja, tenemos que si tanto x como y fueran nulos, cada extremo indicaria l; pero en virtud de esos errores sus indicaciones serán:

$2l = o + e$



La del extremo A.................... $o = l + x + y$
La del extremo B.................... $e = l - x - y$

Si despues de hechas las lecturas o y e se invierte el instrumento, como la rotacion se hace al derredor de la columna inclinada CZ', ocupará el nivel la posicion que representa la figura 182ª, siendo sus nuevas indicaciones:

$2l = o + e'$

La del extremo B.................... $o' = l + x - y$
La del extremo A.................... $e' = l - x + y$

Por las lecturas de la primera y segunda posiciones se obtiene:

$$o - e = 2(x + y) \qquad o' - e' = 2(x - y)$$

y en consecuencia:

$$x = \frac{(o + o') - (e + e')}{4}$$

$$y = \frac{(o - o') - (e - e')}{4}$$

que dán los pequeños ángulos x é y en partes ó divisiones de la escala. Para obtenerlos en segundos sea v el valor angular de cada division, y se tendrá que la inclinacion de la columna respecto de la vertical es:

$$x = \frac{(o + o') - (e + e')}{4} v$$

y el error propio del nivel:

$$y = \frac{(o - o') - (e - e')}{4} v$$

El valor de x es generalmente el que mas importa conocer con el fin de corregir las observaciones ejecutadas con un instrumento cuya columna señale un zenit erróneo Z', y reducirlas así al zenit real Z. Si x resulta positivo la columna está inclinada hácia el lado en que las lecturas fueron e y e', ó lo que es lo mismo, la linea horizontal errónea $a\,b$ que indica el instrumento, estará elevada en el lado cuyas lecturas fueron o y o'. Supongamos que un nivel cuyas divisiones valen $3''$ haya dado las siguientes indicaciones:

Primera posicion..........................	$o = 17$	$e = 33$
Segunda ,, ...	$o' = 22$	$e' = 28$
	$o + o' = 39$	$e + e' = 61$

$$x = \frac{39 - 61}{4} \times 3'' = -16''.5$$

El resultado negativo dá á conocer que la columna se inclina hácia la parte en que se hicieron las lecturas o y o'.

235º Establecida la teoría general del nivel de aire ocupémonos de los principales mecanismos que se han inventado para adaptarlo á las operaciones de la nivelacion topográfica.

Niveles de pínulas.—Estos instrumentos se componen de una regla metálica $A\,B$ (figura 183ª) que sostiene un nivel de aire, y en cuyas extremidades hay dos pínulas E y F provistas cada una de dos hilos muy delgados que se cortan en ángulo recto, y de una abertura circular muy pequeña que corresponde á la interseccion de los hilos de la otra. Todo el aparato descansa sobre otra regla $C\,D$ que va unida á la primera en D por medio de una charnela á fin de poderlas acercar ó alejar moviendo el tornillo T, y hacer que de esa manera se coloque la burbuja en el centro del tubo.

Si la linea trazada por la pequeña abertura ocular de una de las pínulas y la interseccion de los hilos de la otra es paralela al eje del nivel, siempre que la burbuja de este señale divisiones iguales á un lado y otro del centro, será horizontal aquella linea, y por consiguiente suministrará una visual en la direccion que hemos llamado nivel aparente. Para comprobar este paralelismo se colocan dos estadales á 80^m ó 100^m uno de otro, y se sitúa el nivel exactamente á la mitad de esa distancia, procurando que la pieza M que lo une al tripié se aproxime á la verticalidad lo mas que sea posible, y estableciendo la burbuja en medio del tubo. Hecho esto se observan por cada una de las pínulas los puntos m y m' (fig. 184ª), leyendo las indicaciones $A\,m$ y $B\,m'$ de la mira, y despues se hace girar 180° todo el instrumento. Como en esta nueva posicion puede haberse desviado algo la burbuja, se corregirá por medio del tornillo que acerca ó aleja las reglas, y entónces las pínulas indicarán la direccion nn' igualmente inclinada que mm' respecto del horizonte. Conocidas las nuevas indicaciones $A\,n$ y $B\,n'$, se señalan en los estadales dos puntos p y p' tales que se tenga: $Ap = \frac{1}{2}(A\,m + A\,n)$ y $Bp' = \frac{1}{2}(B\,m' + B\,n')$. Es claro que la linea pp' es horizontal, y así moviendo una de las pínulas con el tornillo que tiene con ese objeto hasta que las visuales señalen esa nueva direccion, quedará establecido su paralelismo con el nivel. Puede conseguirse el mismo resultado por medio del tornillo que varia la distancia de las reglas; pero como se desarreglará el nivel en ese movimiento, será necesario volver á llevar la burbuja al centro valiéndose del tornillo de su armadura. En uno y en otro caso debe repetirse la operacion hasta que despues de la inversion no se advierta diferencia alguna ni en la direccion de la visual ni en las indicaciones de la burbuja.

Aunque el nivel de pínulas es el mas perfecto de todos los que he descrito hasta ahora, no debe darse mucha extension á su uso, porque á una distancia algo considerable el grueso de los hilos, por finos que sean, intercepta una parte muy apreciable del estadal; y ademas, el uso de las pínulas causa siempre alguna incertidumbre en la direccion de las visuales. Por eso al emplear este instrumento no convendrá colocar las miras á mas de 40^{m} á 50^{m} de distancia.

236º **Niveles de anteojo.**—Todos estos instrumentos constan esencialmente de una regla que sostiene un anteojo y un nivel de aire, teniendo ademas los mecanismos necesarios para comprobar la precision de sus diversas partes y corregir los defectos que se noten. Como son muy numerosas las modificaciones que se han hecho á las distintas piezas de que se componen, solo daré á conocer la construccion de los niveles que mas se usan, persuadido de que al ver cualquiera otra se comprenderá fácilmente el objeto que puede tener la variacion que en ella se advierta.

La fig. 185ª representa el nivel llamado de Egault. En este instrumento la regla $A\,B$ sostiene el nivel de aire y el telescopio $C\,D$, siendo susceptible de girar al derredor del eje O que puede colocarse verticalmente por medio de los tornillos T y los resortes R como verémos despues. Otras veces todo el aparato está apoyado en tres piés con tornillos para nivelar, lo mismo que un teodolito.

El ocular *D* del anteojo se arregla á la vista del observador de modo que pueda ver con toda claridad los hilos muy delgados de que está provista la retícula, y tambien puede variarse la distancia de la misma al objetivo segun la del objeto que se observa, hasta que se vea con igual limpieza su imágen.

Un nivel de esta construccion debe reunir las condiciones siguientes:

1ª—La columna ó eje á cuyo derredor gira todo el instrumento ha de ser vertical.

2ª—La linea de colimacion del telescopio debe coincidir con su eje de figura.

3ª—Uno de los hilos de la retícula debe ser horizontal.

4ª—El eje del nivel ha de ser paralelo á la linea de colimacion.

Para comprobar la verticalidad de la columna se coloca el nivel en la direccion de uno de los tornillos que tiene el instrumento en su parte inferior, el cual se mueve hasta que la burbuja ocupe el centro del tubo; se invierte en seguida el nivel haciéndolo girar 180°, y si la burbuja no varia de lugar tampoco habrá que hacer correccion alguna; pero si se traslada hácia uno de los extremos del tubo se corrige la mitad del error con el tornillo del pié del instrumento y la otra mitad con el de la armadura del nivel, debiendo repetirse la operacion hasta que no se observe diferencia alguna. Despues se lleva el nivel á la direccion del otro tornillo y se mueve hasta que la burbuja se coloque en el centro, con lo que la columna quedará vertical. Cuando el instrumento está provisto de tres tornillos para nivelar se coloca el tubo primero en la direccion de dos de ellos en sus dos posiciones inversas, hasta que en cualquiera de ellas la burbuja ocupe el centro; y despues se sitúa en la direccion del tercer tornillo haciendo con él la correccion necesaria. Si la operacion se ha practicado con exactitud la burbuja dará las mismas indicaciones en una revolucion entera del instrumento al derredor de la columna.

Para hacer coincidir los ejes de figura y de colimacion se dirige el telescopio á un objeto distante, tal como una mira colocada á 400^{m} ó 500^{m}, y despues de notar el punto cortado por la interseccion de los hilos, se hace girar el anteojo 180° al derredor de su eje de figura; si en este movimiento permanece el punto observado en la misma interseccion existe la coincidencia; en el caso contrario se mueven los tornillos de la retícula hasta que quede corregida la mitad de la desviacion, y se habrá conseguido esa coincidencia cuando al repetir la operacion el punto que se observe permanezca cortado por los hilos. No hay inconveniente en hacer la correccion de colimacion sin haber nivelado el instrumento, pues no es necesario que el objeto observado esté en la direccion de una visual horizontal.

Para hacer que uno de los hilos sea paralelo al horizonte se observa igualmente un punto distante, y si al mover el instrumento al derredor de la columna despues de nivelado, el punto no permanece siempre cortado por el hilo en todo el campo del telescopio, deberá moverse un poco el anteojo al derredor de su eje de figura hasta que se verifique así. Por lo general los telescopios tienen en su parte exterior una pequeña pieza metálica que por su contacto con un tornillo fijo á los apoyos indica la posicion en que el hilo es horizontal, y por consiguiente una vez hecha la correccion como se ha dicho, bastará establecer ese contacto para que el hilo quede en la posicion que se desea.

El paralelismo de los ejes del nivel y del anteojo se comprueba tambien observando la indicacion de un estadal, estando bien nivelado el instrumento. Se quita en seguida el telescopio de sus apoyos y se invierte despues de hacer girar 180° á todo el instrumento á fin de que el anteojo vuelva á quedar dirigido á la mira. Si en esta nueva posicion queda cortado el estadal en el mismo punto que en la primera, es prueba de que existe el paralelismo; pero en el caso contrario será preciso variar la altura de uno de los apoyos por medio del tornillo que tiene al efecto, hasta que se haya corregido la mitad de la desviacion observada. Esta, lo mismo que todas las demas rectificaciones, debe repetirse hasta que no quede error apreciable.

Casi todas las correciones del nivel tienden á alterarse con el tiempo, y por eso es indispensable examinarlas con alguna frecuencia. Sin embargo, la construccion de Egault se presta á operar con un nivel incorrecto procediendo como sigue para obtener la indicacion exacta de la mira. Sea A (fig. 186ª) el punto de estacion y B el lugar que ocupa el estadal. Haciendo cuatro observaciones en las cuatro posiciones diversas del anteojo en que uno de los hilos es horizontal, las visuales correspondientes tendrán direcciones simétricas respecto de la horizontal; y por consiguiente el término medio de las cuatro lecturas que se hagan en el estadal dará la indicacion BH con independencia de los errores del instrumento.

La primera observacion dá, por ejemplo, Ba, y haciendo girar 180° al telescopio al derredor de su eje de figura se obtendrá Ba', siendo aa' el error que proviene de la falta de coincidencia de los ejes de figura y de colimacion. Despues se invierte el anteojo y se hace girar al instrumento 180° al derredor de su columna, con lo que se obtiene la indicacion Ba''', pues en virtud de la falta de paralelismo entre el eje del nivel y el de colimacion, esta tercera visual resultará igualmente inclinada que la segunda, aunque en sentido opuesto, de modo que $Ha''' = Ha'$. Dando por último media vuelta al telescopio al derredor de su eje de figura, resultará la indicacion Ba''. Es claro que los puntos a y a'' están equidistantes de H lo mismo que a' y a'''; y así es que $BH = \frac{1}{2}(Ba + Ba'')$, y tambien $BH = \frac{1}{2}(Ba' + Ba''')$, cuyo promedio dá:

$$BH = \tfrac{1}{4}(Ba + Ba' + Ba'' + Ba''')$$

Segun se ve en los valores precedentes se obtendria tambien la indicacion exacta por la primera y la cuarta observaciones, ó por la segunda y la tercera; pero es mas seguro adoptar su término medio general.

237º En medio de todas las ventajas que ofrece la construccion de Egault, tiene un inconveniente que en ciertos casos puede originar errores de consideracion. Este proviene de la separacion ó independencia de sus dos partes esenciales, que son el telescopio y el nivel. Imaginémonos, en efecto, que despues de rectificado con el mayor esmero el paralelismo, ó para expresarnos con mas propiedad, la perpendicularidad de los ejes del nivel y del anteojo á la columna del instrumento, cualquiera causa extraña alterase la altura de uno de los apoyos que sostienen el telescopio. Sucederia entónces que indicando el nivel la verticalidad de la columna, no seria horizontal la visual dirigida por el eje del anteojo, puesto que la variacion supuesta en uno de sus apoyos haria inclinar la linea de colimacion. Nada indicaria, por otra parte, la existencia del error, y como este puede producirse no solamente por un cambio real en la altura de los apoyos, sino tambien por la interposicion de algunos granos de polvo entre uno de ellos y el telescopio ó por cualquiera otra causa análoga, resulta que pasaria desapercibida la inclinacion de las visuales, haciendo completamente ilusoria la rectificacion de aquellos ejes.

Este inconveniente no existe cuando están unidos el nivel y el anteojo, como en el instrumento que representa la fig. 187ª, que es de la construccion de Chézy. En lo demas solo difiere esencialmente del de Egault en el modo de colocarlo en su tripié. Un arco de círculo cuya circunferencia está dentada, engrana en el tornillo sin fin *R*, que al moverse hace variar simultáneamente la inclinacion del nivel y del telescopio. El tornillo de presion *T* sirve para detener el movimiento general, y entónces puede moverse el instrumento con lentitud por medio del tornillo situado en *r*.

Las condiciones que debe tener el nivel de Chézy son las mismas que se han indicado al describir la construccion de Egault, y se comprueban de igual manera, con excepcion de la relativa al paralelismo de los ejes, que se practica de este modo. Despues de situar la burbuja en el centro del tubo por medio del tornillo *R*, se observa la indicacion de una mira distante, en el punto que se ve cortado por la interseccion de los hilos, y en seguida se hace girar 180° á todo el instrumento al derredor de la columna. Se invierte el telescopio para volverlo á dirigir al mismo objeto, y si la burbuja ha variado de lugar se vuelve á llevar al centro del tubo con el movimiento del tornillo *R*. En esta nueva posicion la retícula debe cortar el mismo punto que en la primera cuando existe el paralelismo; pero en el caso de que no se verifique así, se corregirá la mitad de la desviacion con los tornillos de la armadura del nivel que permiten variar su distancia al anteojo.

Se ve, pues, que en la construccion de Chézy cualquiera variacion en la altura de los apoyos afecta al nivel lo mismo que al telescopio, y en consecuencia no altera el paralelismo de sus ejes; de suerte que siempre que la burbuja indique la horizontalidad, serán tambien horizontales las visuales dirigidas por la linea de colimacion, cuya coincidencia con el eje del telescopio supongo establecida de antemano.

Los teodolitos ingleses y americanos, que tienen generalmente un buen nivel unido al telescopio, ofrecen tipos de la combinacion de Chézy y pueden rectificarse de una manera idéntica para usarlos como instrumentos de nivelacion segun se ha expuesto detalladamente en la página 59 y siguientes.

238º He supuesto hasta ahora la perfecta igualdad de los diámetros del telescopio en las partes que descansan inmediatamente sobre los apoyos, y es en efecto uno de los puntos en que fijan mas su atencion los constructores, por depender de esa igualdad la exactitud de la rectificacion del paralelismo. El modo de conocer si se ha cumplido con esa condicion importante consiste en medir con el instrumento que se va á examinar, la diferencia de nivel entre dos puntos, y en comparar el resultado con la propia diferencia determinada previamente con toda exactitud. Sean A y B (figura 188ª) los dos puntos elegidos y cuya diferencia de altura $B\,C$ es conocida. Colocados en ellos dos estadales, establézcase el nivel muy cerca de A, de manera que con el estadal de ese punto pueda medirse con precision la altura $A\,a$ del centro del ocular a, despues de haber nivelado perfectamente el instrumento. Es claro que si son enteramente iguales los diámetros del telescopio en las partes sostenidas por los apoyos, la linea de colimacion será horizontal é irá á señalar el punto b en el estadal de B, y se tendrá: $B\,C = B\,b - A\,a$; mas si la visual está inclinada en virtud de la desigualdad de los diámetros, señalará el punto b', por ejemplo, y la diferencia de nivel no resultará igual á $B\,C$, sino que dará el error....................... $b\,b' = B\,b' - A\,a - B\,C$. Una vez conocido su valor y la distancia á que se haya determinado, podrá tomarse en cuenta al operar con el instrumento defectuoso, haciendo las correcciones proporcionalmente á las distancias. #

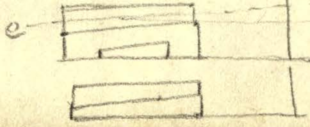
Este método, tiene el grave inconveniente de que no siempre se pueden medir con toda precision las alt. del instr.

239º Los niveles construidos por Troughton no son susceptibles de ese defecto, en atencion á que sus telescopios están fijos á la plataforma inferior del instrumento, como lo manifiesta la fig. 189ª, y solo se les pueden comunicar pequeños movimientos con los tornillos m y n, á fin de poder corregir el nivel que está invariablemente unido al anteojo. Todo el aparato descansa en un sistema de tornillos T y T' para nivelar, lo mismo que los teodolitos.

El siguiente es mejor procedimiento: nivelada perfectamente la plataforma

En la construccion de Troughton es necesario comenzar por rectificar el nivel ó hacerlo perpendicular á la columna C. Para esto #
se nivela 1º previamente la plataforma y en seguida
se establece el telescopio en la direccion de dos de los tornillos T y T' y con el movimiento de estos se lleva la burbuja al medio del tubo. Se hace girar despues el anteojo 180° al derredor de la columna, de manera que el ocular A se coloque en B y vice versa. Si la burbuja ya no permanece en el centro, se hace la correccion por

para que no olvide que si el eje del nivel y linea de colim. no estan en el mismo plano, la burbuja tendrá establecida para todas las inclinaciones de la plataforma



partes iguales, la una con los tornillos T y T', y la otra con m y n, que hacen variar un poco la distancia del anteojo á la plataforma. Se repite la operacion hasta que en las dos posiciones inversas señalen ambos extremos de la burbuja las mismas indicaciones. Colocando en seguida el anteojo en una direccion perpendicular á la primera, se corrige la desviacion que puede tener la burbuja haciendo uso solamente del tercer tornillo del pié, ó de los ~~tres~~ dos restantes si hay cuatro, y teniendo cuidado de no tocar ya los del anteojo m y n, pues que esta desviacion no provendrá mas que de la inclinacion de la columna.

Dijimos que el nivel está invariablemente unido al tubo del telescopio, y no siendo este susceptible de invertirse por estar tambien fijo en la plataforma, no es posible aplicar el método de la inversion para establecer el paralelismo de su eje con el del nivel, sino el siguiente que es tambien muy sencillo. Se escogen en un terreno de suficiente extension y de poco declive dos puntos A y B (fig. 188ª) cuya diferencia de nivel se determina con el instrumento que se trata de examinar, aplicando el procedimiento que indicamos en el párrafo precedente, y estacionando sucesivamente en A y en B. Si son iguales los resultados que se obtienen en ambos casos, existe el paralelismo de los ejes; y en el caso contrario su semidiferencia será el efecto del error que fácilmente se corrige en seguida. Supongamos, en efecto, que á causa de la falta de paralelismo, se desvíen las visuales hácia arriba de la verdadera horizontal cuando la burbuja esté señalando divisiones iguales á un lado y otro del tubo. Resultará entónces que hallándose el instrumento en A, la visual en vez de indicar el punto b de la mira, indicará $B\,b' = h$, y al establecerlo en B señalará...... $A\,c' = h'$ en lugar de $A\,c$. Si designamos por p y p' respectivamente las alturas $A\,a$ y $B\,a'$ del centro del ocular, y por x el efecto del error $b\,b' = c\,c'$, las observaciones en A y B darán:

$$B\,C = h - p - x \qquad\qquad B\,C = p' - h' + x$$

Llamando n y n' las dos diferencias de nivel obtenidas, á saber, $n = h - p$ y $n' = p' - h'$, las dos ecuaciones anteriores son:

$$B\,C = n - x \qquad\qquad B\,C = n' + x$$

que restadas una de otra, producen: $x = \frac{1}{2}\,(n - n')$, como se anunció al principio. Nótese que su semisuma suministra el valor exacto de $B\ C$, y en consecuencia por medio de la doble observacion puede determinarse la diferencia de nivel entre dos puntos con un instrumento incorrecto. Convendrá aplicar este método cuando se desea examinar la igualdad de los diámetros del telescopio como se indicó en el último párrafo, en el cual supusimos conocida con exatitud la diferencia de nivel. Se obtendria tambien con precision esa diferencia estableciendo el instrumento entre los dos puntos y exactamente á la misma distancia de ambos estadales, pues sea cual fuere la causa del error, produce efectos iguales á distancias iguales, y desaparece por tanto al tomar la diferencia de las indicaciones de las miras.

Volviendo á nuestra rectificacion, luego que se ha calculado el valor de x, lo cual puede hacerse sobre el terreno mismo al terminar la segunda observacion, se mueve la retícula del anteojo por medio de los tornillos que están cerca del ocular hasta que el hilo horizontal recorra la cantidad $c'\ c = x$ sobre la mira, hácia abajo ó hácia arriba segun fuere el error, y de ese modo quedará ~~horizontal~~ la linea de colimacion. al eje del nivel paralela

En el nivel de Troughton puede suceder que la interseccion de los hilos no quede en el eje de figura del telescopio, puesto que al mover la retícula solo hemos establecido la horizontalidad de la linea de colimacion; pero esto no ofrece inconveniente alguno, porque estando fijo el anteojo siempre se usa en la misma posicion, lo cual no sucede en los instrumentos cuyos telescopios pueden girar al derredor de su eje de figura, y en los que por esta causa es indispensable la centracion. La construccion de Troughton presenta, por otra parte, la gran ventaja de la solidez y la estabilidad de todas sus partes, de manera que una vez bien rectificado el instrumento, permanece por mucho tiempo sin alteracion.

Podria hacerse mencion de otras muchas construcciones de niveles; pero no ofreciendo ninguna de ellas diferencias importantes respecto de los diversos tipos que se han descrito, es seguro que el lector podrá apreciar por sí mismo las ventajas ó inconvenientes que presenten las variaciones que tenga ocasion de notar en algunos otros instrumentos.

240º Lo que sí es de mucho interes es la determinacion experimental de las mayores distancias á que convenga hacer uso de un instrumento dado, segun el grado de precision que se desee alcanzar.

Este límite no depende tanto de la claridad de los lentes como de la sensibilidad del nivel, porque en la práctica de la nivelacion casi nunca son tan considerables las distancias de la mira que falte potencia en los telescopios, sino que mas bien ocasiona errores la pequeña desviacion que puede tener la burbuja en el momento de dirigir las visuales, y el efecto de esa desviacion crece con las distancias y con la pequeñez del radio de curvatura del tubo.

Si se coloca un estadal á la distancia k del nivel y se leen las indicaciones de la mira obtenidas cuando la burbuja señala la horizontalidad perfecta, y cuando se le haya dado la desviacion que se crea poder admitir en algunos casos, la diferencia que resulte será evidentemente el error posible para la distancia k, y de este se deduce el que en proporcion corresponde á cualquiera otra distancia. En consecuencia, fijando el *maximum* de error que quiera tolerarse, se determinará tambien la mayor distancia á que deberá usarse el mismo instrumento. En general, es casi una prescripcion establecida por la experiencia que la distancia de 500^m es la mayor que debe haber entre el nivel y el estadal siempre que se trata de operaciones delicadas; porque cuando excede de esa cantidad comienzan á ser bastante inciertas las lecturas de la mira.

Observaciones comparativas del mismo género pueden aplicarse para medir el valor angular de las divisiones del nivel, y por consiguiente para calcular su radio de curvatura. Siendo, en efecto, d la diferencia de lecturas del estadal cuando cada extremo de la burbuja recorre n divisiones, se tiene que el ángulo formado por las dos visuales, expresado en segundos es: $V = \frac{d}{k \text{ sen. } 1''}$, y el valor angular de cada division será: $v = \frac{V}{n} = \frac{d}{n\, k \text{ sen. } 1''}$. Si se introduce esta cantidad en la expresion del radio de curvatura (pág. 405), y se recuerda que $\frac{1}{\text{sen. } 1''} = 206265$, resulta: $r = \frac{C''}{2\pi} \frac{e}{v}$

$C'' = 1296000$

$$r = \frac{k\, n\, e}{d}$$

La cantidad ne expresa la extension lineal recorrida por la burbuja y que á la distancia k produce la diferencia d.

Ejemplo.—El nivel que sirvió al ingeniero D. J. Antonio Peña en las nivelaciones ejecutadas en el Valle de México, se sujetó á las experiencias siguientes para determinar su radio de curvatura. Co-

$C'' = 1296000 : 2\pi r :: \text{arc. } 1'' :$

locado un estadal á 80^m del instrumento, se hicieron las siguientes lecturas del punto que señalaba la interseccion de los hilos cuando la burbuja se inclinaba 6 divisiones hácia adelante, cuando sus dos extremos daban iguales indicaciones, y por último, cuando se desviaban 6 divisiones hácia atras.

NIVEL.	ESTADAL.	DIF.
Con 6 div. hácia adelante....................	$0^m.560$	
		$0^m.050$
Con igualdad de indicaciones..............	0. 510	
		0. 060
Con 6 div. hácia atras.......................	0. 450	

La diferencia de lecturas por 6 divisiones es $0^m.05$ en las dos primeras experiencias, y $0^m.06$ en las últimas. Para adoptar un término medio, tomemos la suma $0^m.11$ por las doce divisiones que recorrió cada extremidad de la burbuja, siendo de $0^m.036$ la extension que aquellas abrazaban. Tendrémos pues:

$$r = \frac{80 \times 0.036}{0.11} = 26^m.2$$

Por ejercicio investiguemos á qué distancia daria este instrumento $0^m.01$ de error en las lecturas suponiendo que al nivelarlo no quedasen señalando ambos extremos de la burbuja divisiones exactamente iguales, sino que se desviasen $0^m.001$ respecto de los puntos de la escala que indican la horizontalidad perfecta. Tenemos $n\,e = 0^m.001$, $r = 26^m.2$ y $d = 0^m.01$, de lo que resulta:

$$k = \frac{0.262}{0.001} = 262^m$$

y de aquí puede inferirse que haciendo estaciones á cosa de 100^m del estadal, seria insignificante el error que resultase en las mismas circunstancias.

241º—El objeto de los estadales es, segun se dijo al principio, el de poder medir la parte de la vertical del punto en que se colocan, que queda interceptada por el plano horizontal que describe la linea de colimacion de los niveles, y por consiguiente uno ó dos buenos estadales son los accesorios precisos de un nivel. Al exponer la teoría de la estadia se describió (pág. 267) el estadal ó mira llamada *parlante*, y que con evidencia es la mejor que puede emplearse en la práctica de la nivelacion por reunir las circunstancias de exactitud y rapidez en su uso, pudiendo servir al mismo tiempo para medir sus distancias al instrumento, cuando por la adicion de otro hilo horizontal á la retícula del telescopio, se use este como telémetro. Hay, sin embargo, otros estadales que consisten en una regla de madera dividida y generalmente de 2^m de altura, aunque pueden adquirir una longitud doble por componerse de dos partes unidas por medio de una corredera. Una lámina metálica *EF* (fig. 190ª), dividida en cuatro rectángulos pintados alternativamente de rojo y de blanco, se mueve á lo largo del estadal, estando unido á él tambien por una corredera, y sirve de punto de mira dirigiéndole las visuales de manera que los hilos rectangulares de la retícula del nivel cubran exactamente las lineas divisorias de los colores. La parte del estadal opuesta á la mira está generalmente dividida en centímetros, y se puede obtener en ella la aproximacion de un milímetro por medio del vernier situado en la parte posterior de la lámina ó mira, y cuyo *cero* corresponde á la interseccion de las lineas de los colores. Un tornillo de presion sirve para paralizar el movimiento de la mira á lo largo de la regla luego que ha llegado á la altura conveniente, y en la cual la fija la persona que tiene el estadal, obedeciendo las indicaciones del observador.

Cuando la naturaleza del terreno exige que se haga uso de la prolongacion del estadal, se fija la mira invariablemente de modo que el *cero* del vernier coincida con la linea que señala 2^m de altura en la regla, y entónces se emplea la pieza *D*, que estando igualmente provista de su tornillo de presion y de su vernier, marca la cantidad prolongada, y que con la adicion de 2^m, dá la indicacion final de la mira.

Por la breve descripcion que precede se comprenderá que sirviéndose de estadales de esta clase no es posible operar con tanta violencia como con los parlantes, en los cuales no hay necesidad mas que de leer desde el telescopio la indicacion del punto en que son cortados por el hilo horizontal; indicacion que se obtiene con la aproximacion de un milímetro, porque generalmente son poderosos los anteojos de los niveles y pequeñas las distancias de la mira. En los otros por el contrario, el mismo grado de precision casi siempre es ilusorio, por ser muy difícil que las lineas divisorias de los colores, al ménos la horizontal, quede exactamente cubierta por el hilo de la retícula, en atencion á que la persona que tiene la mira no pudiendo formarse idea de la cantidad de movimiento que debe darle, la sube ó la baja acaso mas de lo que se necesita, y solo por una pura casualidad la fija en el punto conveniente, á ménos de emplear mucho tiempo en estarle comunicando pequeños movimientos hasta que el observador quede satisfecho. Ademas de esto, tiene necesidad el ingeniero de leer la indicacion del vernier si la persona que le ayuda carece de los conocimientos indispensables para hacerlo.

CAPITULO III.

DE LOS CLISIMETROS.

242º Estos instrumentos, llamados tambien *clitómetros* ó *clinómetros*, sirven para medir los ángulos en un plano vertical, ya sea tomando por punto de partida la direccion del zenit ó la del horizonte. En el primer caso el ángulo que se obtiene es la distancia zenital del objeto observado, y en el segundo es su altura ó su depresion angular respecto del horizonte, segun que el objeto se halle situado en la parte superior ó en la inferior relativamente al plano horizontal que pasa por el punto desde el cual se hace la observacion. Cuando se miden ángulos de altura y de depresion se dá á los primeros el signo positivo y á los segundos el negativo con el fin de distinguirlos en el cálculo; pero si se miden distancias zenitales no hay necesidad de atender á signos diferentes, puesto que el valor de esa cantidad angular dá á conocer inmediatamente si el punto á que se refiere está arriba ó abajo del horizonte aparente, segun que sea menor ó mayor que 90°. De esto resulta que en las aplicaciones es mas sencillo hacer uso de distancias zenitales que de ángulos de altura y de depresion; y como estos son en todos casos complementarios de aquellas, siempre es posible referirlos al zenit, aun cuando el instrumento de que se haga uso tenga su graduacion numerada de tal modo que dé directamente los ángulos referidos al horizonte.

El mas sencillo de todos los clisímetros es el de perpendículo (figura 191ª) que solo difiere del nivel del mismo nombre en que la regla trasversal de este está sustituida por un arco graduado cuyo *cero* se halla en la parte central m, y cuya numeracion se dirige hácia uno y otro extremo. Para medir con este instrumento el ángulo de inclinacion $i = NMH$ de una linea MN, se coloca su plano ABC en el vertical que pasa por la linea y se visa por A y B en la direccion de esta. La graduacion que indique el hilo de la plomada P será el ángulo que se busca, puesto que se tiene:............. $NMH = i = m\,CP$.

Si el cero de la graduacion no se halla precisamente en m sobre la perpendicular á AB, la inclinacion que se obtenga resultará con todo el error de aquel punto de la escala, y para lograr su eliminacion ó para determinar su valor se recurre al método de la inversion, fundándose en que el orígen de la numeracion ocupará una posicion opuesta y simétrica respecto de m. Supongamos, por ejemplo, que el cero esté en o debiendo estar en m, y que por lo mismo tiene el error $g = o\,Cm$. Si designamos por G la graduacion $o\,CP$ que señala la plomada en la primera posicion del instrumento, se tiene segun indica la figura: $i = G - g$.

En la segunda posicion $A'\,B'\,C'$ del instrumento el punto o quedará del otro lado respecto de m, y siendo $G' = o\,C'\,P'$ la nueva indicacion de la plomada, resulta: $i = G' + g$.

Los dos valores producen por adicion y sustraccion:

$$i = \tfrac{1}{2}(G + G') \qquad g = \tfrac{1}{2}(G - G')$$

Estos resultados manifiestan que el promedio de la doble lectura suministra el ángulo de inclinacion con independencia del error del índice, y que este último es igual á la semidifencia de las mismas lecturas. Una vez hallado el valor de g puede aplicarse como correccion á las medidas angulares que se hagan en una sola posicion del instrumento, aunque siempre es mejor hacer la doble observacion con el fin de comprobar los resultados, pues al paso que la semisuma de las lecturas produce el ángulo exacto, su semidiferencia debe siempre dar el valor constante de g.

Se ha supuesto hasta ahora que el cero ú orígen de la graduacion está hácia el medio del arco, de modo que se pueden hacer las lecturas hácia uno y otro lado respecto de ese punto; pero cuando no es así se leen las indicaciones en una sola direccion, lo cual hace variar el signo de G'. Admitamos, por ejemplo, que el cero se halle en a: entónces en las dos posiciones se obtiene respectivamente:.... $i = G - g$, é $i = g - G'$, y de aquí resulta: $i = \frac{1}{2}(G - G')$ y $g = \frac{1}{2}(G + G')$. Esto es lo que se verifica en la mayor parte de los clisímetros que tienen círculo entero, porque sus graduaciones están numeradas en una sola direccion.

243º Entre otros defectos, el uso de la plomada tiene el de no indicar los ángulos con toda la precision que se necesita en muchos casos, y por eso se ha reemplazado con una alidada provista de su vernier á la cual va unido un nivel de aire. Cuando este indica la horizontalidad, si la alidada es perpendicular á su direccion, quedará situada verticalmente, y si le es paralela quedará horizontal, suministrando en ambos casos las indicaciones G y G' con bastante precision. Ademas de esta reforma, se ha perfeccionado la direccion de las visuales con la adicion de un telescopio que se mueve con la alidada, descansando todo el sistema en una columna que se pone vertical por medio del nivel. Para exponer con toda generalidad la teoría de los clisímetros de esta construccion, supondré como ántes una ~~error~~ correccion inicial g en la graduacion, admitiendo ademas que la linea de colimacion del telescopio forma un ángulo c con la direccion de los ceros de la alidada, en lugar de serle paralela. Sea PZ (figura 192ª) la vertical del punto de observacion desde el cual se trata de medir la distancia zenital $z = ZOM$ de la señal M. Dirigido el telescopio á M, su linea de colimacion será OM, y estando en G el cero de la alidada, ~~el error~~ la correccion de colimacion es: $c = GOM$. Sea tambien A el cero de la graduacion formando con la verdadera vertical el ángulo $g = AOZ$. Suponiendo numeradas las divisiones desde 0° hasta 360° y de A hácia G como lo indica la flecha, la lectura angular será $AG = G$, y la expresion de la distancia zenital es:

$$z = G + g + c$$

Si se invierte en seguida el instrumento haciéndolo girar al derredor de su columna vertical PZ, y se vuelve á dirigir el telescopio á la señal, despues de hacer que el nivel $a\,b$ indique la horizontalidad, el punto G se colocará en G'; el cero de la graduacion quedará en A'; y el ángulo que señalará la alidada es: $G' = A'\,D'\,B'\,G'$. La distancia zenital de M tendrá, pues, por expresion:

$$z = 360° - (G' + g + c)$$

Este valor combinado con el precedente dá:

$$z = 180° + \tfrac{1}{2}(G - G') \qquad g + c = 180° - \tfrac{1}{2}(G + G')$$

Cuando el limbo del instrumento está graduado por semicírculos y numerado cada uno de *0°* á *180°*, en la primera posicion la linea de los ceros será $A\,B$, y en la segunda $A'\,B'$. En tal caso el ángulo obtenido en esta última es $G' = B'\,O\,G'$, y en consecuencia la distancia zenital tiene por valor: $z = 180° - (G' + g + c)$, que combinado con $z = G + g + c$ que resulta en la primera posicion, produce:

$$z = 90° + \tfrac{1}{2}(G - G') \qquad g + c = 90° - \tfrac{1}{2}(G + G')$$

Finalmente, si el limbo está numerado por cuadrantes, los cuatro ceros estarán en A, B, C, y D, y despues de invertido el instrumento, en $A'\,B'\,C'$ y D'. Entónces la lectura de la segunda posicion es $G' = C'\,O\,G'$, por lo que la expresion de z es: $z = 90° - (G' + g + c)$. Como la primera lectura es siempre $z = G + g + c$, resulta:

$$z = 45° + \tfrac{1}{2}(G - G') \qquad g + c = 45° - \tfrac{1}{2}(G + G')$$

Esta última disposicion de los ceros es la mas frecuente en los teodolitos astronómicos llamados *altazimutes*, y se ve que equivale á indicar distancias zenitales en una posicion y alturas en la otra, pues si g y c fueran nulos, la segunda lectura daria $z = 90° - G'$. La misma disposicion presentan los círculos verticales de los teodolitos americanos.

Todo lo que precede demuestra que sea cual fuere el órden en que estén numerados los clisímetros, la doble observacion elimina completamente los errores g y c, al mismo tiempo que suministra el valor de su suma, la cual una vez conocida puede servir de correccion á todas las observaciones que se hagan en una sola posicion del círculo. A la verdad, de esta manera no se obtiene individualmente el valor de g y el de c; pero tampoco hay interes en obtenerlos así, puesto que ambos obran del mismo modo en cada observacion, y por tanto deben considerarse como un solo error. Si los he considerado separadamente es para hacer notar que g depende de la posicion del nivel respecto del círculo, y c de la que tenga la retícula respecto de la alidada, quiere decir, que si se mueven los tornillos propios del nivel variará el primer error, así como se alterará el valor de c si se cambia de lugar la interseccion de los hilos. De aquí se infiere que es posible destruir el error, al ménos cuando es pequeño. Supongamos, en efecto, que la retícula se haya centrado de antemano, y que fija la alidada al limbo, sea este susceptible de movimiento en su mismo plano al derredor de su eje central. Entónces, si en la primera posicion del clisímetro se fija la alidada en la graduacion conocida...... $G + g + c$; se mueve despues todo el círculo hasta que el objeto M quede en la interseccion de los hilos; y si fijado el instrumento en esta posicion se mueve el nivel hasta que vuelva á indicar la horizontalidad perfecta, se habrá destruido el efecto del error compuesto $g + c$, aun cuando realmente exista cada uno de los componentes, consiguiéndose así que al hacer coincidir los ceros del limbo con los de la alidada quedará vertical ú horizontal, segun el caso, la línea de colimacion del telescopio, siempre que el nivel indique la horizontalidad.

Los instrumentos repetidores y muchos de los clisímetros que se usan en las operaciones topográficas están dotados del movimiento necesario para destruir el error conforme se ha explicado; pero como es difícil destruirlo completamente, y aunque por lo pronto se logre hacerlo, no subsiste por mucho tiempo sin alterarse esa correccion, me parece que es mejor determinarlo con frecuencia para llevarlo en cuenta, ó eliminarlo, que es lo mas seguro, por medio de la doble observacion. Esta es al ménos la práctica que se sigue al operar con los instrumentos de precision que se usan en las observaciones delicadas de la Geodesia y de la Astronomía.

244º En todo el razonamiento anterior se ha supuesto que al hacer las observaciones, permanece fijo el limbo y la alidada es la que se mueve con el telescopio; pero el mismo se haria evidentemente suponiendo fija la alidada y móvil el círculo con el anteojo, que es la disposicion que por lo regular ofrecen los clisímetros de los teodolitos ingleses, americanos y alemanes. En los instrumentos franceses se ve á menudo la disposicion contraria, como sucede en el *eclímetro* (figura 193ª), que es un doble sector de círculo, y á veces un círculo entero, unido lateralmente á la caja de las brújulas francesas, ó colocado en el centro de las inglesas.

En el eclímetro el anteojo CD está invariablemente unido á la alidada y es susceptible de girar al derredor del centro O del arco graduado. La alidada lleva vernieres en sus extremos, que comunmente aproximan á $1'$ las lecturas angulares. Estos vernieres son dobles á fin de que puedan servir para eliminar algun error de excentricidad que hubiere, leyéndose ambos al efecto, ya sea que el objeto observado quede arriba ó abajo de la linea horizontal $A\ B$, en la cual están los ceros del limbo si el instrumento dá alturas, ó la cifra $90°$ si dá distancias zenitales.

Perfectamente rectificado el eclímetro, debe tener las condiciones siguientes: 1ª El nivel $a\ b$ ha de ser perpendicular á la columna vertical del instrumento. 2ª La linea de colimacion debe coincidir con el eje de figura del anteojo. 3ª La misma linea debe ser paralela al nivel cuando coincidan los ceros de la alidada con los del limbo.

Las dos primeras condiciones se comprueban como se ha dicho al exponer las rectificaciones de los niveles (pág. 412ª), haciéndose las correcciones de un modo idéntico, y la tercera aplicando el método de la doble observacion angular para determinar el error $g + c$, con el fin de llevarlo en cuenta ó de nulificarlo moviendo el limbo con los tornillos de que está provisto con ese objeto, y en seguida el nivel con los de su armadura. Debe notarse, sin embargo, que como la graduacion del eclímetro está generalmente numerada hácia uno y otro lado de la linea $A\ B$, y en direcciones opuestas, es preciso aplicar las fórmulas que se expusieron en el núm. 242. Designando, pues, por a el ángulo de altura que se busca, y por e el error $g + c$, se tendrá:

$$a = \tfrac{1}{2}(G + G') \qquad e = \tfrac{1}{2}(G - G')$$

Ejemplo. Supongamos que teniendo el limbo del eclímetro á la derecha, y cuando el nivel señala la horizontalidad, se ha dirigido una visual á un objeto distante, dando el promedio de los dos vernieres $G = 5°\ 19'\ 00''$; que en seguida se ha llevado el eclímetro á la izquierda y se ha hecho girar el anteojo al derredor del centro del limbo para volverlo á dirigir á la señal, despues de restablecer la burbuja en el centro del tubo por medio de los tornillos del tripié Admitiendo que en esta segunda posicion hubieran dado los vernieres, $G' = 4° \ 53' \ 30''$, tendriamos:

$$a = \frac{10° \ 12' \ 30''}{2} = 5° \ 6' \ 15'' \qquad e = \frac{0° \ 25' \ 30''}{2} = 0° \ 12' \ 45''$$

La cantidad e que indica el punto de la graduacion en que debia estar el cero, será la correccion que tendrán que sufrir las observaciones hechas en una sola posicion del eclímetro, sustractiva en este caso á las lecturas de la primera y aditiva á las de la segunda, puesto que $G - e = G' + e$.

Los eclímetros de los teodolitos ingleses tambien tienen por lo regular numerada su graduacion hácia uno y otro lado del centro, de manera que se sigue el mismo método para determinar el valor de e, que es la indicacion del limbo cuando es horizontal la linea de colimacion del telescopio, suponiendo vertical la columna.

245º En el cálculo de las verdaderas alturas ó distancias zenitales se ha admitido que en las dos posiciones inversas del instrumento indica la burbuja del nivel una perfecta horizontalidad y aunque en la práctica casi nunca se verifica así con todo rigor, siempre será un hecho que tal hipótesis es cierta en las operaciones topográficas atendiendo al grado de precision que demandan, cuando se ha tenido cuidado de rectificar el instrumento, corregir sus niveles y establecer verticalmente la columna. En las observaciones que requieren mayor exactitud, como son las geodésicas y las astronómicas, es preciso tomar en cuenta los pequeños errores que pueden quedar despues de la rectificacion de los instrumentos, pues hemos dicho que es casi imposible destruirlos del todo; y con el fin de completar la teoría de los clisímetros indicaré la manera de llevar en cuenta las pequeñas variaciones de la burbuja en la medida de los ángulos verticales.

En el Capítulo anterior se ha visto que siendo x el ángulo que forma la columna del instrumento con la verdadera linea vertical, se tiene:

$$x = \frac{(o + o') - (e + e')}{4} \, v$$

siendo o y o' las indicaciones de la burbuja hácia un lado y e y e' hácia el otro. Dijimos tambien que cuando x resulta positivo la columna se inclina hácia la parte en que las lecturas fueron e y e'. Considerando ahora á x como la correccion necesaria para reducir al verdadero zenit las distancias angulares que suministra el instrumento referidas á la direccion de su columna, convendrémos en designar por o y o' las indicaciones del extremo de la burbuja que queda del lado del observador, ó lo que es lo mismo, del lado del ocular del telescopio, y por e y e' las del extremo que queda hácia el objeto observado, ó sea hácia el objetivo del telescopio. Entónces siendo x positivo, la prolongacion de la columna del instrumento irá á encontrar la esfera celeste entre el zenit verdadero y el punto que se observa, de suerte que la adicion de esa cantidad con su signo á la distancia zenital que dá el instrumento, suministrará ese ángulo referido al zenit real.

Por ejercicio calculemos las observaciones siguientes ejecutadas con un altazimut. Con el limbo á la derecha daba este instrumento distancias zenitales, y alturas con el limbo á la izquierda. Designando las primeras por b, las segundas por a, y atendiendo á las fórmulas del núm. 243, la verdadera distancia zenital, será:

$$z = 45° + \tfrac{1}{2}(b - a) + \tfrac{1}{4}\big((o + o') - (e + e')\big)\, v$$

Las observaciones dieron:

		NIVEL. OCULAR.	OBJETIVO.
A la derecha............	$b = 71° \; 59' \; 29''$...............	68	62
A la izquierda..........	$a = 18 \quad 4 \quad 10$...................	66	63
		$o + o' = 134$	$e + e' = 125$

Como cada division del nivel valia $1''$, tendrémos:

$$\tfrac{1}{2}(b - a) = +\ 26°\ 57'\ 39''.5$$
$$45$$
$$71°\ 57'\ 39''.5$$
$$\text{Nivel}\ldots\ldots \frac{134 - 125}{4} = \quad +\ \ 2\ .2$$
$$z = 71°\ 57'\ 41''.7$$

El altazimut con que practiqué las observaciones anteriores permitia hacer las lecturas angulares con aproximacion de 1″, y por eso no debe despreciarse la correccion originada por el estado del nivel, aunque es bastante pequeña; pero este ejemplo manifiesta la inutilidad de hacer correcciones de esa clase cuando la aproximacion angular de los instrumentos no guarda comparacion con ellas. Ès cierto que los niveles que se usan en los instrumentos topográficos no son generalmente muy sensibles, pues suponiendo de 0^m001 la extension de sus divisiones, casi nunca es inferior su valor angular á 6″ ú 8″; pero aun admitiendo que valieran 15″, se ve que la desviacion de una ó dos divisiones nada significaria respecto de la aproximacion con que dán los ángulos, la cual es pocas veces inferior á 30″.

246? Para apreciar la sensibilidad de los niveles de aire, y sobre todo para medir con ellos la pequeña inclinacion de las columnas de los instrumentos, hemos visto que es necesario conocer el valor angular de las divisiones de su escala; y habiendo ya expuesto la parte mas esencial de la teoría de los clisímetros, indiquemos el modo de aplicarlos á la determinacion de ese valor.

Desde luego conviene advertir que para hacerlo con buen éxito es preciso servirse de un clisímeto cuya graduacion permita leer con mucha aproximacion los ángulos, en atencion á que las escalas de los niveles sòn poco extensas y es siempre pequeño su valor angular. Una aproximacion de 20″ por lo ménos es indispensable en el clisímetro para medir la sensibilidad de un nivel de 20^m á 30^m de radio, y á medida que este aumenta, se requiere mayor aproximacion en la lectura de los ángulos.

Asentado esto, supongamos que se trate de hallar el valor angular *v* del nivel mismo de un clisímetro. Se comenzará por visar con el telescopio un objeto distante y bien definido, y luego que se tiene exactamente en la interseccion de los hilos, se leen las indicaciones *o* y *e* de los extremos *ocular* y *objetivo* de la burbuja, y en seguida el ángulo que señalan los vernieres, adoptando su promedio en caso de alguna pequeña diferencia. Sin tocar para nada la parte superior del instrumento, se comunica despucs á la columna una ligera inclinacion sirviéndose al efecto de alguno de los tornillos del pié, de manera que la burbuja del nivel se detenga en otras divisiones de la escala. En virtud de este movimiento el objeto visado al principio ya no se encontrará en la interseccion de los hilos de la retícula; luego si con el tornillo de aproximacion de la alidada se restablece la coincidencia del objeto con la linea de colimacion, y se leen inmediatamente las nuevas indicaciones de la burbuja y el ángulo que señalan los vernieres, la diferencia de estas lecturas con las primeras, medirá la inclinacion que se dió á la columna. Una de esas medidas está expresada en partes ó divisiones del nivel y la otra en segundos, por lo cual su comparacion suministra desde luego el valor angular de la primera, y en consecuencia el de v. Sean, en efecto, G y G' las dos lecturas del círculo, o' y e' las nuevas indicaciones de la burbuja, y se tendrá que la extremidad que está hácia el ocular ha recorrido $o - o'$ divisiones y $e' - e$ la del lado del objetivo, diferencias que deben resultar iguales si el tubo del nivel está bien calibrado y tiene una curvatura uniforme. En el caso de no verificarse exactamente así, se tomará el término medio $n = \frac{1}{2}\big((o - o') + (e' - e)\big)$, por movimiento de la burbuja, correspondiente á $G - G'$ segundos del círculo, y establecerémos la ecuacion: $n\,v = G - G'$, de la que se obtiene:

$$v = \frac{G - G'}{n}$$

Ejemplo: Con un círculo vertical provisto de dos vernieres, cada uno de los cuales daba 10″ de aproximacion, hice las siguientes observaciones:

CLISIMETRO.	$G - G'$	NIVEL. Oc.	NIVEL. Ob.
98° 17′ 20″		7	21
,, 18 5	45″	15	13
,, 18 35	30″	20	8

Combinando la primera con la segunda y despues esta con la tercera, se obtiene:

$$8\,v = 45'' \qquad v = 5''.6 \qquad\qquad 5\,v = 30'' \qquad v = 6''.0$$

Puede adoptarse el resultado medio $v = 5''.8$, y teniendo $0^m.001$ cada division de la escala, el nivel tendrá $35^m.6$ de radio.

Si se quiere medir el valor de v de otro nivel que no sea el del clisímetro, se aplica el mismo procedimiento atándolo en la armadura de este ó en cualquiera otra parte del círculo, de tal modo que no pueda tener movimientos independientes, y que solo varien sus indicaciones con la inclinacion de la columna. En otro lugar dijimos que tambien puede hacerse uso de un estadal colocado á una distancia conocida *k*, observando el efecto *d* del desnivel dado á la columna, y que siendo *n* el movimiento de la burbuja en partes de la escala, se tiene: $v = \frac{d}{n\,k \text{ sen. } 1''}$.

247º En todo lo relativo á las rectificaciones de los instrumentos, se habrá notado que es muy frecuente servirse de señales distantes que ofrezcan un punto de mira perfectamente determinado; pero tambien se sigue un método que ademas de ser muy exacto, tiene la ventaja de ser aplicable en circunstancias en que no pueda hacerse uso de un objeto distante. Consiste en servirse de otro anteojo como *colimador*. Para que se comprenda bien el fundamento de este método, recordemos que la longitud focal de un telescopio varia con las distancias del objeto que se observa; pero que para cada lente hay cierto punto llamado *foco principal* ó *foco estelario*, en que van á concurrir los rayos luminosos que emite un objeto situado á una gran distancia, ó como se dice comunmente, á una *distancia infinita* respecto del radio del lente, y que por esta razon se llama tambien foco de los rayos paralelos. Recíprocamente, si se supone que en ese punto se coloca un cuerpo luminoso, los rayos de luz que caen sobre el lente saldrán de él en haces paralelos, de suerte que si en su direccion se interpone otro lente, al atravesarlo volverán á hacerse convergentes para reunirse en el foco estelario de este último, formando en él la imágen del punto luminoso que he supuesto en el foco principal del primero. Se ve, pues, que esto dá el mismo resultado que si la imágen así formada fuese la de un objeto situado á una distancia infinita, ó en otros términos, que el foco de cada uno de los lentes puede considerarse como un punto infinitamente distante respecto del otro, aun cuando entre ambos solo medien algunos centímetros.

Segun esto, si las retículas de dos telescopios se han colocado en sus focos estelarios, y dirigidos sus objetivos uno hácia el otro estando los tubos próximamente en la misma linea, se aplica la vista en el ocular del primero, á la vez que se vea directamente la retícula de este, se distinguirá tambien la imágen de la retícula del segundo, la cual suministrará un punto de mira perfectamente determinado y aplicable á todos los usos en que es preciso servirse de una señal muy distante.

En cualquiera telescopio se marca sobre el tubo por medio de una linea el lugar hasta donde se necesita prolongarlo para distinguir con claridad la imágen de un objeto muy lejano, y entónces la distancia del objetivo á la retícula es la longitud focal estelaria. Por consiguiente, basta sacar hasta esa linea ó marca la parte del tubo que se prolonga, y se tendrá arreglado el anteojo para la vision distinta de objetos lejanos, ó segun las anteriores explicaciones, para que los rayos que parten de la retícula salgan paralelos del objetivo. En este estado podrá servir el telescopio como colimador, con tal que su retícula reciba suficiente luz para que se vea claramente al traves del anteojo que se trata de rectificar, el cual debe tambien arreglarse para la vision de objetos lejanos, á fin de que se forme en su foco principal, que será el lugar que ocupe su retícula, la imágen de la del colimador.

De este modo, para centrar la linea de colimacion del telescopio de un teodolito ó de un nivel, para determinar el error inicial $g + c$ de un clisímetro, para medir el valor angular de las divisiones de un nivel, &c., puede hacerse uso del anteojo de cualquiera otro instrumento dirigido hácia el que se va á rectificar, procediendo absolutamente lo mismo que se ha explicado en varias partes de este libro al exponer el modo de hacer las rectificaciones valiéndose de un punto distante.

248º Para terminar lo relativo á la teoría de los clisímetros, investiguemos qué influencia tiene en la medida de las distancias zenitales una pequeña desviacion que pueda haber en el limbo respecto del plano vertical que pasa por el punto de observacion y por el objeto observado. Hasta ahora, en efecto, se ha supuesto perfectamente vertical el plano del instrumento, pues la correccion originada por las lecturas del nivel, se refiere á la inclinacion que pueda tener la columna *en el plano vertical* que pasa por la señal observada; inclinacion que no debe confundirse con la del limbo del instrumento hácia uno ú otro lado de aquel plano. Sea S (fig. 194ª) la señal que se observa, $Z\ S\ C$ el plano vertical que pasa por S y por el punto de estacion C, $Z'\ S\ C$ el plano del clisímetro, y $Z\ Z'$ el arco trazado desde el verdadero zenit Z al zenit Z' del instrumento, perpendicularmente al plano de este. Designando por z' la distancia zenital $Z'\ S$ que dá el clisímetro, por d la desviacion $Z\ Z'$ y por z la distancia zenital $Z\ S$ que se busca, tendrémos:

$$\cos. z = \cos. z' \cos. d$$

La forma de esta ecuacion indica desde luego que para cualquiera valor determinado de d, la diferencia $z - z'$ crece al paso que disminuya la distancia zenital observada. Para hallar la expresion de esa diferencia, llamémosla x, con lo que se tiene $z = z' + x$; desarrollando el coseno de este ángulo é igualándolo con el valor precedente resulta:

$$\cos. z' \cos. x - \text{sen.}\, x\ \text{sen.}\, z' = \cos. z' \cos. d$$

Siendo en todos casos poco considerable la desviacion d, lo será con mas razon x cuando z' sea grande, como sucede generalmente en la práctica, y podrémos suponer $\cos. x = 1$, $\text{sen.}\, x = x\ \text{sen.}\, 1''$ para obtener:

$$x = \frac{2\ \text{sen.}^2\, \frac{1}{2} d \cot. z'}{\text{sen.}\, 1''}$$

Por medio de esta fórmula podrian corregirse las distancias zenitales, deduciendo el valor de d del ángulo que formase con el horizonte el eje horizontal á cuyo derredor gira el círculo ó la alidada, y el cual se obtendria con un nivel colocado sobre ese eje; pero tal correccion seria casi siempre inútil por su extremada pequeñez, atendiendo á que en la práctica z' difiere generalmente poco de 90°, y á que d seria solo de algunos minutos, aun cuando la verticalidad del limbo se estableciese á la simple vista. Suponiendo que d llegase á valer 1°, los valores de x correspondientes á diversas distancias zenitales, serian:

z'	x	z'	x	z'	x
45°	31″	60°	18″	75°	8″
50	26	65	15	80	6
55	22	70	11	85	3

Se ve que no obstante la magnitud considerable atribuida á d, el error x es del todo inapreciable con la aproximacion angular de los clisímetros topográficos, especialmente en los primeros 15° ó 20° de altura respecto del horizonte.

249º Los clisímetros cuya teoría se ha expuesto son los que mas se usan en las operaciones de la nivelacion; pero hay otro, inventado por el ingeniero Chézy, que difiere de los demas en que suministra el *declive* de una visual en lugar de dar como aquellos su inclinacion angular respecto del horizonte ó de la vertical.

En la nivelacion se llama *declive ó pendiente* de una linea á la diferencia de altura de dos de sus puntos, cuya distancia horizontal sea de 1^m, ó en general, á la diferencia de nivel correspondiente á la unidad de distancia. Por lo regular se mide el declive en partes decimales de la misma unidad, y así cuando decimos que un camino, por ejemplo, tiene 0.05 de pendiente, debe entenderse que asciende ó desciende á razon de $0^m.05$ por cada metro contado horizontalmente, ó bien á razon de 5 por 100 sea cual fuere la unidad de distancia. De aquí se deduce que conociendo la diferencia de nivel n entre dos puntos cuya distancia horizontal sea k, la pendiente de la linea inclinada que los une, tendrá por expresion:

$$p = \frac{n}{k}$$

Este modo de medir las inclinaciones equivale evidentemente al de indicaciones angulares, pues teniendo presente que las lineas n y k son los catetos de un triángulo rectángulo, si designamos por i el ángulo opuesto á n, que es el de inclinacion, hallarémos:

$$\tan.\, i = \frac{n}{k}$$

Esta ecuacion y la anterior dán: $p = \tan.\, i$, lo que indica que el declive de una linea es la tangente de su ángulo de inclinacion. La equivalencia anterior permite convertir la pendiente en inclinacion y vice versa.

El clisímetro de Chézy solo difiere del nivel representado en la fig. 183ª en que los bastidores que llevan las pínulas son desiguales en altura y en que las pínulas del bastidor mas alto pueden moverse verticalmente por medio de un tornillo. Se comprende que de esta manera es variable la inclinacion de la visual dirigida por la pínula fija y la interseccion de los hilos de la móvil, de suerte que si esta última tiene un vernier y se divide el bastidor en partes iguales, estando el cero de la division en la misma linea horizontal de la pínula fija, la indicacion de la móvil dará á conocer el declive de la visual.

La division del instrumento depende de la distancia d que hay de una pínula á la otra. Siendo en efecto a la altura del bastidor que se quiere dividir en partes iguales, y p la pendiente máxima que debe dar el clisímetro, se tiene: $a = dp$. Supongamos que d sea de $0^m.3$ en uno de estos instrumentos, y que se desee poder medir declives hasta de 25 por ciento. Se tendrá, pues, $p = 0.25$, y en consecuencia $a = 0^m.3 \times 0.25 = 0^m.075$. Dividiendo este espacio de $0^m.075$ en 25 partes iguales, por ejemplo, cada una de ellas corresponderia á 0.01 de pendiente, y tendria una extension de $0^m.003$. El vernier podria combinarse en seguida de tal modo que diera milésimos de pendiente, para lo cual bastaria dividir en 10 partes un espacio de $0^m.027$, que es el que abrazarian 9 divisiones de la escala del bastidor.

Otras combinaciones diversas podrian hacerse para obtener la misma aproximacion. Por lo regular los clisímetros franceses de este sistema tienen dividida en 40 partes la escala del bastidor, siendo su altura de $0^m.06$, y de $0^m.3$ la distancia de una pínula á otra, por lo que cada division representa 0.005 de pendiente. Ademas de esto, el vernier tiene 5 partes y en consecuencia dá milésimos de declive.

Como la condicion esencial para que el clisímetro dé con exactitud las pendientes es que sea horizontal la visual cuando coincidan los ceros del vernier y de la escala en la pínula móvil, es preciso comenzar por cerciorarse de si existe esa condicion. A este fin se nivela el instrumento y se visa una mira distante despues de establecer la coincidencia de los ceros. Se invierte en seguida el clisímetro y si ha variado la burbuja se restablece en su posicion primitiva, debiendo verificarse entónces que la nueva visual pase por el mismo punto de la mira. De no ser así, se corrige la mitad de la diferencia moviendo la pínula que hemos llamado fija; pero que es susceptible de un pequeño cambio de altura con el objeto de practicar esta correccion. Podria tambien comprobarse el instrumento por el método que consta en la página 410.

Para medir con este clisímetro la pendiente de una linea AB (fig. 195ª), se coloca en uno de sus extremos A, de modo que el ocular de la pínula fija a se halle en la vertical de A. En B se establece un estadal sobre el que se ha señalado una altura $Bb = Aa$, y se eleva la pínula movible hasta que la visual pase por b; entónces el vernier dará la pendiente que se busca. Cuando en lugar de ser ascendente es descendente el declive de la linea, como sucederia si se midiera desde B, se haria coincidir la pínula fija con la vertical de este punto, y se dirigiria la visual por la móvil, segun indica la figura.

El clisímetro de Chézy se usa principalmente para trazar en el terreno lineas de una pendiente dada, caso que se ofrece en la demarcacion de los puntos por donde debe pasar un camino, un canal, &c. El modo de conseguirlo es muy sencillo: situado el instrumento en A, se hace que el vernier indique el declive que se desea, y con un estadal en que se ha marcado la altura $A\,a$, se busca por tanteo un punto B, tal que establecida en él la mira, se vea la señal b en coincidencia con la interseccion de los hilos. Es claro, efectivamente, que la visual $a\,b$ será paralela á la linea $A\,B$ del terreno.

CAPITULO IV.

NIVELACION TOPOGRÁFICA.

250º Habiendo expuesto la teoría de los principales instrumentos y la manera de rectificarlos, pasemos á la práctica de la nivelacion. Esta puede ser *simple ó compuesta.* Se llama *simple* cuando la diferencia de altura ó el desnivel entre dos puntos se determina desde una sola estacion, ó sea sin variar de lugar el instrumento, y *compuesta* cuando se hacen varias estaciones relacionando unos con otros los puntos observados desde cada una.

Nivelacion simple.—Dijimos al principio que desde un punto A (fig. 196ª) puede determinarse la diferencia de nivel $B\,O = n$, de otra estacion B en que se ha colocado un estadal, conociendo la indicacion de este; pero como la altura $M\,O = h$ del nivel influye en el resultado, si designamos por a la lectura de la mira, por k la distancia horizontal de A á B y por m el coeficiente $\frac{0.5 - c}{R}$, tendrémos:

$$n = h - (a - m\,k^2)$$

Si el punto observado fuese B' mas bajo que A, la indicacion de la mira seria $a = B'\ M - m\ k^2$, y el desnivel $B'\ O$ tendria por valor:

$$n = (a - m\ k^2) - h$$

Se ve que las dos expresiones anteriores solo difieren en el signo, y manifiestan que la diferencia de nivel se obtiene en general por la diferencia entre la altura del instrumento y la indicacion de la mira corregida por el nivel aparente y la refraccion. Considerando positivo el desnivel entre dos puntos cuando el que se observa está mas elevado que el de estacion, darémos siempre á la ecuacion la forma $n = h - (a - m\ k^2)$, á reserva de atender en las aplicaciones á los valores de sus elementos para asignar al resultado el signo que le corresponda.

Comunmente en la práctica se escoge para colocar el instrumento un punto intermedio entre aquellos cuya diferencia de nivel se trata de determinar, con el objeto de eliminar la altura h de la visual. Sean A y B (fig. 197ª) estos puntos. El nivel se coloca en P en la direccion de $A\ B$ ó fuera de ella, y despues de establecer la burbuja en el centro del tubo, se dirige sucesivamente la visual á los estadales situados en A y B, anotando sus indicaciones $A\ H = a$ y...... $B\ H' = b$. Si se designan por k y k' las distancias del instrumento á los puntos A y B, las alturas de estos respecto de aquel serán:

$$n' = h - (a - m\ k^2) \qquad n'' = h - (b - m\ k'^2)$$

cuya diferencia suministrará la altura n de B respecto de A, á saber: $B\ Q = B\ O - Q\ O$, ó bien:

$$n = a - b - m\ (k^2 - k'^2)$$

Un resultado negativo indicaria que B estaba mas bajo que A, pues es claro que en el punto mas elevado daria la mira una indicacion menor que en el mas bajo.

Aunque el cálculo del último término de la fórmula anterior es sumamente sencillo, conviene evitarlo porque supone la necesidad de medir las distancias del instrumento á los estadales; pero la ecuacion manifiesta que para conseguirlo basta situarse á igual distancia de los dos puntos cuya diferencia de altura se desea determinar. Tambien se eliminaria de ese modo el efecto de algun pequeño error que tuviese el instrumento, puesto que seria el mismo en las dos miras y desapareceria en la diferencia de sus indicaciones. No es necesario que sean exactamente iguales las distancias del nivel á los dos puntos observados: es suficiente que difieran poco, y esto siempre puede apreciarse á la simple vista. Estableciéndose, pues, en cualquiera punto de la perpendicular levantada hácia la parte media de la direccion que determinan los puntos observados, se llenará la condicion necesaria para que el valor de n quede reducido á $a - b$, é independiente de las pequeñas inexactitudes que pueda tener el nivel.

251º **Nivelacion compuesta.**—Cuando el alcance del instrumento no es bastante para poder observar desde una sola estacion los puntos extremos de la linea que se trata de nivelar, ó cuando los accidentes del terreno exigen la determinacion de algunos puntos intermedios, es necesario recurrir al método de nivelacion compuesta, que no es otra cosa mas que una serie de nivelaciones simples.

Sean A, B, C, D, E, &c., los puntos elegidos como mas notables por ser aquellos en que el terreno varia sensiblemente de inclinacion, y que para mas generalidad supondré en diversas direcciones. Admitiendo igualmente que se practique la nivelacion de A hácia E, situarémos dos estadales en A y B, é instalarémos el instrumento en un punto cualquiera P de la perpendicular que divida á $A\ Q$ en dos partes iguales con el objeto de evitar las correcciones de que se ha hecho mencion. Despues de arreglado el nivel se observarán las miras apuntando sus indicaciones a y b, y practicado esto, se trasladará á C el estadal que estaba en A, y el instrumento á la segunda estacion P' elegida respecto de B y C lo mismo que la primera respecto de A y B. La persona que tiene el estadal B lo vuelve hácia el observador á fin de que este lea y apunte su indicacion a' y en seguida la de C que designaré por b'. De esta manera se prosigue de estacion en estacion hasta la última, en que se hace la lectura del estadal colocado en el punto extremo de la linea.

Debe notarse que en cada estacion tal como P', se observan dos puntos B y C, estando uno de ellos C hácia adelante en el sentido de la marcha, y el otro B hácia atras, de manera que este último fué el punto situado hácia adelante en la estacion anterior P. Con el fin de distinguir una de otra las dos observaciones que se hacen en cada estacion, llamaré observacion ó lectura *primera* la que se hace visando el punto que se deja atras, tal como B desde P', y observacion ó lectura *segunda* la que produce la visual dirigida á C, que es el punto que se presenta hácia adelante. Como la diferencia de las lecturas que se obtienen en cada una de las estaciones dá el desnivel de los puntos observados, estableceremos, para determinarlo, la regla general de restar la lectura segunda de la primera, y si el resultado es negativo manifestará que el punto situado hácia adelante está mas bajo que el otro.

Si se quiere calcular el desnivel de los puntos extremos A y E de la linea, ó en general, el de dos puntos separados por varias estaciones, se hará la suma algebraica de las diferencias de nivel parciales, y el resultado final será la cantidad que se busca. Designando por a, a', a'', &c., las lecturas primeras, por b, b', b'', &c., las segundas y por n, n', n'', &c. los desniveles parciales, se tendrá:

B respecto de A................ $n = a - b$
C respecto de B................ $n' = a' - b'$
D respecto de C................ $n'' = a'' - b''$
E respecto de D................ $n''' = a''' - b'''$
&c. &c.

y el desnivel total será, pues:

$$N = (a + a' + a'' + a''' + \&c.) - (b + b' + b'' + b''' + \&c.)$$

lo cual indica que para hallarlo se sumarán todas las lecturas primeras, de esta suma se restará la de todas las segundas, y el resultado suministrará la diferencia de nivel, positiva ó negativa, segun que de los dos puntos que se comparan el último esté mas elevado ó mas bajo que el primero.

La regla puede tambien deducirse de la figura, puesto que se tiene:

$$N = EF = Fp - pm + mq - qE$$

y como $Fp = a - b$; $pm = b' - a'$; $mq = a'' - b''$; y $qE = b''' - a'''$, resultará el mismo valor de N por la sustitucion.

252º El apunte que se va formando al ejecutar las operaciones debe contener las estaciones, los puntos que desde ellas se observan y las lecturas primera y segunda de la mira. Estos datos son los que bastan segun las reglas anteriores para determinar las diferencias de alturas de cualesquiera puntos de una linea; pero como en muchos casos es útil y en otros necesario conocer las direcciones en que se ha ejecutado la nivelacion, presentarémos como modelo el registro de una operacion completa en que consten los elementos necesarios para trazar la proyeccion horizontal de la linea nivelada. El siguiente se refiere á la figura 198ª

NIVELACION DE..............

ESTACIONES.	Puntos observados.	MIRA.	Diferencias parciales.	RUMBOS.	DISTANCIAS.	NOTAS.
I.	1 2	0m161 3. 045	—2m884	169° 30′ 354 30	31m1 41. 3	El punto (5) está en el arroyo.
II.	2 3	0. 366 3. 432	—3. 066	173 12 353 6	32. 0 39. 5	
III.	3 4	0. 445 2. 656	—2. 211	172 36 350 30	26. 6 26. 6	
IV.	4 5	1. 082 1. 850	—0. 768	171 18 353 42	47. 5 64. 5	
V.	5 6	2. 680 0. 116	+2. 564	172 00 353 18	83. 1 32. 0	
VI.	6 7	3. 510 0. 278	+3. 232	175 30 345 12	59. 5 24. 3	
VII.	7 8	3. 485 0. 210	+3. 275	172 30 352 12	38. 6 27. 7	

Esta nivelacion con otras varias se hizo al través de un valle estrecho en que se iba á construir un dique que represase las aguas de un arroyo. Como el terreno era de mucha pendiente y los estadales solo tenian 4^{m} de altura, me ví precisado á establecerlos á muy cortas distancias del instrumento, sin poder llenar en todos casos la prescripcion de que el nivel quedase á igual distancia de los puntos observados desde cada estacion, á causa de la frecuente interposicion de arbustos que impedian la vista. Sin embargo, la pequeñez misma de las distancias evita la necesidad de tomar en cuenta los efectos del nivel aparente y de la refraccion. Los rumbos se tomaron con una brújula que tenia el instrumento, y las distancias con el telescopio usado como estadia.

Para hallar, por ejemplo, la diferencia de nivel entre los puntos *1* y *5*, tendriamos.

LECTURAS PRIMERAS.	LECTURAS SEGUNDAS.		
0^m161	3^m045		
0. 366	3. 432		
0. 445	2. 656	Suma de las lecturas primeras =	2^m054
1. 082	1. 850	,, ,, ,, ,, segundas =	—10. 983
2. 054	10. 983	$N =$ —	8^m929

El mismo resultado se hallaria sumando las diferencias de nivel parciales correspondientes á las cuatro primeras estaciones. Determinemos de esta manera la diferencia de altura de los puntos extremos *1* y *8*.

$$\begin{array}{r} -\ 2^m884 \\ -\ 3.\ 066 \\ -\ 2.\ 211 \\ -\ 0.\ 768 \\ +\ 2.\ 564 \\ +\ 3.\ 232 \\ +\ 3.\ 275 \\ \hline N = +\ 0^m142 \end{array}$$

253º Todos los puntos que se observan desde la misma estacion quedan evidentemente referidos al plano horizontal que señala el instrumento, ó por mejor decir, á la superficie de nivel tangente á ese plano; pero segun vimos (pág 398ª) pueden referirse á otra cualquiera cuya posicion esté dada con respecto á la del instrumento, y esta propiedad de las superficies de nivel permite comparar las elevaciones relativas de todos los puntos, no solo de una sino de varias nivelaciones practicadas á diversas alturas. Por lo regular la superficie general de comparacion es la de las aguas del Oceano en su altura media, y para referir á ella todos los puntos de una nivelacion es necesario conocer la elevacion ó *altura sobre el nivel del mar* de un punto por lo ménos del terreno, ó la del plano del instrumento en alguna de las estaciones.

Sin embargo, en las operaciones que se ofrecen comunmente para la conduccion de aguas, trazo de caminos, estudio de proyectos, &c.,

que demandan el conocimiento del *corte ó perfil* del terreno, no es indispensable hacer la referencia al nivel del mar, sino que es mas cómodo para las construcciones adoptar una superficie de comparacion que diste poco de los puntos observados. Se supone generalmente que esa superficie ó *plano general*, adoptando la expresion consagrada por el uso, pasa á una distancia cualquiera de uno de los *planos particulares* que señala el instrumento en cada estacion; pero tal, sin embargo, que todos los puntos del terreno nivelado queden situados de un mismo lado, esto es, ya sea mas altos ó mas bajos que el plano general, con el fin de evitar que resulten con distintos signos sus distancias á este, que se llaman tambien *acotaciones.* (*)

Supongamos que se haya asignado arbitrariamente la distancia $HN=D$, del plano general NN' al particular HH' de la estacion P (fig. 197ª). Es claro que $D+a$ y $D+b$ serán las acotaciones de los puntos A y B con respecto á aquel plano. Para hallar las de los otros será preciso determinar las distancias del plano general á los particulares de las diversas estaciones, y como se asignó la cantidad D al primero, bastará encontrar la altura del segundo respecto de este, la del tercero respecto del segundo, &c., y cada resultado se combinará con la distancia del plano anterior. Para calcular la altura del plano particular de una estacion respecto del de la precedente, se resta de la lectura primera hecha en la estacion de que se trata, la segunda de la estacion que antecede, y el resultado con su signo expresará dicha altura. Así, por ejemplo, el plano particular que señaló el nivel en P' tendrá la elevacion $a'-b$ respecto de HH'; el de P'' estará elevado respecto del de P' la cantidad $a''-b'$ y así sucesivamente. Esta altura restada con su signo de la distancia del plano general al particular de la estacion anterior, dará tambien la distancia del general al plano particular de la estacion que se trata, al ménos cuando el plano general se haya supuesto mas alto que los particulares; porque en el caso contrario será una suma y no una resta la que suministre las distancias. Así llamando D', D'', D''',

(*) La palabra *acotacion* se usa en México, acaso con alguna impropiedad, para designar la altura de un punto respecto del plano de comparacion. Tambien se le llama *altitud*, especialmente si la superficie de referencia es la del mar. No creo que haya necesidad de esta última, sin duda tomada del frances, teniendo en castellano la palabra *altura.*

&c., las distancias del plano general á los particulares de la segunda, tercera, cuarta, &c. estaciones, tendrémos:

Para la primera.............	D
Para la segunda.............	$D' = D \mp (a' - b)$
Para la tercera.............	$D'' = D' \mp (a'' - b')$
Para la cuarta.............	$D''' = D'' \mp (a''' - b'')$
&c.	&c.

Una vez obtenidas estas distancias se hallan las acotaciones de los puntos observados desde cada estacion, sumando con aquellas ó restándoles las indicaciones correspondientes de la mira, segun que el plano general se haya hecho pasar mas alto ó mas bajo que los particulares.

Ninguna dificultad presentan todos esos cálculos; pero para evitar equivocaciones es conveniente hacerlos con cierto órden, formando por ejemplo una tabla como la siguiente, que se refiere á la nivelacion representada en la figura 198ª, cuyos datos se repiten para que sirvan de ejercicio.

ESTACIONES.	Puntos observados.	LECTURAS.	Planos particulares.	ACOTACIONES	NOTAS.
I.	1 2	0m161 3. 045	10m000	9m839	El plano general pasa 10m mas abajo que el particular de la primera estacion.
II.	2 3	0. 366 3. 432	7. 321	6. 955	
III.	3 4	0. 445 2. 656	4. 334	3. 889	
IV.	4 5	1. 082 1. 850	2. 760	1. 678	
V.	5 6	2. 680 0. 116	3. 590	0. 910	
VI.	6 7	3. 510 0. 278	6. 984	3. 474	
VII	7 8	3. 485 0. 210	10. 191	6. 706 9. 981	

Como en este caso el plano de comparacion se supuso 10m mas bajo que el de la primera estacion, llenarémos de este modo la cuarta columna de la tabla:

Distancia del segundo plano...........	$10^m000 + (0^m366 - 3^m045) =$	7^m321
,, ,, tercer ,, ...	$7.321 + (0.445 - 3.432) =$	4.334
,, ,, cuarto ,, ...	$4.334 + (1.082 - 2.656) =$	2.760
,, ,, quinto ,, ...	$2.760 + (2.680 - 1.850) =$	3.590
,, ,, sexto ,, ...	$3.590 + (3.510 - 0.116) =$	6.984
,, ,, sétimo ,, ...	$6.984 + (3.485 - 0.278) =$	10.191

La formacion de la quinta columna es mas fácil todavía, pues se reduce á una simple sustraccion. Desde la estacion IV, por ejemplo, se observaron los puntos *4* y *5*, y en consecuencia sus acotaciones serán:

La del punto *4*............... $2^m760 - 1^m082 = 1^m678$
La del punto *5*............... $2.760 - 1.850 = 0.910$

Se comprende la ventaja de tener toda la nivelacion referida á un solo plano por la facilidad con que se comparan las alturas de dos ó mas puntos cualesquiera. Así, por ejemplo, el desnivel de los puntos *1* y *5* será:

Acotacion de *1*............ 9^m839
,, de *5*............ 0.910

$N = 8^m929$

La posicion del plano general hace que en este caso el punto de mayor acotacion sea el mas elevado; pero sucede lo contrario cuando se supone que el plano de comparacion pasa arriba del terreno nivelado, puesto que entónces se cuentan las acotaciones hácia abajo.

254º El conocimiento de las alturas relativas de todos los puntos respecto de una sola superficie de comparacion facilita mucho la representacion gráfica del *corte ó perfil* del terreno que se ha nivelado, quiere decir, de las intersecciones del terreno con los planos verticales que pasan por los puntos observados desde cada estacion. Las lineas de interseccion son, en efecto, las hipotenusas de triángulos rectángulos cuyos catetos son la distancia horizontal de los puntos comparados de dos en dos, y la diferencia de sus alturas. A la verdad cuando el nivel no se ha situado en la linea que une los dos puntos observados desde cada estacion, y solo se han medido sus distancias al instrumento, así como el ángulo que estos forman entre sí, no se obtendrán directamente las de un punto á otro; pero se calcularán fácilmente con esos datos, y por otra parte, nada impide la medida directa de esas distancias.

Sean ahora A, B, C,...... H (fig. 198ª) las proyecciones horizontales de los puntos observados. Sobre una linea horizontal indefinida $P\,P'$ que represente el plano general de comparacion ó referencia, tómense las partes $A'\,B' = A\,B$, $B'\,C' = B\,C$, $C'\,D' = C\,D$, &c., y por los puntos A', B', C', D'. &c., elévense perpendiculares $A'\,1$, $B'\,2$, $C'\,3$, &c., iguales respectivamente á las acotaciones de los puntos 1, 2, 3, &c., del terreno. La serie de lineas trazadas por los extremos de las perpendiculares representará el perfil del terreno referido á un solo plano vertical, pues aunque por lo general los diversos puntos observados se hallan en distintos planos segun lo mánifiesta la proyeccion horizontal, la construccion anterior supone que todos ellos se hacen girar al derredor de sus intersecciones comunes hasta colocarse en uno solo.

Cuando, como en el caso que representa la figura, las diversas direcciones $A\,B$, $B\,C$, $C\,D$, &c , en que se ha ejecutado la nivelacion forman entre sí ángulos muy obtusos, no hay inconveniente en trazar el plano $P\,P'$ paralelamente á la direccion general $A\,H$ de la linea nivelada, y en proyectar los puntos A, B, C, &c., por medio de perpendiculares á PP', obteniéndose de este modo A', B', C', &c.; pero entónces es preciso que el perfil vaya acompañado de la proyeccion horizontal ó plano del terreno, á fin de tomar en este las distancias horizontales y en aquel las verticales.

Las diferencias de alturas son por lo comun mucho mas pequeñas que las distancias horizontales, y por esto sucede frecuentemente que en un perfil construido con la misma escala que el plano casi no se perciben los accidentes verticales del terreno. Para evitar este inconveniente se construye casi siempre el corte con una escala doble, triple, cuádruple y hasta décuple; pues si bien es cierto que de esta manera quedan exageradas las diferencias de nivel y completamente deforme el perfil del terreno, se consigue en cambio una apreciacion gráfica mas exacta de sus accidentes, sin que por otra parte la deformacion que presenta el perfil á la vista influya para nada en la apreciacion numérica de las diferencias de nivel, con tal qne estas se midan con le escala de la construccion vertical, miéntras que las distancias horizontales se estiman con la escala de la proyeccion ó plano del terreno. En la figura 198ª se han construido las acotaciones con una escala diez veces mayor que la empleada en la construccion del plano $A\ B\ C \ldots\ldots H$ de la nivelacion.

Los cortes verticales son de inmensa utilidad para el estudio de ciertas obras cuyo establecimiento depende de la forma del terreno. Para el trazo y construccion de los caminos, por ejemplo, se hacen nivelaciones en la direccion de la vía proyectada, y tambien perpendicularmente á ella con el objeto de estudiar la configuracion del suelo en uno y en otro sentido y construir los perfiles longitudinales y trasversales para venir en conocimiento de los volúmenes, tanto de las escavaciones como de los terraplenes que haya necesidad de ejecutar para dar á la vía la forma y declive convenientes. En obras de esta naturaleza casi siempre tiene que sujetarse el ingeniero á cierto límite de pendiente establecido de antemano, y el objeto de su estudio consiste en hacer el proyecto de una construccion económica sin que sus lineas excedan del *maximum* fijado para los declives. Esta última condicion se llena fácilmente, pues se recordará que el declive de una linea depende de dos elementos que son el desnivel de sus extremos y la distancia horizontal comprendida entre ellos. En consecuencia si p' representa el límite superior de pendiente asignado á un camino, y se halla por la nivelacion que es n el desnivel de sus extremos cuya distancia horizontal es k, se deduce que el declive general de la linea será $p = \frac{n}{k}$; pero si p' es menor que p, se cumplirá la condicion establecida determinando el *desarrollo* k' de la vía por la ecuacion $k' = \frac{n}{p'}$. Entónces el camino no podrá trazarse en linea recta, sino en *zig-zag* formado de alineamientos rectilineos enlazados entre sí por medio de curvas de radio considerable. La eleccion de estas lineas parciales es lo que sirve despues de objeto al estudio del ingeniero; pero no entrando en el plan de este libro la exposicion de todos los usos de la nivelacion, el lector que desee conocerlos puede consultar las obras especiales de aplicacion.

255º El método general de nivelacion compuesta es susceptible de modificaciones que tienden á facilitar el trabajo de campo sin sacrificio de exactitud. Hay casos en que importa conocer las alturas relativas de un gran número de puntos, y aplicando el procedimiento general seria preciso hacer tambien un número considerable de estaciones. Sin embargo, si se eligen algunos puntos para practicar entre ellos la nivelacion compuesta tal como se ha explicado, pueden medirse las diferencias de alturas de los intermedios observándolos desde las estaciones en que se establezca el instrumento. Supongamos que *P* (fig. 199ª) sea una de esas estaciones, y *A* y *B* dos de los puntos escogidos para la nivelacion compuesta: si en otros lugares intermedios *a*, *b*, *c*, &c., se coloca sucesivamente el estadal, se observarán las alturas á que queda interceptado por el plano horizontal que describe el instrumento en *P*, de suerte que entre *A* y *B* se habrá ejecutado una nivelacion simple. Como al proseguir la operacion, el punto *B* debe enlazarse con el inmediato que se haya elegido para formar parte de la nivelacion compuesta, resulta que si entre *P* y *A* ó entre *P* y *B* existe algun pequeño error, tal como el que proviene del nivel aparente y de la refraccion, este error terminará entre *A* y *B* sin influir en los puntos subsecuentes; ó en otros términos, los puntos *A*, *B*, &c., de la nivelacion compuesta pueden considerarse como de rectificacion respecto de los puntos intermedios. Por otra parte, el error que se origina por la causa ántes mencionada apenas es de cosa de $0^m 01$ para una distancia de 400^m, de manera que si, por ejemplo, los puntos de rectificacion se escogen de modo que sus distancias al instrumento no excedan de unos 500^m, lo cual aun es conveniente por otras consideraciones, podrá tenerse plena certidumbre de que en las indicaciones del estadal en los puntos intermedios no deberá temerse error alguno de importancia práctica al prescindir de la correccion de nivel aparente y de refraccion.

La aplicacion de este método supone, sin embargo, que en toda la linea *A B* no haya desniveles muy fuertes, como se verifica generalmente en los terrenos propios para el trazo de caminos ó para la construccion de obras hidráulicas. De no ser así, es difícil que el plano horizontal del instrumento intercepte á una altura conveniente los estadales situados á lo largo de una linea de 400^m ó 500^m; pero aunque no sea posible llegar á ese límite de distancia, siempre resultará gran economía de estaciones practicando la misma operacion en espacios mas cortos, segun lo permitan las localidades. Si la direccion general del terreno en vez de ser horizontal, presenta una inclinacion poco variada, como lo indica la figura 200ª, se puede aplicar un método análogo al anterior practicando la operacion con un clisímetro en lugar de hacerla con un nivel. Despues de establecido el clisímetro en P, se visa el estadal del punto extremo B, á una altura $B\,m$ igual á la del centro $P\,n$ del instrumento. Es claro que la visual $m\,n$ será paralela á la direccion general de la linea $P\,B$, y si se visan tambien las estadales de los puntos intermedios sin variar la inclinacion del telescopio, sus indicaciones miden las distancias de la visual á los puntos a, b, c, &c. La graduacion que se lea en el clisímetro corregida por el error inicial si lo hubiere, dá á conocer el ángulo de altura $m\,n\,o$ ó la distancia zenital $Z\,n\,m$ de la linea $n\,m$. Designando por z este último ángulo, por k la distancia horizontal del instrumento á cualquiera de los puntos observados, por h la altura del centro del clisímetro y por m la indicacion de la mira, la diferencia de nivel respecto de P será:......................... $n = (k \text{ cot. } z + h) - m$. Esta fórmula supone que la distancia k sea bastante pequeña para no tener que llevar en cuenta la convergencia de las verticales de la estacion y del punto observado, lo cual es sensiblemente exacto cuando k no excede de 500^m ó 600^m; pero como á mayores distancias son inciertas las lecturas, inferimos que la fórmula precedente es aplicable á todos los casos en que puede hacerse uso de este método con buen éxito. Si z fuese mayor que 90°, lo que equivale á suponer que se ha colocado el clisímetro en la parte mas elevada de la linea, el desnivel tendrá por expresion............ $n = m - (k \text{ cot. } z + h)$, teniendo cuidado de dar á ~~tan. z~~ cot.z el signo que le corresponde.

Todo lo que precede manifiesta la extremada sencillez de las operaciones de la nivelacion topográfica, y solo me resta dar una idea del grado de exactitud que por su medio se puede alcanzar. El simple hecho de que las diferencias de nivel se obtienen por la diferencia de indicaciones de los estadales, basta para comprender que aunque á estas se les suponga algun pequeño error originado por la aproximacion de las lecturas ó por ligeras incorrecciones de los instrumentos, como tal error es probablemente el mismo para distancias iguales, se elimina casi del todo al practicar la sustraccion. Los resultados de todas las nivelaciones ejecutadas con esmero corroboran esta indicacion de la teoría, y para no hacer mencion mas que de trabajos recientes ejecutados por ingenieros mexicanos, puede citarse como prueba la comparacion de algunas nivelaciones hechas en el Valle de México. Entre otras figura la que se practicó entre las ciudades de México y Texcoco por los ingenieros D. Miguel Iglesias y D. J.

Antonio Peña. Estos topógrafos, hábiles en igual grado, de acuerdo con las instrucciones que tenian recibidas del director de las operaciones, partieron del mismo punto de la ciudad de México y se dirigieron á la de Texcoco rodeando el lago del mismo nombre, el primero por el lado del Sur y el segundo por el Norte. La distancia que cada uno recorrió en su nivelacion puede estimarse en poco mas de nueve leguas, ó sea en cerca de 40 kilómetros, y al reunirse en Texcoco hallaron una diferencia de solo $0^{m}05$ en la altura de esa ciudad deducida de sus respectivas operaciones. Hicieron tambien otra nivelacion en una distancia un poco mayor que 5 kilómetros, y sus resultados quedaron acordes con la diferencia de $0^{m}01$. En estas operaciones se establecian los estadales desde 80^{m} hasta 150^{m} del nivel, haciendo muchas veces la cuádruple observacion que se ha explicado en la pág. 414 á fin de eliminar los pequeños errores del instrumento.

256º A las operaciones de la nivelacion deben referirse los sondeos que se practican en los mares, lagos, rios, &c., con el fin de averiguar su profundidad ó de conocer la forma de su fondo. Los instrumentos de que se hace uso son estadales divididos si la profundidad no excede de 3^{m} ó 4^{m}, ó *sondas* en el caso contrario. Una sonda consiste en una cuerda dividida, en uno de cuyos extremos se ata un cuerpo pesado, que generalmente es un trozo de pirámide de plomo ó de cualquiera otro metal. En la base inferior del trozo hay un espacio hueco que se llena de sebo, con el objeto de formarse idea de la naturaleza del fondo por la impresion que dejan las rocas en aquella sustancia, ó por los fragmentos que se le adhieren.

Cuando es vadeable el receptáculo de agua que se trata de sondear, entra en él un hombre provisto de su estadal y lo va colocando verticalmente á distancias regulares y en direcciones determinadas. Las indicaciones que se obtienen hasta el nivel del agua son evidentemente las profundidades que corresponden á los puntos que ocupa el estadal. Como es importante fijar en los planos las posiciones de esos lugares, se determinan desde dos ó mas puntos de la orilla dirigiendo otras tantas visuales al estadal.

Si el receptáculo no es vadeable, se practica la operacion de una manera semejante sirviéndose de una embarcacion, y empleando e estadal ó la sonda, segun sea la profundidad del agua. Los lugares que va ocupando el bote se fijan desde la orilla como se dijo ántes, ó desde la embarcacion misma por medio de visuales dirigidas á puntos conocidos de la playa con una brújula de reflexion ó con cualquiera otro instrumento portátil y de pronto manejo. Otras veces se guia el bote por medio de alineamientos siguiendo las direcciones que indican algunos objetos fijos, ya sea del mar ó de la playa, como rocas, buques anclados, fortalezas, &c. En tales casos, para hacer el sondeo á distancias regulares en la linea que se sigue, se hace uso de la *corredera*, que es un instrumento que emplean los marinos para medir el movimiento ó velocidad de los navíos.

Los rios se sondean habitualmente á lo largo de una linea equidistante de ambas orillas, que se llama *eje*, y tambien en una direccion trasversal con el fin de conocer la seccion del cauce. En los rios de poca anchura se tiende un cordel de una á otra ribera, el cual estando dividido en metros ó en cualquiera otra unidad, y con la tension necesaria para que quede sensiblemente recto, sirve para indicar los puntos equidistantes en que debe echarse la sonda. Cuando las corrientes son rápidas influyen en la direccion de la sonda, desviándola bastante de la linea vertical, y como en tal caso daria indicaciones demasiado fuertes, debe hacérseles una correccion para obtener la verdadera profundidad. Con este fin se observa la direccion de la cuerda en la parte que queda fuera del agua, comparándola con la de una plomada que se suspende á su lado; pero de modo que el peso que la termina no entre en el líquido. Sea c la longitud de la cuerda fuera del agua, v la de la plomada contada desde la misma altura que c, y s la indicacion que dá la sonda: la profundidad correcta es $n = \frac{v}{c} s$.

Los resultados de un sondeo se inscriben en los planos hidrográficos por medio de cifras que indican las profundidas expresadas en metros, brazas, &c., puestas precisamente en los puntos á que corresponden. Cuando es variable el nivel de las aguas como sucede en el mar á consecuencia del flujo y reflujo, es preciso referir el sondeo á un nivel determinado, y este es generalmente el de las bajas mareas equinocciales. Esta precaucion es tanto mas esencial, cuanto que en algunos puertos ú otros lugares que por ser peligrosos demandan el conocimiento del sondeo, sufre la marea variaciones muy considerables que deben tenerse en cuenta para evitar el riesgo de un naufragio.

CAPITULO V.

NIVELACION TRIGONOMÉTRICA.

257º El método de medir las diferencias de nivel por medio de observaciones angulares, no dá en general resultados tan exactos como los que proporciona una nivelacion topográfica; pero presenta en cambio la ventaja de permitir mayor rapidez en las operaciones; y como en muchísimos casos no es indispensable una extremada precision, resulta que las nivelaciones trigonométricas adquieren grande importancia en la mayor parte de las aplicaciones usuales.

En la pág. 53ª se explicó el modo de medir las distancias zenitales con los instrumentos repetidores, y en el Capítulo III de la Nivelacion se ha expuesto tambien ampliamente la manera de hacerlo con toda clase de clisímetros de nivel fijo; por consiguiente pasarémos á desarrollar las fórmulas que se aplican en este género de operaciones, haciendo uso de la distancia zenital observada que designaré por z, suponiéndola siempre conocida, pues se dijo en otra ocasion que aunque el clisímetro dé directamente los ángulos verticales respecto del horizonte, se deduce fácilmente aquella cantidad por ser complementaria de estos.

Para tratar el problema con toda generalidad admitamos que la distancia de los puntos A y B (fig. 201ª), cuyo desnivel se trata de determinar, sea bastante grande para que no puedan suponerse paralelas sus verticales $A\,Z$ y $B\,Z'$, las cuales convergen hácia el centro de la tierra formando el ángulo C. Establecido esto, representando el arco $A\ O$ la superficie de nivel que pasa por A, la linea $B\ O$ será la altura que se busca de B respecto de A. Suponiendo que en A se mida la distancia zenital de B, el efecto de la refraccion atmosférica hará que este último punto se vea en B'; de manera que designando por z el ángulo que dá el instrumento, se tendrá..........

$z = ZAB'$, al que será prciso añadirle el valor r de la refraccion para obtener la verdadera distancia zenital $ZAB = z + r$.

En el triángulo ABO llamando k la cuerda AO, se tiene que el desnivel BO es:

$$n = k \frac{\text{sen. } A}{\text{sen. } B}$$

Para hallar los valores de los ángulos A y B en funcion de $z + r$ tenemos: $BAO = A = 180° - (ZAB + OAC) = 90° - (z + r - \frac{1}{2} C)$. Tambien se tiene: $ABO = B = ZAB - ACB = z + r - C$. Sustituyendo en la ecuacion anterior, resulta:

$$n = k \frac{\cos. (z + r - \frac{1}{2} C)}{\text{sen. } (z + r - C)} \quad \text{.........................} \quad (1)$$

Se ha dicho que el valor de la refraccion es proporcional al ángulo C de las verticales, de modo que siendo c un coeficiente constante, se tiene $r = c\,C$. Introduciendo este valor de r y haciendo para abreviar $u = (0.5 - c)\,C$, la expresion anterior puede escribirse así:

$$n = k \frac{\cos. (z - u)}{\text{sen. } (z - u - \frac{1}{2} C)}$$

Hagamos notar que el denominador es el seno de un ángulo que por lo regular difiere muy poco de 90°; y como por otra parte, aun para valores considerables de k es muy pequeño el ángulo C, se infiere que no se comete error de importancia al despreciar á $\frac{1}{2} C$, y entónces resulta:

$$n = k \cot. (z - u)$$

Desarrollando la cot. $(z - u)$, y multiplicando despues los dos términos del quebrado por cot. z, se obtiene sucesivamente:

$$n = k \frac{1 + \tan. z \tan. u}{\tan. z - \tan. u} = k \frac{\cot. z + \tan. u}{1 - \cot. z \tan. u}$$

Por ser z muy grande y u muy pequeño, el producto tan. u cot. z

es de segundo órden, y puede omitirse sin inconveniente alguno, con lo que el desnivel quedará reducido al valor:

$$n = k \cot. z + k \tan. u$$

El pequeño ángulo u depende de C, y como k es la cuerda de este último, se tiene $k = 2\,R \text{ sen. } \frac{1}{2}\,C$, siendo R el radio de la tierra. Atendiendo ademas á la pequeñez de C tomarémos $k = R\,C$, ó bien $C = \frac{k}{R}$, valor que introducido en el de $u = (0.5 - c)\,C$, produce $u = \frac{0.5 - c}{R}\,k$. Sustituyendo esta cantidad en la expresion anterior y tomando el arco u por su tangente, se obtiene por último resultado:

$$n = k \cot. z + \frac{0.5 - c}{R}\,k^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

que es la fórmula usual para calcular las diferencias de nivel. Si fueran paralelas las verticales de A y B, el triángulo $A\,O\,B$ seria rectángulo en O, en cuyo caso se tendria: $n = k \cot. z$. Se ve, pues, que el término $\frac{0.5 - c}{R}\,k^2$ mide el efecto de la convergencia de las verticales, y es el mismo que suministra la correccion por nivel aparente y refraccion, segun consta en la pág. 401.

Adoptando para la República el valor medio $c = 0.06$, é introduciendo el valor del radio, la fórmula será:

$$n = k \cot. z + (2.8395)\,k^2$$

Veamos ahora el valor que debe usarse en lugar del de la cuerda k. Cuando distan mucho uno de otro los puntos A y B, la distancia horizontal que los separa no podrá considerarse como una linea recta, sino que será el arco $A\,O$, que expresado en medidas lineales designaré por a, siendo como ántes C su valor angular. Segun esto se tiene $a = R\,C$; miéntras que la cuerda k es $k = 2\,R \text{ sen. } \frac{1}{2}\,C$. Desarrollando en serie el seno del pequeño ángulo $\frac{1}{2}\,C$, resulta:

$$k = 2\,R\,(\tfrac{1}{2}\,C - \tfrac{1}{48}\,C^3 + \ldots\ldots)$$

expresion que se convierte en la siguiente introduciendo el valor $C = \frac{a}{R}$:

$$k = a - \frac{a^3}{24\,R^2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

la que manifiesta que *la diferencia entre el arco y la cuerda es igual al cubo del primero dividido por 24 veces el cuadrado del radio terrestre.* Esta última fórmula podria servir para calcular el valor de k, conociendo la distancia horizontal a comprendida entre los dos puntos; pero siendo a siempre muy pequeña respecto de R, casi nunca hay necesidad de hacer el cálculo, sino que se toma por k la distancia misma tal como resulta de la medida directa, ó de la resolucion de la cadena si A y B son puntos trigonométricos.

La forma de la ecuacion (2) indica, por otra parte, que debe influir poco en el resultado un pequeño error que tenga el valor de k. Diferenciando, en efecto, la expresion aproximativa $n = k$ cot. z, pues el otro término por ser pequeño puede suponerse invariable, se obtiene fácilmente:

$n \operatorname{sen} z = k \cos z$

$n \cos z\, dz + \operatorname{sen} z\, dn = \cos z\, dk - k \operatorname{sen} z\, dz$

$dn = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z} dk - \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z} n\, dz - k\, dz$

$= \frac{n}{k} dk - n \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z} dz - n \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} dz$

$$d\,n = \frac{n}{k}\,d\,k - \frac{2\,n\,\text{sen. } 1''}{\text{sen. } 2\,z}\,d\,z \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$= \frac{n}{k} dk - \left(\frac{\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z}{\operatorname{sen} z \cos z}\right) n\, dz = \frac{n}{k} dk - \frac{2n}{\operatorname{sen} 2z} dz$

En esta fórmula el primer término mide evidentemente la influencia del error $d\,k$ que tenga la distancia, y el segundo la del error angular $d\,z$; pero como $d\,k$ queda multiplicado por la fraccion $\frac{n}{k}$ que es siempre muy pequeña á causa de la diferencia considerable que existe entre los desniveles y las distancias horizontales, se infiere que la influencia de aquel error es por lo regular de poca importancia. No sucede lo mismo respecto del error angular $d\,z$, cuyo coeficiente es grande por contener en el denominador el seno del angulo $2\,z$, que comunmente difiere poco de 180°, y en el numerador el doble del desnivel n. De este análisis se deduce que en general los errores angulares tienen mas influencia que los lineales en los resultados de las nivelaciones trigonométricas.

expresando dz en segundos

Para presentar un tipo del cálculo apliquemos la fórmula (2) al caso siguiente. Supongamos que una triangulacion haya dado á conocer que la distancia entre dos vértices trigonométricos es....... $k = 25000^{m}$, y admitamos que en uno de ellos se midió la distancia zenital del otro, habiendo dado el instrumento $z = 90°\ 39'\ 30''$. La diferencia de sus alturas será, pues:

k..........	4.39794	k^2..........	8.7959
cot. z......	8.06034—	const.......	2.8395
	2.45828—		1.6354
	—287^{m}3		43^{m}2

$n = -287^{m}3 + 43^{m}2 = -244^{m}1$

Si por error se hubiera hecho el cálculo con $k = 25050^{m}$ y........ $z = 90^{\circ}\ 40'$, se habria hallado con corta diferencia $n = -248^{m}0$, resultado erróneo en cerca de 4^{m}. Corrijámoslo por la ecuacion (4) con el fin de investigar qué influencia han tenido los errores d k y d z, que considerados como correcciones, serán d$k = -50^{m}$ y d $z = -30''$.

n	2.3945—	$2n$	2.6955—	$\frac{n}{k}\,\mathrm{d}k$	$= +\ 0^{m}5$
k	4.3988	sen. $1''$	4.6856	$-\frac{2n\ \mathrm{sen.}\ 1''}{\mathrm{sen.}\ 2z}\,\mathrm{d}z$	$= +\ 3.1$
	7.9957—	d z	1.4771—	d n	$= +\ 3^{m}6$
d k	1.6990—		8.8582	n	$= -\ 248.0$
	9.6947	sen. $2z$	8.3668—	Desnivel correcto	$= -\ 244^{m}4$
			0.4914—		

Se ve, pues, que un error de 50^{m} en la distancia solo hizo variar $0^{m}5$ el resultado; miéntras que $30''$ de error en la distancia zenital produjo otro de mas de 3^{m} en el valor de n. Esta aplicacion numérica comprueba lo que se dijo respecto de la influencia relativa de los elementos lineal y angular, manifiesta la importancia de medir este último con la mayor precision posible, y justifica el procedimiento de tomar en vez de la cuerda la distancia horizontal de un punto á otro. Si á pesar de esto se presentase algun caso excepcional en que por ser muy grande esa distancia se temiese el error que podria originarse de esta sustitucion, la fórmula (3) permitirá deducir el verdadero valor de k, ó lo que es preferible, corregir el logaritmo de la distancia a para obtener directamente el de la cuerda. La fórmula dá, en efecto:

$$\log.\ k = \log.\ a + \log\left(1 - \frac{a^2}{24\,R^2}\right)$$

Desarrollando y representando por M el módulo 0.43429...... de las tablas, resulta:

$$\log.\ k = \log.\ a - \frac{M\,a^2}{24\,R^2} = \log.\ a - (4.6497)\,a^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Todo queda, pues, reducido á restar del log. a una pequeña cantidad. En el caso anterior, por ejemplo, la distancia era de 25000^{m}: calculemos el logaritmo de la cuerda.

Const.........	4.6497		
a^2.........	8.7959	log. a	$= 4.3979400$
	3.4456..................		$-\ 0.00000028$
		log. k	$= 4.3979397$

$\log(1+x) = M\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \&\right)$

Se ve que la correccion no tiene influencia alguna haciendo uso de logaritmos de cinco cifras decimales, que bastan siempre para el cálculo de la fórmula (2).

258º Se ha dicho en otra parte que siendo pequeñas las distancias pueden suponerse paralelas las verticales de las estaciones, en cuyo caso las diferencias de nivel se determinan por la ecuacion mas sencilla $n=k$ cot. z. Para fijar el límite de k, de tal manera que la omision del término $\frac{0.5-c}{R}k^2$ no produzca un error que exceda de una cantidad dada l, pondrémos la condicion: $m\,k^2=l$, en la cual he representado por m el factor constante $\frac{0.44}{R}$. De ella se deduce:

$$k=\sqrt{\frac{l}{m}}$$

Calculándola desde $l=0^m.1$ hasta $l=1^m.0$, resultan los siguientes valores de k.

ERROR.	Límite de la distancia.	ERROR.	Límite de la distancia.
0m1	1200m	0m6	2946m
0. 2	1700	0. 7	3183
0. 3	2084	0. 8	3402
0. 4	2406	0. 9	3608
0. 5	2690	1. 0	3804

Esta tabla podrá servir para formarse una idea del grado de aproximacion con que puede obtenerse un desnivel por medio de la fórmula $n=k$ cot. z, que es la usada generalmente en las operaciones topográficas aun para distancias de 4 ó 5 kilómetros. Parece á primera vista que tal práctica deberia desecharse, puesto que para $k=3000^m$, por ejemplo, el error que se comete es casi de $0^m.7$; pero no es así reflexionando que en la topografía se usan por lo comun clisímetros cuya aproximacion angular es solo de 1′, cantidad que puede representar tambien el error posible de observacion al medir el ángulo z, y como el error de 1′ produciria las mas veces mayor efecto en n que la omision del término $m\,k^2$, se comprende que en tales circunstancias seria ilusorio tomarlo en cuenta creyendo alcanzar mas exactitud por ese medio. Por el contrario, sirviéndose de un instrumento que aproximase hasta 10″ ó 15″ las lecturas angulares, no me parece que deberia desecharse el valor de $m\,k^2$ cuando las distancias excedieran de 2000m ó 2500m Ademas, cuando la nivelacion se hace con el objeto de adquirir datos para algun trabajo especial que demande el conocimiento exacto de los accidentes del terreno, debe aplicarse de toda preferencia el método topográfico; pero cuando solo se trata de configurar los principales accidentes del suelo, de medir las alturas de las montañas, &c., casi nunca es preciso hacerlo mas que con la aproximacion de 1^m ó 2^m, y entónces el método trigonométrico es de inmensa utilidad en atencion á que no exige mas que el elemento z, que puede obtenerse al mismo tiempo que se practican otras operaciones de la topografía. Así, por ejemplo, al tomar los ángulos de una triangulacion, basta leer las indicaciones del círculo vertical en dos posiciones inversas del teodolito para conocer las distancias zenitales de los puntos observados, y en consecuencia, para poder calcular sus diferentes alturas.

259º Las nivelaciones trigonométricas suministran resultados comparables en exactitud á los de las nivelaciones topográficas cuando ademas de hacerse uso de clisímetros que dén los ángulos con mucha aproximacion, se conoce bien el efecto de la refraccion atmosférica ó se elimina por medio de una doble observacion como vamos á indicarlo, estableciendo ántes el método para obtener experimentalmente el valor de la refraccion.

Supongamos que miéntras un observador mide en A (fig. 201ª) la distancia zenital de B, otro establecido en este punto mide la de A. En estas observaciones simultáneas y recíprocas es muy probable que sea el mismo el valor de la refraccion, afectando en igual cantidad las dos distancias zenitales, puesto que son idénticas las condiciones atmosféricas y comun la distancia que separa las dos estaciones. El observador que está en A verá en B' el punto B, y el que ocupa la estacion B verá el punto A en A', de suerte que designando por z y z' los ángulos que obtengan, las distancias zenitales correctas serán respectivamente $ZAB = z + r$, y $Z'BA = z' + r$. Ahora en el triángulo ABC se tiene: $ZAB = C + 180° - Z'BA$, é introduciendo los valores precedentes y despejando, resulta:

$$r = 90° + \tfrac{1}{2} C - \tfrac{1}{2}(z + z') \quad \text{......} \quad (6)$$

fórmula que suministra el valor de r. El ángulo C de las verticales se deduce de la distancia k de las estaciones, pues siendo R el radio terrestre se tiene $C = \frac{k}{R}$ en partes del radio trigonométrico, y por consiguiente en segundos $\frac{1}{2}\,C = \frac{k}{2\,R\,\text{sen.}\,1''}$. Calculando el logaritmo constante, la ecuacion anterior podrá expresarse así:

$$r = 90^\circ + (8.20948)\,k - \tfrac{1}{2}\,(z + z')$$

Apliquémosla á los datos siguientes obtenidos en dos estaciones cuya distancia era de 17930^{m}.

$$\begin{array}{lr}
\text{Const}\ldots\ldots\ldots\ldots & 8.2095 \\
k\ldots\ldots\ldots\ldots & 4.2536 \\
\hline
 & 2.4631 \\
\tfrac{1}{2}\,C = 290.''5 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
z = & 89^\circ\ 41'\ 25'' \\
z' = & 90\ \ 27\ \ 7 \\
\hline
\tfrac{1}{2}(z + z') = & 90^\circ\ \ 4'\ 16'' \\
90^\circ + \tfrac{1}{2}\,C = & 90\ \ \ 4\ \ 50.5 \\
\hline
r = & \qquad 34.''5
\end{array}$$

Segun hemos dicho, el valor de r es proporcional al ángulo C, y se tiene: $r = c\,C$, siendo c el *coeficiente de refraccion.* Puede calcularse directamente, pues dividiendo por C la ecuacion (6) resulta:

$$c = 0.5 - \frac{\tfrac{1}{2}\,(z + z') - 90^\circ}{C}$$

y sustituyendo el valor $C = \frac{k}{R\,\text{sen.}\,1''}$, obtendrémos con el logaritmo del factor constante:

$$c = 0.5 - (1.4895)\,\frac{\tfrac{1}{2}\,(z + z') - 90^\circ}{k} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Con los datos anteriores se tendrá:

$$\begin{array}{rr}
\tfrac{1}{2}\,(z + z') - 90^\circ = 256''\ldots\ldots\ldots\ldots & 2.4082 \\
\text{Const}\ldots\ldots & 1.4895 \\
\hline
 & 3.8977 \\
k\ldots\ldots & 4.2536 \\
\hline
 & 9.6441\ldots\ldots\ldots\ldots 0.4407
\end{array}$$

$$c = 0.5 - 0.4407 = 0.0593$$

Haciendo muchas observaciones de este género en distintas circunstancias atmosféricas se obtiene un valor medio del coeficiente c que sirve en seguida para calcular la refraccion correspondiente á una distancia dada, á saber:

$$r = \frac{c\,k}{R\ \text{sen.}\ 1''} = (8.5105)\ c\,k$$

Adoptando por ejemplo $c = 0.06$, resulta con $k = 17930^m$:

Const.	8.5105	
c	8.7781	
k	4.2536	
r	1.5422	$r = 34.''8$

Mas bien que la refraccion, lo que importa conocer con exactitud es el valor de c, porque es el que figura en la fórmula (2) que dá los desniveles.

260º No siempre es posible hacer simultáneamente las dos observaciones, pues para esto se necesita el concurso de dos observadores; pero si uno solo mide z y z' procurando que sea en igualdad de condiciones de la atmósfera, puede aplicar las fórmulas anteriores para calcular el coeficiente c, casi con tanta seguridad como si fueran simultáneas las medidas. Lo mismo dirémos respecto de la determinacion de las diferencias de nivel por medio de la doble observacion, que elimina la cantidad r. En efecto, si en la ecuacion (1) se introduce el valor (6) de la refraccion, resulta:

$$n = \frac{k \cos (z + r - \frac{1}{2}C)}{\operatorname{sen} (z + r - C)} = \frac{k \cos (90 - \frac{1}{2}(z' - z))}{\operatorname{sen} (90 - \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}(z' - z))}$$

$$n = \frac{k \text{ sen. } \frac{1}{2} (z' - z)}{\text{cos. } \frac{1}{2} (z' - z + C)}$$

en la cual puede omitirse C sin inconveniente alguno, por ser el denominador el coseno de un ángulo generalmente muy pequeño, y entónces se obtiene:

$$n = k \text{ tan. } \tfrac{1}{2} (z' - z) \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

En los casos en que $z' - z$ no es pequeño, lo es k, atendiendo á la desigualdad que existe por lo comun entre las distancias verticales y las horizontales; y como siendo la distancia k poco considerable pueden suponerse paralelas las lineas verticales de las dos estaciones, se deduce que $C = 0$, y por consiguiente siempre puede omitirse.

Apliquemos la fórmula (8) á los datos del número precedente.

$z = 89° 41' 25''$				
$z' = 90\ 27\ 7$	k	4.2536		
$\frac{1}{2}(z' - z) = + 22' 51''$	tan.	7.8226		
	n	2.0762	$n = + 119^m.2$	

Sea que se midan las diferencias de nivel aplicando la fórmula (2), ó que conociendo las distancias zenitales recíprocas se haga uso de la (8), los resultados darán siempre la altura del punto observado respecto del centro del clisímetro. Siendo h la elevacion de este sobre el suelo y m la de la señal que se observa, el verdadero desnivel será $n-(m-h)$ si n es positivo, ó bien $n+(m-h)$ si es negativo.

Puede tambien calcularse el efecto de la posicion del instrumento, corrigiendo la distancia zenital medida, á fin de reducirla al valor que tendria si se hubiera observado exactamente en el centro de la estacion. Esta correccion es útil sobre todo cuando se practican observaciones simultáneas y recíprocas; porque la necesidad de observar desde cada estacion la señal de la otra, obliga al ingeniero á colocar el instrumento á cierta distancia de la señal, aunque en el plano vertical que pasa por las dos estaciones. Sea C (fig. 202ª) el punto en que está el clisímetro en el plano vertical $A\ C\ B$ de las dos estaciones A y B. La distancia zenital que debe emplearse en el cálculo es $Z A B = z$; miéntras que la que se mide en C es $Z'\ C B = z_1$. Llamando k la distancia $A\ B$, $\triangle$ la $A\ C$, y z_2 la distancia zenital $Z'\ C\ A$ de la señal A, tendrémos que en el triángulo $A\ B\ C$ suponiendo trazada por A una paralela á la linea $C B$, resulta: $z = z_1 + B$. Para calcular el pequeño ángulo en B, el mismo triángulo dá:............ k: sen. $(z_1 + z_2)$: : $\triangle$: B sen. $1''$, de donde despejando y sustituyendo en el valor de z, se obtiene:

$$z = z_1 + \frac{\triangle \text{ sen. } (z_1 + z_2)}{k \text{ sen. } 1''}$$

Si el instrumento ocupa la posicion C' en la misma vertical de A, se tiene $z_2 = 0$, y entónces.

$$z = z_1 + \frac{\Delta \text{ sen. } z_1}{k \text{ sen. } 1''}$$

De esta manera se reduce la medida al punto que se observa desde la otra estacion. Es claro que por k puede usarse la distancia horizontal de las dos estaciones.

261º El método trigonométrico de nivelacion se presta á la determinacion de la altura absoluta de un punto cuando desde él se descubre el horizonte del mar. Sea A (fig. 203ª) el punto de que se trata, y $A\,B$ la visual dirigida al horizonte y que es tangente en B á la superficie del mar. Designando por R el radio de la tierra, y por n la altura $A\,C$ que se busca, tendrémos en el triángulo rectángulo $A\,B\,C$:

$$R = (R + n) \cos. C$$

de donde resulta:

$$n = R\,(1 - \cos.\ C) = 2\,R \operatorname{sen.}^2 \tfrac{1}{2}\,C$$

La distancia zenital de B medida en A es $Z\,A\,B$, que será igual á $z + r$, llamando z el ángulo que dá el instrumento y r la refraccion. Como $z + r$ es externo en el triángulo $A\,B\,C$, se tiene:

$$z + r = z + c\,C = 90^\circ + C$$

y en consecuencia: $C = \frac{1}{1-c}\,(z - 90^\circ)$.

Antes de sustituir este valor en el de n hagamos notar que en ángulos pequeños como C, se verifica que los senos y tangentes son sensiblemente proporcionales á los arcos, y podrémos suponer...... sen. $\frac{1}{2}$ $C = \frac{1}{2}$ sen. C, con lo cual el valor de n será:

$$n = \tfrac{1}{2}\,R \operatorname{sen.}^2 C$$

Por la misma razon considerando á $\frac{1}{1-c}$ como coeficiente, se tendrá: sen: $C = \frac{1}{1-c}$ sen. $(z - 90^\circ)$, valor que introducido en el precedente, produce:

$$n = \frac{R}{2\,(1 - c)^2} \operatorname{sen.}^2 (z - 90^\circ) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;(9)$$

Conociendo de esta manera la altura de un punto sobre el nivel del mar se determinan todas las de los otros puntos cuyas diferencias de nivel se hayan calculado respecto del primero. Sin embargo, siempre que se pueda, es preferible medir la altura de un punto respecto del Oceano por medio de una nivelacion topográfica, pues la refraccion es mas incierta observando el horizonte del mar á causa de los vapores de sus aguas, y acaso el coeficiente c que figura en la fórmula (9) no sea el que convenga realmente á ese estado de la atmósfera. De todas maneras la altura que se obtenga debe referirse á la marea media.

262º El horizonte de A es el plano $A\,H$ perpendicular á $A\,Z$, de modo que la distancia zenital $Z\,A\,B$ que se mide en A es necesariamente mayor que 90°. La diferencia z — 90° se llama por esta causa *depresion del horizonte*, y es en efecto el ángulo $H\,A\,B$ que el punto B se ve mas bajo ó deprimido que H, y cuyo valor depende de n ó $A\,O$. Los marinos hacen mucho uso de este ángulo para corregir las observaciones que se ejecutan á cierta altura respecto del nivel del mar, y se calcula fácilmente por medio de la fórmula (9) que dá en segundos:

$$z - 90^\circ = \frac{1 - c}{\text{sen. } 1''} \sqrt{\frac{2\,n}{R}} \text{ .... } (10)$$

Supóniendo $c = 0.06$, y calculando el logaritmo constante se obtiene:

$$z - 90^\circ = (2.0361)\ \sqrt{n}$$

Esta fórmula puede reducirse á tabla para diversos valores de n, que expresará entónces la altura del buque, ó por mejor decir, de la vista del observador sobre el nivel del mar. Es claro que si á la distancia n del agua se hace, por ejemplo, la observacion de la altura angular de un astro respecto del horizonte B del mar, será preciso restarle la depresion $z - 90^\circ$ para obtener la altura respecto del plano horizontal $A\,H$. Como el movimiento de los navíos no permite el uso de instrumentos provistos de niveles, se ven obligados los marinos á referir al horizonte del mar las frecuentes observaciones astronómicas que tienen que ejecutar para conocer su ruta al traves del Oceano; y entónces aplican la correccion que he indicado.

CAPITULO VI.

CONFIGURACION DE LOS ACCIDENTES DEL TERRENO.

263º Se ha visto que por medio de nivelaciones es fácil construir el perfil del terreno en la direccion en que aquellas se hayan practicado, lo cual suministra una verdadera proyeccion vertical del mismo terreno. Con el conocimiento de esos cortes ó perfiles puede formarse una idea bastante exacta de los accidentes del suelo; pero la representacion gráfica de estos por medio de las proyecciones verticales tendria el inconveniente de demandar tantas construcciones diversas cuantas fueran las direcciones en que se hubieran ejecutado las nivelaciones, sin que por otra parte fuese posible apreciar en conjunto las desigualdades de todos los puntos del terreno, por numerosos que fueran los perfiles que se construyesen. Ademas de este grave inconveniente, seria preciso examinar á la vez las proyecciones horizontales y las verticales de las direcciones niveladas, y hacer continuas referencias del plano á los perfiles y vice versa para estimar debidamente la configuracion del suelo.

A la verdad, podria evitarse la construccion de los cortes sustituyéndolos con guarismos inscritos en el plano, que diesen á conocer las alturas de los puntos correspondientes respecto de una superficie de comparacion, lo mismo que se inscriben las indicaciones de la sonda en los planos hidrográficos; pero este método, sin presentar tampoco la ventaja de permitir una exacta apreciacion del conjunto, ofrecia el inconveniente de hacer confuso el dibujo y que desaparecieran acaso algunos detalles importantes del plano.

Por todas estas razones se ha adoptado un procedimiento que consiste esencialmente en representar los accidentes verticales por medio de sus proyecciones horizontales haciendo uso de ciertas convenciones geométricas. Sea $A\ B\ C$ (fig. 204ª) el perfil de una eminencia cualquiera, que supondrémos cortada por planos horizontales equidistantes *A C, a b,........ g h.* Si *A' B' C'* representa la proyeccion horizontal del corte, y por un medio cualquiera llegamos á conocer la forma de cada una de las curvas que resultan de la interseccion del terreno con los diversos planos secantes, es evidente que podrémos construir estas curvas, siendo su figura y las distancias de una á otra los elementos que nos permitirán apreciar la configuracion de la eminencia y las diversas inclinaciones del terreno que la constituye.

Las intersecciones de la superficie del terreno con los planos secantes se llaman *curvas horizontales* ó *curvas de nivel,* á causa de la posicion que realmente tienen, y se pueden configurar geométricamente trazándolas en el terreno y levantando sus planos en seguida. El trazo no ofrece dificultad alguna, pues se reduciria á señalar un número suficiente de puntos de cada curva por medio de un nivel ó clisímetro y un estadal, con la única condicion de que todos los puntos de la misma curva tuviesen igual altura, ó lo que es lo mismo, que con el nivel establecido entre cada dos de ellos se obtuviese la misma indicacion de la mira, moviendo al efecto el estadal lo que fuera necesario hácia arriba ó hácia abajo de la pendiente. Tambien podria hacerse con suficiente exactitud la configuracion de las curvas practicando varias nivelaciones en distintas direcciones, como lo indica la figura, y despues de construidos los cortes y sus proyecciones horizontales correspondientes, señalando en estas últimas los puntos de una misma curva, que se unirian en seguida con una linea continua. De esta manera, la forma de las curvas quedaria representada con tanta mas precision cuanto mayor fuera el número de puntos conocidos en cada una; y por consiguiente cuanto mayor fuera el número de perfiles que se construyesen.

264º Ninguno de estos procedimientos, sin embargo, se sigue habitualmente en la práctica; porque ambos darian lugar á operaciones muy dilatadas para llegar al conocimiento de un número suficiente de puntos en cada curva; pero ántes de explicar el método mas expedito que se adopta, indiquemos las ventajas del sistema de curvas horizontales para representar los accidentes del suelo. Desde luego la forma de las mismas curvas dá á conocer la configuracion general, puesto que resultan proyectadas en el plano tales como son realmente en el terreno; y ademas, sus respectivas distancias permiten apreciar las pendientes, y aun encontrar la altura de un punto cualquiera. Si aplicamos, en efecto, este método á la representacion de un cuerpo, tal como el cono recto y el cono oblicuo de la figura 205ª, se verá que teniendo las generatrices del primero la misma inclinacion respecto del horizonte, las curvas resultan equidistantes en todos sus puntos; miéntras que en el segundo disminuye la distancia de las curvas á medida que aumenta la inclinacion de la generatriz. En consecuencia, la pendiente del terreno comprendido en una parte determinada de dos secciones horizontales, podrá apreciarse á la simple vista con mucha aproximacion, y aun calcularse exactamente si se conoce la equidistancia de los planos secantes y la distancia de una curva á otra en el lugar que se considera. Estas dos cantidades son efectivamente los catetos de un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa está formada por la linea inclinada del terreno comprendido entre las dos secciones; y en consecuencia, designando por e la equidistancia, y por $\triangle$ la separacion de las dos curvas de nivel, se tendrá que la pendiente en ese punto del terreno es $p = \frac{e}{\Delta}$.

Tambien el conocimiento de la equidistancia indica la elevacion de cada curva respecto del plano general á que se suponen referidas las nivelaciones, y permite la medida de la altura que tiene un punto cualquiera situado entre dos curvas. Sea, en efecto, n el número de órden que corresponde á una curva, contado desde el plano general: la acotacion de cualquiera de sus puntos será $n\, e$, y si designamos por δ la distancia $V R'$ (fig. 204ª) de un punto R' á la curva inmediata inferior, el punto R del terreno cuya proyeccion horizontal es R', tendrá la altura $x = \delta \frac{e}{\Delta}$ respecto de la curva. Este valor puede obtenerse geométricamente construyendo el triángulo rectángulo formado por la separacion de las curvas en R', la equidistancia de los planos y la linea del terreno: suponiendo que ese triángulo gira al derredor de su base $S\,V$ hasta que su plano coincida con el horizonte, trazarémos la perpendicular $S\,T$ igual á la equidistancia e, siendo entónces $T\,V$ la posicion de la linea del terreno cuya proyeccion es $S\,V$. Elevando en R' una perpendicular hasta que encuentre á $T V$, el punto R será el del terreno, y los triángulos semejantes $S\,T\,V$ y $R'\,R\,V$ dán la proporcion.................
$S\,V : S\,T :: R'\,V : R'\,R$, ó bien $\Delta : e :: \delta : x = \delta \frac{e}{\Delta}$ como ántes. Segun esto, la acotacion de R respecto del plano general es: $n\,e + \delta \frac{e}{\Delta}$.

265º Expliquemos ahora el método breve y suficientemente exacto que se sigue para trazar las curvas, estableciendo ántes algunas definiciones necesarias para su mejor inteligencia.

La forma de una montaña aislada en medio de una llanura se acerca mas ó ménos á la de un cono cuyo vértice, lados y base reciben respectivamente los nombres de *cima*, *flancos ó vertientes* y *falda ó pié*. La distancia vertical de la cima al llano es la *altura relativa*, y su distancia á la superficie del Oceano, su *altura absoluta*.

Las eminencias se distinguen con diversas denominaciones segun su elevacion relativa. Se llaman *colinas ó lomas* cuando tienen poca altura, designándose generalmente por el segundo de estos nombres las eminencias extensas y de pendientes suaves. Toda eminencia mas elevada y áspera que una colina se llama *cerro;* y *montaña* cuando tiene una altura muy considerable, aunque esta voz se aplica tambien como nombre genérico para designar toda clase de eminencias.

Cuando la cima de una montaña es sensiblemente horizontal, de manera que forme una llanura elevada, se llama *mesa*. Si por el contrario, está terminada en punta y formada por rápidas pendientes, se denomina *pico ó picacho*.

El declive de las vertientes ó flancos de una montaña nunca es uniforme: en la cima, sobre todo si la eminencia está terminada por una mesa, el declive es suave generalmente, y muchas veces interrumpido bruscamente por un espacio de terreno escarpado, que suele llamarse *cornisa* de la mesa. Siguen despues las *laderas*, en que la pendiente es mas fuerte que en la cima y que en la falda, en la cual terminan las vertientes.

Raras veces se encuentran montañas enteramente aisladas, sino que por lo regular están agrupadas formando *cadenas, sierras ó cordilleras*, que se extienden siempre en una direccion mas que en las otras. De las cadenas *principales* se desprenden hácia uno y otro lado ramificaciones de montañas, generalmente ménos elevadas, que se llaman cadenas *secundarias*. Tambien de estas últimas parten otras ramificaciones de menor elevacion llamadas *contrafuertes*. La figura 206ª que está copiada de la naturaleza, representa con bastante claridad estos agrupamientos de las montañas. Desde A hácia B se ve una parte de la cadena principal, y dos secundarias que parten la una de A hácia D y la otra de B hácia C. Los contrafuertes derivados de estas corren de a á b, de c á d, de e á f, &c.. Debe notarse que los contrafuertes de una cadena corresponden siempre á un ángulo entrante de otra cadena inmediata que le sea paralela, y lo mismo puede decirse respecto de las posiciones de las cadenas secundarias que parten de dos principales; de manera que caminando entre dos cadenas de montañas se van encontrando alternativamente las ramificaciones que se desprenden de una y otra.

El espacio de terreno comprendido entre dos cadenas de montañas, se llama *valle*, *cañada*, *desfiladero*, *barranca*, &c. Mas bien que á la forma, se refieren todos estos nombres á las dimensiones de aquellos espacios; y así se llaman valles cuando son bastante anchos y sensiblemente planos, al ménos en su parte mas baja; cañadas si son mas estrechos que los valles y formados por vertientes de mayor declive; desfiladeros ó gargantas cuando son muy estrechos y las vertientes que los forman tienen mucha pendiente; y barrancas si además de muy estrechos, tienen poca longitud y son muy escarpadas las vertientes inmediatas. En la figura se ve un valle de M á N, una cañada de O á P, y una barranca en Q. La parte en que se reunen dos eminencias contiguas se llama *puerto*, como R, S y T en la figura.

La linea de interseccion de las vertientes de dos montañas, se llama *thalweg* (*) ó tambien *linea de reunion de las aguas;* y en efecto, esta curva está por lo general muy bien marcada por los surcos que forman las aguas que descienden de las vertientes. Los thalwegs existen en todos los valles, sea cual fuere su anchura, y aun en los flancos mismos de las montañas donde toman su orígen; forman el cauce de los rios ó arroyos tanto permanentes como torrenciales, por ser la parte mas baja de los terrenos inmediatos y por consiguiente aquella en que se reunen las aguas. Siguiendo las inflexiones que le señalan los ángulos entrantes y salientes de los contrafuertes ó de las ramificaciones mas pequeñas de estos, el thalweg forma curvas mas ó ménos sinuosas, representadas en la figura por lineas fuertes que comienzan en las partes mas elevadas de los valles, cañadas, barrancas, &c.

(*) Es una voz alemana que literalmente significa *camino del valle.* El Sr. D. Tomás Aznar Barbachano, distinguido escritor mexicano, ha propuesto la palabra *becan* para designar esa linea, tomándola de la lengua maya que se habla en Yucatan. El significado de *becan* es *camino de culebra* ó *camino en forma de culebra*, que conviene perfectamente á la linea de que se trata. Tanto por esto, como por ser la voz *becan* mas adecuada á la pronunciacion castellana, la adoptaria yo gustoso, si no fuera porque la palabra *thalweg* está admitida de hecho en todos los idiomas.

Cuando son casi de igual declive las dos vertientes opuestas cuya interseccion forma un thalweg, corre esta linea sensiblemente á la mitad del valle, ó sea á distancias iguales de la serie de eminencias que lo limitan: pero siendo diferentes los declives de las dos vertientes, es un hecho constante que el thalweg se acerca al lado en que es mayor la pendiente. Esto se nota muy bien en los terrenos muy inclinados á cuyo pié se ven correr siempre los arroyos torrenciales ó las huellas que estos dejan, y que señalan perfectamente los thalwegs.

Un thalweg principal que recibe los secundarios que provienen de las cañadas ó de las barrancas laterales, forma con ellos ramificaciones semejantes á las que se originan de los valles secundarios respecto del principal en que desembocan. En las confluencias de estos thalwegs se nota constantemente que los laterales se reunen con el principal en la parte convexa de las curvas que este forma, como si se inclinase á recibirlos. Este hecho es por otra parte la consecuencia natural de la posicion alternada de los contrafuertes y cañadas de dos sierras paralelas.

Si desde la cima de una eminencia se observan atentamente las pendientes de sus flancos, se notará siempre que en cierta direccion las vertientes se extienden mucho mas que en las otras, ó lo que es lo mismo, que el declive del terreno es menor en ese sentido que en cualquiera de los demas. Esta direccion se llama *arista*, *cresta* y tambien *linea de division de las aguas;* porque siendo, en efecto, la que forma el menor ángulo con el horizonte de cuantas lineas parten de la cima, las aguas que descienden de las vertientes se separan en su direccion dirigiéndose á uno y otro lado para seguir una pendiente mas rápida. En el cono oblicuo de la figura 205ª la generatriz CA representa la linea divisoria de las aguas, y puede notarse desde luego que su proyeccion $C'A'$ es mayor que la de cualquiera otra generatriz, lo que tambien se deduce de la ecuacion $p=\frac{n}{k}$ que dá el declive, puesto que para ascender ó descender una altura constante n, es preciso que la pendiente p y la distancia horizontal k estén en razon inversa una de otra. La consecuencia inmediata de lo que precede es que las curvas de nivel resultarán mas separadas en la direccion de la cresta que en cualquiera otra, y que la proyeccion de esa linea pasará por los puntos de retroceso de todas las curvas. En la figura 206ª se han señalado con puntos las direcciones de algunas crestas.

266º Las definiciones que anteceden dán idea de las leyes generales á que están sujetos los accidentes verticales del terreno, y hacen comprender inmediatamente la posibilidad de configurarlos con suficiente exactitud por medio del estudio y demarcacion de algunas lineas principales que los caracterizan bastante bien. Los thalwegs ó lineas de reunion y las crestas ó lineas de separacion de las aguas son por lo regular las necesarias para determinar la forma del suelo, y tambien las que se reconocen con mas facilidad en el terreno por los caracteres que las distinguen y que ántes se han explicado. Así, por ejemplo, si desde los puntos A y B (figura 207ª) de la mesa de una eminencia se trazan, se miden y se nivelan las direcciones mas ó ménos sinuosas de las crestas $A\,C$ y $B\,D$, se tendrán los datos necesarios para construir sus proyecciones horizontal y vertical. Haciendo la misma operacion respecto de los thalwegs $E\,F$ y $G\,H$, se obtendrán tambien los elementos que determinan sus proyecciones; y si se hace ademas sobre el terreno mismo un cróquis ó bosquejo tomado á la vista de la forma general de las vertientes en las partes comprendidas entre aquellas lineas principales, se habrán reunido los datos bastantes para configurar muy bien toda la eminencia.

Para facilitar las explicaciones supongamos que cada una de las lineas $A\,C$, $B\,D$, $E\,F$, $G\,H$, &c., tiene un declive uniforme en toda su extension. Admitamos ademas que los puntos A y B están al mismo nivel; A elevado respecto de C 160^m; y B 200^m mas alto que D. Si se ha convenido en asignar la equidistancia de 20^m á los planos secantes, tendrémos que entre los puntos extremos A y C deberán pasar 7 curvas intermedias, número que resulta de dividir la altura total 160^m por la equidistancia 20^m y de restar una unidad del cociente. Por la misma razon, entre B y D pasarán 9 curvas. En general, siendo n el desnivel y e la equidistancia, el número de curvas intermedias es $\frac{n-e}{e}$. Una vez obtenidos estos números, se dividen las lineas $A\,C$ y $B\,D$ en 7 y 9 partes iguales respectivamente para obtener otros tantos puntos de las curvas.

Supongamos ahora que el thalweg $G\,H$ comience á hacerse notar á 60^m abajo de A ó B. Inferimos de esto que entre la curva AB y la primera del thalweg debe haber dos curvas intermedias; y entónces desde G hácia H se tomarán sobre la linea $G\,H$ que señala la proyeccion del thalweg, las pequeñas distancias horizontales que indiquen desniveles de 20^m para obtener los puntos correspondientes de las curvas. Practicada una operacion semejante respecto de EF y de todas las lineas principales que se hayan demarcado, podrán trazarse las curvas con la forma general que resulte de la copia ó bosquejo del terreno.

Aunque en este ejemplo se han supuesto uniformes los declives, es evidente que puede aplicarse el mismo procedimiento cuando no sea así, con tal que se señalen los puntos de las lineas principales en que el terreno varie sensiblemente de inclinacion, como se ve en el resto de la figura.

267º En estas configuraciones como no se necesita mucha precision, y por otra parte, importa proceder con rapidez, se aplica preferentemente el método trigonométrico de nivelacion para obtener los desniveles en la direccion de las lineas principales, lo cual puede hacerse al estacionar en los vértices de la triangulacion ó en los puntos fundamentales del levantamiento. Sean A, B, C, &c., (fig. 208ª) algunos de estos puntos. Desde cada uno de ellos tal como A se toman las distancias zenitales $BMZ = z$, $CMZ = z'$, &c., de todos los demas. Con estos elementos y las distancias horizontales comprendidas entre ellos y el punto de estacion, se calculan sus diferencias de nivel, á saber:

$$n = k \text{ cot. } z \quad , \qquad n' = k' \text{ cot. } z' \quad , \quad \&c.$$

Asignando ahora al punto A la acotacion D que le corresponde, segun la posicion PP' que se haya atribuido al plano general de comparacion, podrémos calcular las acotaciones de los vértices observados. Las de los puntos B y C en el caso que indica la figura serán respectivamente:

$$BO = D + h - n$$
$$CR = D + h + n'$$

En general, la acotacion de un punto cualquiera es................ $D + n + (h - m)$ siendo h la altura del instrumento, m la de la señal observada, y dando á n el signo positivo ó negativo, segun que z sea menor ó mayor que 90°. Se supone en esta fórmula que el plano general está mas bajo que el punto de estacion.

Una operacion semejante se hará en cada uno de los puntos que se ocupen, observando no solamente nuevos puntos, sino tambien los que ya han servido de estaciones, á fin de comprobar los resultados. En cada estacion debe copiarse lo mas exactamente que se pueda la forma de los terrenos adyacentes, anotando los puntos en que varian sus inclinaciones, ó sea los extremos de un declive constante; situando la direccion de los thalwegs, de las crestas, y de cuantos accidentes notables se adviertan. En todas esas direcciones conviene medir las distancias zenitales con el fin de conocer sus desniveles para que las curvas horizontales representen la verdadera configuracion del suelo. Una brújula con eclímetro y estadia es el instrumento mas propio para recoger todos esos elementos con la mayor rapidez, puesto que suministra al mismo tiempo el rumbo, la inclinacion y la distancia del punto que se observa en cada direccion.

Ademas de las lineas principales que se han indicado deben situarse los puertos, tales como T' y V' que son puntos notables por ser los mas elevados en las direcciones $a\,b$ y $f\,g$, á la vez que los mas bajos en las de $A'\,B'$ y $A'\,C'$. Estos puntos marcan por consiguiente el principio de los declives descendentes en las primeras direcciones y ascendentes en las últimas. Sus posiciones se determinan tambien por medio de su distancia, rumbo y desnivel respecto de la estacion A.

Una vez obtenidas las acotaciones de los puntos a, b, c, d, f, g, T', V' &c., y despues de fijados en el plano, se procede al trazo de las curvas. Supongamos que se hubiera adoptado la equidistancia de 10^m, y que siendo 200^m la acotacion de A, hubiéramos hallado 174^m para B, 210^m para C, 100^m para T', 68^m para d y 144^m para V'. De estos datos resulta que entre A' y T' deben pasar 9 curvas quedando en la décima el punto T'. Entre A' y V' pasarán 5 y V' quedará 6^m abajo de la última. Entre este punto y C' deberán pasar 6, la primera de las cuales estará 6^m mas alta que V'. Entre A' y d habrá 13 curvas, estando la última á 2^m de elevacion respecto de d. De igual manera se hará el cálculo para los demas puntos.

Para determinar ahora la distancia horizontal $\triangle$ de una curva á otra, tenemos que el triángulo rectángulo formado por $\triangle$, la equidistancia e y la linea inclinada del terreno, dá la ecuacion $p=\frac{e}{\triangle}$ siendo p la pendiente. De ella se deduce $\triangle=\frac{e}{p}$, valor que tambien puede ponerse bajo la forma $\triangle = e\frac{k}{n}$ ó bien $\triangle = e \tan. z$, en los cuales n es el desnivel de los extremos de la linea k suponiendo uniforme su pendiente, y z la distancia zenital de uno de ellos observada desde el otro.

268º Tales son las reglas generales para hacer la configuracion del suelo por medio de la determinacion geométrica de un corto número de lineas y de puntos notables; pero cuando tienen que configurarse grandes superficies de terrenos muy montañosos, es casi imposible, ó por lo ménos seria muy dilatado, hacer la determinacion de todas las lineas que suministran la forma de cada una de sus eminencias y depresiones. En esos casos solo se practican las operaciones geométricas respecto de las lineas y puntos mas característicos, tales como las cimas de los cerros mas notables, la cresta general de la cadena, los thalwegs principales, &c., supliendo todos los otros detalles con el cróquis que se va formando al recorrer el resto del terreno. La construccion de esas copias ejecutadas á la vista y rápidamente exige mucha práctica por parte del ingeniero, no solo para la apreciacion de las distancias y de las alturas, sino principalmente para representar en proyeccion los objetos que se le presentan en perspectiva. Solo un constante ejercicio y la comparacion frecuente de las apreciaciones hechas á ojo con los resultados de medidas directas pueden educar la vista y el estilo para asignar las formas con toda la verdad geométrica necesaria, á la vez que con la variedad característica de la naturaleza.

El ingeniero que desee ejercitarse en esta parte tan importante como dificultosa de la topografía deberá comenzar por hacer la configuracion de eminencias pequeñas y aisladas, estudiando sus accidentes tanto desde la cima como desde la falda, porque muchas veces varian las apreciaciones con el punto de vista. Trazará primero la curva de la mesa si examina la eminencia desde su parte superior; en seguida una intermedia próximamente á la mitad de la altura; y por último la curva de la base señalando todas las inflexiones de estas y las direcciones en que se extienden mas, que serán las crestas, y aquellas en que quedan mas próximas, lo cual se verifica generalmente en los thalwegs. Hecha de esa manera la configuracion á la vista, la ejecutará despues geométricamente, obteniendo de ese modo la correccion de sus primeras apreciaciones.

Cuando se ha adquirido ya la destreza necesaria en este trabajo elemental, puede comenzarse el estudio de grupos sencillos de montañas, procediendo con el mismo órden. Lo que parece mas conveniente es configurar por separado las eminencias y las depresiones, fijando primero, por ejemplo, los thalwegs principales y en seguida sus ramificaciones, que indican las direcciones del valle y de las cañadas adyacentes. Despues se trazarán las primeras curvas de las faldas para obtener la forma general de las depresiones, y por último las curvas superiores.

Desde las eminencias, y siguiendo la cresta general de la cadena, se anotarán las alturas, los puertos, los puntos en que comienzan las cadenas secundarias, las direcciones de estas, los principios de los thalwergs, la posicion de los contrafuertes, &c. Cada uno de estos caracteres principales deberá ser el objeto de un estudio particular; y en seguida pasará el ingeniero á hacer un exámen análogo de las cadenas secundarias, de sus contrafuertes, &c., poniendo especial cuidado en las pendientes, que por lo general son desiguales de un lado y otro de las cadenas y de las diversas ramificaciones de estas.

Con la ayuda de un pequeño número de puntos situados geométricamente, un topógrafo ejercitado puede configurar con mucha verdad extensas serranías, dando á los diversos grupos de montañas el carácter que les es propio segun su naturaleza mas ó ménos áspera ó escabrosa; pero repetimos que esta habilidad solo se adquiere con una dilatada práctica, aplicando las reglas establecidas y estudiando atentamente sobre el terreno las leyes generales á que están sujetos los accidentes del suelo.

269º La equidistancia de los planos horizontales secantes deberia escogerse tanto menor cuanto mas frecuentes y marcados fueran los accidentes del terreno; mas como, por otra parte, algunos de ellos no podrian apreciarse en planos construidos en pequeña escala, se ha procurado conciliar ambas cosas relacionando la equidistancia de las secciones con la escala de la construccion. Siendo esta $\frac{1}{r}$, se ha convenido en que la equidistancia sea $e = 0^m0005\ r$, valor que puede reducirse á la siguiente tabla:

ESCALA.	EQUIDISTANCIA.	ESCALA.	EQUIDISTANCIA.
$\frac{1}{5000}$	2^m5	$\frac{1}{30000}$	15^m0
$\frac{1}{10000}$	5. 0	$\frac{1}{35000}$	17. 5
$\frac{1}{15000}$	7. 5	$\frac{1}{40000}$	20. 0
$\frac{1}{20000}$	10. 0	$\frac{1}{45000}$	22. 5
$\frac{1}{25000}$	12. 5	$\frac{1}{50000}$	25. 0

Conociendo el valor conveniente de e, se tiene $\triangle = \frac{e}{p}$ para la distancia de las curvas de nivel en la parte de una linea cuyo declive sea p. Con esta fórmula se determinan los puntos de las curvas en todas aquellas direcciones en que se haya medido la pendiente, configurando el resto con ayuda del cróquis trazado á la vista.

De la fórmula que dá la equidistancia de los planos secantes se deduce que si en el terreno es $0^m0005\ r$, tendria en el plano el valor constante de 0^m0005; y en consecuencia la distancia de las curvas reducida á la escala de la construccion, es $\triangle = \frac{0^m0005}{p} = \frac{0^m0005}{\tan. i}$, designando por i el ángulo de inclinacion. La tabla siguiente suministra estas distancias expresadas en milímetros, para diversos valores de i, las cuales son independientes de la escala del plano.

i	Δ	i	Δ	i	Δ
0°	∞	5°	5.71	35°	0.71
1	28.65	10	2.84	40	0.60
2	14.32	15	1.87	45	0.50
3	9.54	20	1.37	50	0.42
4	7.15	25	1.07	55	0.35
5	5.71	30	0.87	60	0.29

Se notará que en los primeros 10° ó 15° la distancia de las curvas es sensiblemente proporcional al ángulo de inclinacion, lo cual proporciona la ventaja de poder apreciar con bastante exactitud los declives suaves que son en general los que mas importa conocer. Cuando la inclinacion no excede de 1° ó 2° las curvas quedan muy separadas; pero por lo regular se omiten en tales casos, suponiendo que el terreno es perfectamente horizontal. Por el contrario, desde 60° en adelante resultan muy próximas; mas como los terrenos correspondientes son del todo inaccesibles, nunca hay gran interes en apreciar exactamente sus diferentes declives, y se configuran como escarpados. Ya para $i = 60°$ la distancia de las curvas apenas excede de la cuarta parte de un milímetro.

270º El dibujo topográfico tiene por objeto completar la expresion del relieve del terreno por medio de cierta combinacion de sombras sujetas á determinadas convenciones geométricas. Antiguamente la convencion establecida era la de suponer iluminado el terreno por rayos inclinados 45° respecto de la vertical, y que provenian del cuadrante ó region N. O. del horizonte. Como se ve en la fig. 209ª dibujada de acuerdo con este sistema, las vertientes situadas hácia esa region recibian la luz de frente; miéntras que las situadas en la S. E. esto es, en la opuesta á aquella, quedaban en la sombra. Las dirigidas hácia los cuadrantes S. O. y N. E. resultaban con la media tinta proporcionada á la intensidad de la luz que recibian segun sus posiciones mas ó ménos oblicuas respecto de los rayos luminosos.

Este modo de sombrear, ya se hiciera plumeado como en la figura, ó ya por medio de acuarelas, produciria mucho efecto en cuanto á la expresion del relieve, sobre todo si las tintas quedan bien ligadas y desvanecidas en las pendientes suaves; pero se ha abandonado completamente en la actualidad por estar su hipótesis fundamental en oposicion con la conveniencia de que el plano represente con toda claridad los detalles, especialmente en los terrenos de poco declive. En efecto, suponiendo de 45° la inclinacion de la luz, resultaria que los terrenos de igual inclinacion y dirigidos hácia el N. O. recibirian los rayos luminosos perpendicularmente á su superficie; el terreno horizontal recibiria ménos luz que aquellos; y por último, los inclinados desde 45° en adelante dirigidos hácia el S. E. no recibirian luz alguna, sino que por el contrario deberian proyectar una sombra de una longitud igual á la altura de las eminencias correspondientes. Segun esto, para graduar las tintas con arreglo á los diversos declives y á sus distintas direcciones seria preciso comenzar por sombrear casi todo el papel, puesto que los terrenos sensiblemente horizontales son los mas comunes. A la verdad, cuando se aplicaba el método de que se trata, se omitia la sombra de los terrenos horizontales, y se prescindia ademas de las proyectadas por las eminencias con el fin de evitar trabajo y la confusion que de ellas se originaria en los detalles del plano; pero tal omision, conveniente bajo ese aspecto, resultaba en completa contradiccion con la teoría en que está fundado el sistema.

271º Aunque con modificaciones de mas ó ménos importancia, todos los métodos de dibujo topográfico que se usan hoy, parten del principio fundamental de graduar las sombras en proporcion de los declives. El mas sencillo consiste en sombrear por medio de la intercalacion de curvas auxiliares entre las principales determinadas por las reglas que ántes se han establecido, como lo indica la figura 210ª. Como la separacion de las curvas principales está en razon inversa de la pendiente, resulta que si entre cada dos de ellas se intercala un mismo número de curvas auxiliares, quedarán estas mas próximas en las partes en que es mayor el declive, dando al dibujo un tinte mas oscuro que en los lugares de menor pendiente.

En la ejecucion del dibujo debe tenerse cuidado de dividir en espacios iguales la zona comprendida entre cada dos curvas principales.x La figura 210ª representa la misma eminencia que la 209ª, y se ve que todas las zonas se han dividido en tres espacios, intercalando con ese objeto dos curvas auxiliares en cada zona. Para aumentar el efecto de las sombras se trazan con mas vigor los rasgos ó plumadas cuyo conjunto forma las curvas auxiliares, en las partes en que es mayor el declive, ó lo que es lo mismo, en las que aquellas resultan mas próximas.xx Es tambien conveniente que las lineas intercaladas no formen curvas continuas, tanto para distinguirlas de las principales, como para dar mas variedad y hermosura al estilo.xxx Sin embargo de esto, debe procurarse que no se noten espacios blancos continuos en la union de las diversas plumadas, así como que estas no queden sobrepuestas; porque ambos defectos presentarian un amaneramiento desagradable á la vista. Lo mejor es alternar los puntos de union de manera que los de todas las curvas de la misma zona correspondan á la parte continua de las plumadas de la zona inmediata.

x Cada zona
divide en esp
cios que gua
dan relacion
con el cam
que se va ve
rificando en
la pendiente
no iguales-
xx Es mali
no rigoriza
las curbas
ciertos luga
por aumenta
el efecto, pue
asi se exag
ran las pen
dientes sepa
randose de la
verdad-
xxx Se quita
la hermosur
con esto y si
se hace algu
nas veces es
para facili
tar la inte
ligencia de l
alturas y de
desarrollo de
las curvas,
tambien est
es encontra
de la sana teoria

El dibujo ejecutado de este modo permitirá distinguir las curvas auxiliares de las principales, las cuales se trazan con lineas continuas; pero para mayor claridad debe inscribirse en el plano la equidistancia de estas, y el número de aquellas que se hayan intercalado en cada zona, ó bien trazarse las curvas principales con tinta roja ó de cualquiera otro color.

272º Los otros dos métodos que reconocen tambien como principio el de trazar las sombras proporcionalmente á la inclinacion, son el frances y el aleman. En ambos se sombrea por medio de plumadas análogas á las de la figura 209ª; pero que en estos sistemas tienen la significacion mas estricta que voy á definir. Si en cualquiera punto del terreno comprendido entre dos planos secantes, suponemos que se abandona un cuerpo pesado á la accion de la gravedad, descenderá á lo largo de la vertiente siguiendo la linea mas corta, que es la perpendicular á las intersecciones del terreno con los planos secantes. Esta direccion se llama *linea de mayor pendiente*, porque es en efecto la que forma el mayor ángulo con el horizonte de cuantas lineas pueden imaginarse trazadas por un punto cualquiera de las vertientes. Del carácter distintivo de las lineas de mayor pendiente se deduce el de sus proyecciones, que es el de ser normales á las dos curvas de nivel entre las que se hallan comprendidas; y así se ha convenido que las plumadas que sirven para sombrear representen las proyecciones de aquellas lineas, y se trazan en consecuencia normales á las dos curvas, segun lo indica la figura 211ª

En el método frances no se hace hipótesis determinada respecto de la direccion de la luz, sino que se ha adoptado la regla de trazar las plumadas tanto mas próximas entre sí cuanto mayor es la inclinacion del terreno. Con el fin de establecer una ley de gradacion que permitiese distinguir unas de otras las pendientes suaves que son las que mas importa apreciar, se habia convenido al principio en representar los terrenos horizontales por el blanco puro del papel, admitiendo tambien que el negro puro representase los inclinados 45° respecto del horizonte. Los terrenos de mayor inclinacion se representaban como rocas ó escarpados. Con todo, para disminuir algo la intensidad de las tintas, especialmente cerca del límite 45°, se tomaba por relacion entre el negro y el blanco correspondiente á cualquiera declive, la del seno del doble del ángulo de inclinacion, ménos $\frac{1}{15}$. Siendo i este ángulo, la cantidad de negro era............ $n = \text{sen. } 2\,i - \frac{1}{15}$; de manera que para $i = 45°$, resultaba $n = \frac{14}{15}$, ó sea 1 parte de blanco para 14 de negro. Dividiendo un espacio dado en la proporcion que dá el cálculo para cualquiera valor de i, una de las partes representaba la cantidad relativa de negro, que se repartia en seguida en todo el espacio en que el terreno tenia esa inclinacion, pudiéndose así construir de una sola vez la escala de sombras que expresaban el tono propio de cada declive sin necesidad de hacer el cálculo para todos los casos particulares. Mas adelante verémos el modo de formar esa clase de escalas.

En la práctica del dibujo, puede hacerse efectiva esta ó cualquiera otra ley de incremento de sombras de dos maneras diferentes; ó trazando plumadas tanto mas gruesas cuanto mayor sea la cantidad relativa de negro, ó bien trazándoles siempre finas, pero mas cercanas unas de otras en la misma proporcion.. En el método de que me ocupo se trazaban de modo que su distancia contada de eje á eje fuese igual á la cuarta parte de su longitud, quiere decir del espacio de una á otra curva. Se seguia esta regla hasta la inclinacion de 15° próximamente en que las curvas de nivel distan 0ᵐ002, y de allí en adelante continuaban trazándose las plumadas con la distancia constante de medio milímetro; pero dándoles mayor grueso al paso que aumentaba el ángulo de inclinacion hasta la de 45°.

En la actualidad se gradúan las sombras en el método frances, tomando por relacion entre el negro y el blanco los $\frac{3}{2}$ de la fraccion que representa el declive. Segun esto, siendo n y b las cantidades relativas de negro y blanco correspondientes al declive p, se tiene: $\frac{n}{b}=\frac{3}{2}p$; y como $p=\frac{0.0005}{\Delta}$, resulta $\frac{n}{b}=\frac{0.00075}{\Delta}$. En esta fórmula $\triangle$ representa, como se recordará, la distancia de las curvas en la parte en que es p la pendiente. Tomando por unidad un espacio cualquiera de esa distancia, y designando por r la relacion $\frac{n}{b}$, tendrémos: $b+n=1$, ó bien $n+\frac{n}{r}=1$, de donde se obtiene: $n=\frac{r}{r+1}$. De esta manera he calculado las partes de negro y blanco que corresponden á los siguientes ángulos de inclinacion en el sistema frances.

i	n	b	i	n	b	i	n	b
5°	0.11	0.89	25°	0.41	0.59	45°	0.60	0.40
10	0.21	0.79	30	0.46	0.54	50	0.64	0.36
15	0.29	0.71	35	0.51	0.49	55	0.68	0.32
20	0.35	0.65	40	0.56	0.44	60	0.72	0.28

Se ve que hácia los 12° de inclinacion el espacio ocupado por las plumadas ó lineas de sombra es la tercera parte de lo que queda blanco en el papel; hácia los 35° van casi en igual cantidad el negro y el blanco; y hácia los 60° el blanco se reduce á poco mas de la cuarta parte del espacio. Con las cantidades relativas de la tabla anterior puede formarse una escala para tomar de ella por comparacion la intensidad de la sombra que conviene á un ángulo dado de inclinacion, ó si se quiere, al valor correspondiente de $\triangle$.

273º En el sistema aleman se supone que la luz cae verticalmente sobre todos los puntos del terreno que se quiere representar. Cuando este es horizontal, refleja en la misma direccion vertical todos los rayos luminosos que recibe, y por consiguiente se representa con el blanco puro del papel. Por el contrario, un terreno inclinado 45° respecto de la vertical, reflejará horizontalmente los rayos luminosos, y como la vista del observador se supone tambien situada en la vertical de cada punto, resulta que no recibirá luz alguna; y por eso se representan con el negro puro los terrenos que tienen esa inclinacion. Entre estos límites se gradúan las cantidades relativas de negro y de blanco, no proporcionalmente al declive, sino al ángulo mismo de inclinacion. Así, por ejemplo, considerando desde 0° hasta 45° diez grados principales de sombra, cada uno de los cuales corresponde á 5° de inclinacion, tendrémos que para 0° todo el espacio será blanco. Los nueve tonos restantes se obtienen dividiendo en nueve partes iguales un espacio cualquiera que se toma por unidad, siendo una de ellas negra para la inclinacion de 5°, dos para la de 10°, tres para la de 15°, &c. De este modo se forma la tabla siguiente, que contiene las cantidades de negro y blanco.

i	*n*	*b*	*i*	*n*	*b*	*i*	*n*	*b*
5°	1	8	20°	4	5	35°	7	2
10	2	7	25	5	4	40	8	1
15	3	6	30	6	3	45	9	0

Con estas cantidades se forma tambien el diapason ó escala de sombras que corresponde á este sistema.

Los planos dibujados de acuerdo con el método aleman quedan generalmente muy cargados de sombra cuando son montañasos los terrenos que representan. Tanto por esta causa como por no permitir la representacion de inclinaiones superiores á 45°, ni de una manera bien marcada las menores que 5°, se ha modificado este sistema en los Estados-Unidos, haciendo que las sombras crezcan con una poca de mas rapidez en las inclinaciones pequeñas y con alguna mas lentitud en las considerables. Las cantidades de negro y blanco adoptadas en esta modificacion son las que siguen:

i	*n*	*b*	*i*	*n*	*b*	*i*	*n*	*b*
De 2.°5 á 2.°75	1	10	De 15° á 16°	4	7	45°	7	4
De 5 á 6	2	9	,, 25 á 26	5	6	60	8	3
De 10 á 11	3	8	35°	6	5	75	9	2

Las inclinaciones no comprendidas en la tabla anterior se representan con lineas del mismo grueso que las correspondientes á la inclinacion mas inmediata; pero variando sus distancias ó intervalos, á fin de que aparezca una cantidad de blanco tanto mayor cuanto mas pequeño sea el ángulo de inclinacion. Conforme á esta regla, una inclinacion de 1.°25 por ejemplo, se representará con las mismas lineas que la de 2.°5, trazándolas únicamente á intervalos dobles que para esta última.

274º Sin hacer referencia á otras modificaciones de este género, solo haré especial mencion del sistema que ha adoptado el ingeniero

D. Agustin Diaz, actual profesor de delineacion en la Escuela de Ingenieros, por parecerme que tiene todas las ventajas apetecibles, unidas á la sencillez de las proporciones entre el blanco y el negro y á la extension de tonos suficiente para la representacion de toda clase de terrenos. El Sr. Diaz representa con el blanco puro, como en todos los demas sistemas, las superficies horizontales; y fija por límite superior de inclinacion la de 60° que indica con el negro absoluto, fundándose en que ese ángulo es el de mayor talud natural que adquieren las tierras consistentes, pues á mayores inclinaciones solo pueden sostenerse por sí solas las rocas muy duras, las cuales deben representarse como tales ó como escarpados. Entre los límites 0° y 60° el Sr. Diaz hace crecer la cantidad de negro proporcionalmente al ángulo de inclinacion, lo que en mi concepto tiene la ventaja de dar á los dibujos tonos mas vigorosos que en el sistema frances, sin la dureza de los del aleman puro.

Establecido el fundamento general de este sistema, procuremos expresar por medio de guarismos la intensidad de la sombra que corresponde á cualquiera grado i de inclinacion. Puesto que la mayor intensidad es la de una inclinacion de 60°, la cantidad relativa de negro para el ángulo i será: $n = \frac{i}{60°}$, y tomando por unidad de espacio el comprendido entre dos curvas en toda la parte en que es i la inclinacion, se tiene $b + n = 1$, ó bien $b = \frac{60° - i}{60°}$. De aquí se deduce que la relacion entre el negro y el blanco es $r = \frac{i}{60° - i}$. Con estas fórmulas he calculado la tabla siguiente que contiene las cantidades de negro y blanco correspondientes á cada 6° de inclinacion, añadiéndole tambien la distancia gráfica de las curvas expresada en milímetros y determinada por la relacion $\triangle = \frac{0^m0005}{\tan. i}$.

i	Δ	n	b	i	Δ	n	b	i	Δ	n	b
0°	∞	0.0	1.0	24°	1.12	0.4	0.6	48°	0.45	0.8	0.2
6	4.76	0.1	0.9	30	0.87	0.5	0.5	54	0.36	0.9	0.1
12	2.35	0.2	0.8	36	0.69	0.6	0.4	60	0.29	1.0	0.0
18	1.54	0.3	0.7	42	0.56	0.7	0.3				

Si se comparan los valores de n y b de este sistema con los que corresponden al frances, se notará que la intensidad de las sombras crece en ambos casi en igual proporcion desde 0° hasta 25°, por lo cual se pueden representar tambien con la misma claridad en uno y otro los pequeños declives que son los que mas importa distinguir, segun se ha dicho en otra parte. Desde 25° en adelante, el sistema del Sr. Diaz dá tonos mas intensos que los correspondientes al método frances, lo cual en mi opinion es ventajoso, porque comunica al dibujo un poco de mas vigor y de contraste sin llegar á la intensidad de sombras que caracteriza al sistema aleman. Por todas estas razones me parece que convendria cultivar el nuevo método y adoptarlo como nacional para nuestros planos topográficos.

Indiquemos ahora cómo se podria construir un diapason ó escala de sombras de acuerdo con este sistema de dibujo. Sobre una linea de longitud arbitraria *A B* (fig. 212ª) tómense 10 partes iguales, destinada cada una de ellas á representar la sombra de las 10 inclinaciones que constan en la tabla anterior comenzando desde 6°, y las cuales se han indicado tambien en la figura por medio de pequeñas rectas que forman con *A B* los mismos ángulos. El primero de estos espacios corresponde á la inclinacion de 6°, y por consiguiente deberá contener 1 parte de negro y 9 de blanco; el segundo corresponde á 12°, y tendrá 2 de negro y 8 de blanco; el tercero es el de 18°, por lo cual le corresponderán 3 de negro y 7 de blanco, &c. Si, pues, se divide cada uno de estos pequeños espacios en 10 partes iguales, se hará negra una de ellas en el primero, dos en el segundo, tres en el tercero, y así sucesivamente hasta el último, que es todo negro por representar la sombra de 60°. De esta manera se obtiene la proporcion del negro al blanco en cada espacio; pero para distribuirla en él con mas uniformidad, en la segunda zona *C D* dividida en espacios iguales á los de *A B* se traza doble número de plumadas que en esta última, siendo cada una de ellas de la mitad del grueso de las primeras, pues de esa manera es evidente que no se alterará la proporcion del negro al blanco. En la tercera zona *E F* se trazan cuatro plumadas en cada espacio con un grueso que sea la mitad de las de *C D* ó la cuarta parte de las de *A B*. En la cuarta zona *G H* deberán trazarse ocho plumadas en cada espacio, sujetándose á la misma regla para no alterar la proporcion, y prosiguiendo de esa manera hasta que las plumadas queden con la distancia y grueso relativo convenientes, segun la extension que se haya dado á los espacios. La última zona *G H* será la escala y servirá para ejecutar el dibujo imitando en lo posible sus grados de intensidad para las mismas inclinaciones. En la parte inferior de la figura se han sombreado algunos espacios comprendidos entre curvas de nivel, las cuales están trazadas con las distancias △ que convienen á las respectivas inclinaciones del terreno de 3° en 3°

Se comprenderá desde luego que en la ejecucion de los dibujos es imposible sujetarse estrictamente á la intensidad teórica de la sombra de cada declive; pero cuando se ha construido varias veces la escala y se ha adquirido bastante práctica en la apreciacion de los tonos á la simple vista, se podrán expresar diferencias de inclinacion de 3° á 4°, y acaso de ménos en los pequeños declives.

El dibujo puede llamarse la parte artística de la topografía, pues si bien está sujeto á determinadas reglas geométricas, no por eso influye ménos la práctica y el buen gusto del dibujante para evitar el amaneramiento y dar variedad á los planos con un estilo hermoso y libre, sin sacrificio de la verdad y de la precision geométricas. No siendo posible entrar aquí en detalles de ejecucion, que mas bien que á un tratado de topografía, corresponden á un curso especial de dibujo, me limito á presentar como modelo la lámina VIII y última de este libro, cuya preparacion debo á la bondad de D. Agustin Diaz, tan entendido topógrafo como hábil dibujante. En ella se han reunido los principales signos convencionales de la topografía, la mayor parte de los que, por ser bastante claros, no necesitan explicacion especial. Las letras que se ven en distintos lugares tienen las significaciones siguientes:

B.......... Barranca.	*S*.......... Salto ó cascada.
C.......... Cresta.	*B A*........ Banco de arena.
P.......... Platanar.	*T H*........ Terreno húmedo.
T.......... Thalweg.	*T L*........ Tierra labrada.

Por estos y por los demas caractéres que no se mencionan, se comprenderá que debe procurarse la representacion de los diversos objetos naturales y artificiales con la forma que tienen sus proyecciones horizontales.

El dibujo topográfico se vale tambien de varias tintas convencionales cuyo estudio es de alguna utilidad porque se prestan á la ejecucion mas rápida de los planos. Sin embargo, no puede negarse que el sistema de claro-oscuro con exclusion de cualquiera otro color, es el que ofrece mas belleza y mayor precision, por lo cual creo que es el que debe preferirse en el dibujo de planos de alguna importancia.

CAPITULO VII.

NIVELACION BAROMÉTRICA.

275. Se sabe que el barómetro es el instrumento que sirve para medir la presion que ejerce la masa de aire atmosférico que rodea á la tierra. Consiste en un tubo de vidrio abierto en uno de sus extremos y cerrado en el otro, que es el que queda hácia arriba en la posicion normal del aparato. Este tubo, que debe ser cilíndrico y de 0^m8 á 0^m9 de longitud, se llena en su totalidad de mercurio bien purificado, y se invierte en seguida para sumergirlo en un receptáculo en que tambien hay mercurio, cuidando de que en esta operacion no entre cantidad alguna de aire al interior del tubo. Entónces se ve que la columna líquida desciende hasta cierto punto B (fig. 213ª) en el cual se detiene, siendo la distancia $A\,B$ del nivel exterior al interior la que se llama *altura barométrica*, y es la que mide la presion atmosférica que se ejerce en A. En efecto, puesto que en la parte superior del tubo resulta un vacío perfecto, el nivel B de la columna no sufre presion alguna; mas como el nivel inferior A recibe la de toda la columna atmosférica que gravita sobre él, será preciso para que subsista el equilibrio, que el peso de la columna mercurial sea igual al de la atmosférica de la misma base.

El barómetro que brevemente se ha descrito se llama de *cisterna* ó *cubeta*, á causa del receptáculo colocado en su parte inferior; pero hay tambien otros barómetros llamados de *sifon*, como el que representa la figura 214ª, el cual se compone de dos tubos de igual diámetro y situados en el mismo eje, unidos entre sí por medio de otro tubo recurvo de diámetro menor. Los dos primeros están cerrados; pero el inferior tiene en O un agujero muy pequeño por donde se ejerce la presion del aire en el nivel A, y como todo el resto del tubo está lleno de mercurio, la presion mencionada es la que sostiene la columna barométrica, que como ántes, es la distancia $A\ B$ de uno á otro nivel. Los barómetros de sifon construidos de esta manera se deben al físico frances Gay-Lussac.

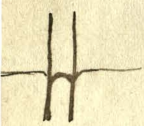
Algunas veces los tubos de los barómetros tienen grabadas las divisiones que sirven para medir las alturas de la columna; pero generalmente están aquellas trazadas á lo largo de una ranura longitudinal practicada en la armadura metálica que los cubre, y que sirve tambien para proteger la fragilidad del vidrio. Por lo regular las divisiones de la armadura indican milímetros, y se aproximan las lecturas hasta los diezmilímetros con un vernier movible á lo largo de la ranura por medio de un tornillo. En los barómetros de cubeta construidos por Fortin, el nivel inferior del mercurio puede elevarse ó bajarse lo necesario para que llegue á tocar una punta de marfil que está fija en la armadura é indica el *cero* de la escala. Con este objeto el fondo de la cubeta es de piel y susceptible de cierto movimiento que se le comunica por medio del tornillo T (fig. 213ª). De esta manera se eleva poco á poco el nivel inferior hasta que la imágen de la punta de marfil, que se ve por reflexion en la superficie del mercurio, esté en contacto con la misma punta vista directamente. En seguida se mueve el vernier de la armadura hasta que su *cero*, determinado por el borde de la pieza metálica en que está trazado, se vea tangente en B á la superficie del menisco convexo en que termina la columna barométrica. La lectura del vernier dará la indicacion del instrumento, puesto que el orígen de las divisiones coincide con la punta de marfil y por consiguiente con el nivel inferior del mercurio.

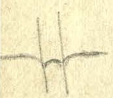
En los barómetros de Gay-Lussac se hacen las lecturas con dos vernieres, uno de los cuales se pone tangente en A (fig. 214ª) al menisco inferior, y el otro al superior, lo mismo que se ha explicado. La diferencia de ambas indicaciones suministra la altura barométrica si las divisiones están numeradas en un mismo sentido; pero como por lo regular no es así, sino que su cero está hácia el medio de la columna, la suma de ambas lecturas es la que expresa aquella altura.

Cuando un barómetro se traslada de un lugar á otro que esté mas ó ménos elevado que el primero, se nota en la columna un descenso ó un ascenso correspondiente á la diferencia de altura de los dos lugares, puesto que la presion atmosférica decrece necesariamente á medida que aumenta la elevacion de un punto respecto de la superficie de la tierra. La relacion que existe entre las variaciones de la columna barométrica y el desnivel de los puntos en que se observan es la que sirve para determinar este último elemento; pero ántes de darla á conocer indiquemos dos correcciones que deben hacerse á las indicaciones del barómetro para hacerlas perfectamente comparables entre sí.

276. Siempre que se sumerge un tubo de pequeño diámetro en un líquido cualquiera, es bien sabido que por la accion de la capilaridad el nivel en el interior del tubo no queda á la misma altura que en el exterior. Entre el vidrio y el mercurio la capilaridad produce el efecto de deprimir el líquido respecto de la altura que tiene su nivel exterior, de manera que la columna barométrica tal como se obtiene en los barómetros de cubeta, quiere decir, contada desde el nivel de esta, es realmente un poco menor de lo que seria sin la capilaridad, y en consecuencia de menor peso que la columna de aire correspondiente. Para obtenerla con exactitud seria preciso contarla desde el nivel que adquiriria el mercurio dentro del tubo si este estuviera abierto; pero es claro que esto equivale á añadirle una cantidad igual á la depresion capilar que conviene al diámetro interior del mismo tubo. La tabla siguiente contiene estas correcciones expresadas en milímetros, lo mismo que los diámetros interiores desde 2 hasta 20 milímetros.

abierto





DIÁMETRO.	DEPRESION.	DIÁMETRO	DEPRESION.	DIÁMETRO.	DEPRESION.
2	4.43	7	0.91	14	0.16
2.5	3.57	8	0.71	15	0.12
3	2.92	9	0.56	16	0.10
3.5	2.44	10	0.44	17	0.08
4	2.07	11	0.35	18	0.06
5	1.53	12	0.26	19	0.04
6	1.17	13	0.20	20	0.03

Si no se puede medir directamente el diámetro interior del tubo, se mide su circunferencia exterior c, y se tendrá con la exactitud necesaria:

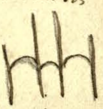
$\frac{1}{\pi} = 0.318$

$$\text{Diámetro interior} = 0.318\, c - 0^{m}0025$$

por que generalmente el espesor del tubo $= 0^{m}.00125$

Supongamos que se haya obtenido $0^{m}5876$ por altura barométrica con un instrumento de Fortin cuya circunferencia exterior sea $c = 0^{m}033$, y que deseamos corregirla de la capilaridad. El diámetro interior será $0.318 \times 0^{m}033 - 0^{m}0025 = 0^{m}008$, por lo cual la indicacion correcta es $0^{m}5876 + 0.0007 = 0^{m}5883$.

abiertos



abiertos

Cuando el diámetro de la cubeta es poco mayor que el del tubo, de tal manera que las paredes exteriores de este solo disten algunos milímetros de las de aquella, se hace tambien sentir la capilaridad en la cubeta; y entónces la correccion de la columna barométrica será la diferencia de las que corresponden al diámetro interior del tubo y á la distancia de este á la cubeta. Sin embargo, como la tabla precedente manifiesta que para diámetros ó distancias mayores que $0^{m}016$ es casi insensible la correccion, podrá despreciarse la que corresponde á la cubeta siempre que el diámetro interior de esta sea igual á $0^{m}032 + 0.318\,c$, ó mayor que esta misma cantidad. $0,016 + 0,016 + 0,318\,c$

La correccion de la capilaridad no tiene lugar en el barómetro de Gay–Lussac ni en ningun barómetro de sifon cuyos tubos sean de igual diámetro, porque la depresion será la misma en ambos y su efecto desaparecerá en la altura barométrica, puesto que esta resulta de la diferencia algebraica de las dos lecturas.

277º La otra correccion, que es comun á toda clase de barómetros, proviene de la temperatura que tenga el instrumento en el instante de la observacion. El mercurio, como todos los cuerpos, varia de volúmen con los cambios de temperatura; y como su peso, que es el que mide la presion atmosférica, es una funcion del volúmen, resultaria que si no se tomara en cuenta el efecto de la temperatura se tomaria como dato para calcular el peso un volúmen tanto mayor, cuanto mas alto fuera el grado de calor del instrumento. En otros términos, presiones iguales quedarian aparentemente medidas por volúmenes y en consecuencia por pesos desiguales.

El efecto de la temperatura se toma en cuenta anotando la indicacion de un termómetro unido al barómetro, y que por esta razon se llama termómetro *fijo*. Con este elemento y la altura de la columna se reduce esta á lo que seria á cualquiera otra temperatura; de manera que para comparar entre sí dos ó mas columnas barométricas basta reducirlas á una temperatura comun por medio del sencillo cálculo que voy á indicar. Sean B y B' las dos indicaciones del barómetro obtenidas cuando el termómetro fijo señala T y T' grados respectivamente. Designando por m el *coeficiente de dilatacion* del mercurio, quiere decir, la pequeñísima fraccion que aumenta su unidad de volúmen por un incremento de 1° del termómetro centesimal; por θ la temperatura comun á la cual se desea reducir ambas alturas; y finalmente por b y b' las alturas reducidas, tendrémos que B será igual á b, mas lo que esta haya aumentado por $T - \theta$ grados, que será $b\, m\, (T - \theta)$, ó lo que es lo mismo:

$$B = b\left(1 + m\,(T - \theta)\right)$$

Por idéntica razon, la otra altura dará:

$$B' = b'\left(1 + m\,(T' - \theta)\right)$$

y la relacion de las dos columnas reducidas á θ grados es:

$$\frac{b}{b'} = \frac{B\left(1 + m\,(T' - \theta)\right)}{B'\left(1 + m\,(T - \theta)\right)}$$

El coeficiente de dilatacion del mercurio tiene por valor.......... $m = 0.00018$ que por su pequeñez permite hacer la division de los binomios del segundo término hasta la primera potencia de m, de lo que resulta:

$$\frac{b}{b'} = \frac{B}{B'}\left(1 + m\,(T' - T)\right)$$

ecuacion independiente de θ, y que indica que para hacer comparables las dos columnas basta corregir por la diferencia de temperaturas de los barómetros la relacion de las alturas observadas. Esto equivale evidentemente á reducir una de las alturas á la temperatura de la otra, pues la columna B reducida á la temperatura T' seria $B\left(1 + m\,(T' - T)\right)$; ó bien B' reducida á T daria.......... $B'\left(1 - m\,(T' - T)\right) = \frac{B'}{1 + m\,(T' - T)}$.

Es acaso preferible reducir siempre á 0° todas las columnas barométricas; porque de esa manera se hacen directamente comparables, sea cual fuere su número. En tal caso se tiene $\theta = 0$, y las ecuaciones anteriores darán:

$$b = \frac{B}{1 + m\,T} = B - B\,m\,T$$

$$b' = \frac{B'}{1 + m\,T'} = B' - B'\,m\,T'$$

He supuesto hasta ahora que solo el mercurio se dilata; pero es claro que tambien influye la temperatura en la escala metálica que sirve para obtener las indicaciones B y B', y que generalmente es de laton. Designando por l su coeficiente de dilatacion, hallarémos que siendo su longitud á T grados mayor que á θ, menor número de divisiones habrán medido la altura de la columna, la cual en consecuencia deberá multiplicarse por $1 + l\,(T - \theta)$, de donde resulta:

$$B = b\,\frac{1 + m\,(T - \theta)}{1 + l\,(T - \theta)} = b\,\big(1 + (m - l)\,(T - \theta)\big)$$

ó $b = B\big(1 - (m - l)(T - \theta)\big)$

Se ve que la ecuacion es de la misma forma que las anteriores, con la única diferencia de introducir $m - l$ en lugar de m. Para reducir á 0° de temperatura se tendrá, pues:

$$b = B - B\,(m - l)\,T$$

Representando en general por F el producto del coeficiente $m - l$ por la altura barométrica, tendrémos para cualquiera columna B obtenida á la temperatura T:

$$b = B - F\,T$$

Con el fin de facilitar estas reducciones, que son muy frecuentes, he calculado la siguiente tabla de valores de F para cada centímetro de la columna barométrica, tomando $m = 0.00018$ y $l = 0.000018$ que corresponden al mercurio y al laton respectivamente.

Escala de laton en todo el largo del tubo

Tabla del coeficiente de T para reducir á 0° las alturas barométricas.
Argumento.—La altura barométrica.

ALTURA.	F.	ALTURA.	F.	ALTURA.	F.
0m36	0.000058	0m50	0.000081	0m64	0.000104
0. 37	. 60	0. 51	. 83	0. 65	. 105
0. 38	. 62	0. 52	. 84	0. 66	. 107
0. 39	. 63	0. 53	. 86	0. 67	. 109
0. 40	. 65	0. 54	. 87	0. 68	. 110
0. 41	. 66	0. 55	. 89	0. 69	. 112
0. 42	. 68	0. 56	. 91	0. 70	. 113
0. 43	. 70	0. 57	. 92	0. 71	. 115
0. 44	. 71	0. 58	. 94	0. 72	. 117
0. 45	. 73	0. 59	. 96	0. 73	. 118
0. 46	. 75	0. 60	. 97	0. 74	. 120
0. 47	. 76	0. 61	. 99	0. 75	. 122
0. 48	. 78	0. 62	. 100	0. 76	. 123
0. 49	0.000079	0. 63	0.000102	0. 77	0.000125

Coeficientes de dilatacion de varias materias

Cobre	0.000 01718	Alcohol á	
Laton	0.000 01878	Eter	
Bronce	0.000 01817	Agua pura	0.000 466
Vidrio	0.000 00861	Aire y gases	0.003 67
Mercurio	0.000 18018		
Agua pura	0.000 466		

Para indicar el uso de la tabla, reduzcamos á 0° las siguientes observaciones. Al nivel del mar y cuando el termómetro fijo señalaba 25.°3, la altura de la columna barométrica se halló ser de 0ᵐ.7620. Al mismo tiempo cerca de la cima del Chimborazo indicaba el barómetro 0ᵐ.3773 siendo de 10° su temperatura. Las reducciones serán:

0.000123 × 25.3 = 0ᵐ.0031	0.000061 × 10 = 0ᵐ.0006
Altª. observada = 0. 7620	Altª. observada = 0. 3773
,, reducida = 0ᵐ.7589	,, reducida = 0ᵐ.3767

Del mismo modo podriamos reducir la segunda altura barométrica á la temperatura de la primera y obtendriamos 0ᵐ.3782; ó bien la primera á la temperatura de la segunda, hallando 0ᵐ.7601. En los tres casos resultarian en la misma relacion, á saber:

$$\frac{0.7589}{0.3767} = \frac{0.7620}{0.3782} = \frac{0.7601}{0.3773} = 2.0146 \text{ próximamente}$$

$\frac{0.7589}{0.3767} = 2.01460$ $\frac{0.7620}{0.3782} = 2.01481$ $\frac{0.7601}{0.3773} = 2.01458$

278º Estando ya en aptitud de hacer comparables dos ó mas columnas barométricas, y puesto que estas decrecen al elevarnos verticalmente en la atmósfera, busquemos la relacion que existe entre sus variaciones y las alturas de los lugares en que se practiquen las observaciones.

Desde luego, si la densidad del aire fuera constante en toda la masa atmosférica y uniforme su temperatura, como el peso de la columna barométrica equilibra al de la columna atmosférica de la misma base, designando en general por P el peso específico del mercurio y por p el del aire, tendriamos la ecuacion:

$$Pb = pZ$$

en la que Z representa la altura de la atmósfera contada hasta el punto en que el barómetro indica b. Diferenciada esta relacion respecto de las variables Z y b, y atendiendo á que Z aumenta cuando b disminuye, hallariamos:

$$dZ = -\frac{P}{p}\, db \text{..............................} \quad (1)$$

Esta fórmula daria la diferencia de nivel entre dos puntos cono-

Las reducciones mas exactas, segun las form. son:
Reducidas ambas columnas á 0°... $B = B'(1-(m-l)(T-0)) = B'(1-(m-l)T) = B'(1-0.000162\,T)$
$b = b'(1-(m-l)t) = b'(1-0.000162\,t)$ de donde $\frac{B}{b} = \frac{B'(1-0.000162\,T)}{b'(1-0.000162\,t)} = \frac{0.7620(1-0.000162\times 25.3)}{0.3773(1-0.000162\times 10)} =$
Reducida b' á la temp. de B' .... $\frac{B}{b} =$

ciendo la de las columnas barométricas correspondientes; pero la igualdad de temperaturas y densidades en que está fundada solo puede admitirse para diferencias de nivel sumamente pequeñas, introduciendo los valores de P y p que convengan á cada lugar. Por ejemplo, se ha hallado que al nivel del mar y á 0° de temperatura la densidad del mercurio es 13.596, y 0.001299 la del aire perfectamente seco, tomando por unidad en ambas la del agua. Con estos valores se obtiene $\frac{P}{p} = \frac{13.596}{0.001299} = 10466$; de manera que si en las mismas condiciones quisiéramos determinar el desnivel que corresponde á $0^{m}.001$ de decremento en la columna barométrica, tendriamos:

$$d\,Z = 10466 \times 0^{m}.001 = 10^{m}.466$$

En este y otros casos semejantes la ecuacion (1) daria suficiente exactitud; pero en general para desniveles mas considerables es inadmisible la hipótesis de uniformidad de pesos específicos. Veamos cómo debe procederse, admitiendo por lo pronto la igualdad de temperatura con el fin de simplificar la investigacion.

Supongamos la columna atmosférica (figura 215.ª) á 0° grados de temperatura y dividida en secciones ó capas de espesor igual y bastante pequeño para poder admitir que en cada una sea uniforme la densidad del aire, aunque variable de una seccion á otra. Siendo z el grueso comun de estas capas, sus alturas contadas desde el nivel del mar formarán la siguiente progresion aritmética:

$$\div\, 0 \,.\, z \,.\, 2z \,.\, 3z \,.\, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; nz \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Designando por b la altura del barómetro al nivel del mar, y por $b_1, b_2, b_3, \ldots\ldots\; b_n$ las que corresponden á la parte superior de la primera, de la segunda, de la tercera,......... de la n^{a} capas, encontrarémos que estas alturas van decreciendo segun cierta ley que vamos á determinar.

Puesto que en cualquiera punto de la masa atmosférica la columna barométrica equilibra el peso de la columna de aire que gravita sobre ella, resulta que b mide la presion del aire al nivel del mar, b_1 en la parte superior de la primera capa, b_2 en la parte superior de la segunda, &c., lo cual equivale á decir que $b - b_1$ representa el peso de la primera capa, $b_1 - b_2$ el de la segunda, y así sucesivamen-

Adviértase que con la suficiente aproximacion todas estas relaciones pueden trasformarse á una sola, correspondiente á la de la reduccion de la columna en la estacion superior b' á la de la inferior B', pues:

reducidas ambas á la temp. comun θ... $B = B'(1-(m-\lambda)(T-\theta))$, $b = b'(1-(m-\lambda)(t-\theta))$; $\frac{B}{b} = \frac{B'}{b'}\cdot\frac{1}{\frac{1-(m-\lambda)t}{1-(m-\lambda)T}} = \frac{B'}{b'}\cdot\frac{1}{1+(m-\lambda)(T-\theta)-(m-\lambda)(t-\theta)} = \frac{B'}{b'}\cdot\frac{1}{(1+(m-\lambda)(T-t))}$

Reducidas ambas á 0° $\frac{B}{b} = \frac{B'(1-(m-\lambda)T)}{b'(1-(m-\lambda)t)} = \frac{B'}{b'}\cdot\frac{1}{\frac{1-(m-\lambda)t}{1-(m-\lambda)T}} = \frac{B'}{b'}\cdot\frac{1}{(1+(m-\lambda)(T-t))}$

Reducida B' á la temp. de b'... $\frac{B}{b} = \frac{B'(1+(m-\lambda)(t-T))}{b'} = \frac{B'}{b'}\cdot\frac{1}{(1+(m-\lambda)(T-t))}$

Reducida b' á la temp. de B'... $\frac{B}{b} = \frac{B'}{b'}\cdot\frac{1}{(1+(m-\lambda)(T-t))}$ ó por último $\frac{B}{b} = \frac{B'}{(1+0.000162(T-t))}$

te. En igualdad de volúmenes los pesos son proporcionales á las densidades ó á los pesos específicos, por lo que si designamos por p_1, p_2, p_3, &c., las de las diversas capas, tendrémos:

$$p_1 : p_2 :: b - b_1 : b_1 - b_2$$

Segun la ley de Mariotte se tiene tambien que las densidades de los gases son directamente proporcionales á los pesos que los oprimen, y por consiguiente:

$$p_1 : p_2 :: b_1 : b_2$$

De estas dos proporciones resulta:

$$b - b_1 : b_1 - b_2 :: b_1 : b_2$$

y puesto que en toda proporcion la suma de los antecedentes y la de los consecuentes guardan entre sí la misma razon que la de un antecedente á su consecuente, hallarémos:

$$b : b_1 :: b_1 : b_2$$

De igual manera hallariamos que $b_1 : b_2 :: b_2 : b_3$ &c., que dán proporciones continuas y pueden ponerse en forma de progresion como sigue:

$$\div b : b_1 : b_2 : b_3 : \dots\dots\dots\dots b_n \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (3)$$

Esto demuestra que cuando las alturas contadas desde el mar crecen en progresion aritmética (2), las indicaciones correspondientes del barómetro decrecen en progresion geométrica.

El conjunto de las progresiones (2) y (3) ofrece, pues, la mayor analogía con un sistema de logaritmos, y puede hacerse mas completa dando á la (3) la forma de progresion creciente y asignándole la unidad por primer término. Para lo primero basta dividir la unidad por cada término, y para lo segundo multiplicar por b toda la progresion, de lo cual resulta el sistema:

$$\div 0 : z \;.\; 2z \;.\; 3z \;.\; \dots\dots\dots\dots nz$$

$$\div\div 1 : \frac{b}{b_1} : \frac{b}{b_2} : \frac{b}{b_3} : \dots\dots\dots\dots \frac{b}{b_n}$$

y por consiguiente se tendrá:

$$z = \text{Log. } b - \text{Log. } b_1$$
$$2z = \text{Log. } b - \text{Log. } b_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$nz = \text{Log. } b - \text{Log. } b_n$$

Restando una de otra dos cualesquiera de estas ecuaciones, por ejemplo, la segunda de la última, se elimina á Log, b y se tiene.

$$(n - 2)\, z = \text{Log. } b_2 - \text{Log } b_n$$

El primer miembro de esta ecuacion no es otra cosa mas que la diferencia de altura entre la segunda y la n^a secciones, independientemente del grueso z que se les asigne; por lo cual si convenimos en designar siempre por n el desnivel entre dos puntos, por B la altura barométrica en la estacion inferior, y por b la correspondiente á la estacion superior, podrémos escribir en general:

$$n = \text{Log. } B - \text{Log. } b$$

279º A la verdad este sistema de logaritmos, que llamarémos *barométrico*, no nos es conocido: el sistema usual es el tabular cuya base es 10; pero puesto que para pasar de un sistema á otro de logaritmos basta multiplicar los del uno por un coeficiente constante llamado *módulo*, tendrémos la facultad de valernos del tabular si conseguimos determinar el módulo que lo convierte en barométrico. Designándolo por C, la ecuacion anterior se escribirá como sigue, siendo log. B y log. b logaritmos tabulares:

$$n = C\,(\text{log. } B - \text{log. } b) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Toda la dificultad queda, pues, reducida á la determinacion de C. Su valor podria hallarse experimentalmente haciendo una nivelacion topográfica entre dos puntos, y observando despues en ellos las indicaciones del barómetro. Entónces conociendo n, B y b tendriamos:

$$C = \frac{n}{\text{log. } B - \text{log. } b}$$

Pero hay un método mas expedito para determinar este coeficiente.

Se ha visto, en efecto, que para diferencias de nivel muy pequeñas, la ecuacion (1) dá toda la exactitud que puede proporcionar una nivelacion topográfica. Supongamos, segun esto, que sea β la indicacion del barómetro cuando son P y p los pesos específicos del mercurio y del aire respectivamente; que en seguida se coloque el instrumento en un punto en que señale $\beta + m$; y por último, que se eleve á otro punto en que indique $\beta - m$, siendo m una fraccion muy pequeña. Tendrémos entónces $B = \beta + m$; $b = \beta - m$; y el incremento que en la ecuacion (1) se designó por db será en este caso d $b = - 2\ m$. La diferencia de nivel d Z ó n será, pues:...... $n = 2\ \frac{P}{p}\ m$, que sustituido en la expresion de C, dará:

$$C = \frac{2\ \frac{P}{p}\ m}{\log.\left(\beta\left(1 + \frac{m}{\beta}\right)\right) - \log.\left(\beta\left(1 - \frac{m}{\beta}\right)\right)} = \frac{2\ \frac{P}{p}\ m}{\log B - \log b}$$

Desarrollando los logaritmos hasta los segundos términos de las series solamente, por ser m tan pequeño como se quiera, y reduciendo, resulta:

$$C = \frac{P\beta}{p\,M} \text{..................................} \quad (5)$$

fórmula en la cual M representa el módulo 0.43429...... de los logaritmos tabulares. Para aplicarla determinemos el valor del coeficiente tomando $P = 13.596$ y $p = 0.001299$, que como se dijo al principio, son las densidades del mercurio y del aire á 0° de temperatura y cuando la presion atmosférica es $\beta = 0^{m}760$

P.........	1.133411	
β.........	9.880814	
M.........	—9.637784	
p.........	—7.113609	
C.........	4.262832	$C = 18316$

280º Este valor de C no conviene ciertamente mas que á las circunstancias particulares que han servido á su determinacion, á saber: las densidades del mercurio y del aire á 0° de temperatura, y cuando este último está perfectamente seco y sometido á la presion de $0^{m}760$; pero habiendo obtenido la expresion general (5) del coeficiente, bastará introducir en ella los valores de P y p que convengan á otras circunstancias para obtener tambien el correspondiente de C.

La densidad del mercurio disminuye cuando crece su temperatura, puesto que en igualdad de pesos la dilatacion hace aumentar su volúmen; pero como se ha indicado ya la manera de reducir á 0° las columnas barométricas, no tendrémos que ocuparnos de calcular el valor de P; y por el contrario considerarémos esta cantidad como constante, puesto que la reduccion mencionada dá á conocer la altura y en consecuencia el peso de la columna á 0° de temperatura. No sucede lo mismo con la densidad del aire, en primer lugar por su temperatura, en segundo porque siempre contiene alguna humedad que disminuye algo su peso, y en tercero porque la presion á que está sometido, variando de un punto á otro de la atmósfera, influye directamente en su volúmen y por consecuencia en el peso de este, segun el principio ó ley de Mariotte.

Vamos, pues, á hallar la expresion general de la densidad del aire suponiendo que es θ su temperatura, β la presion á que está sometido y e su estado higrométrico, quiere decir: e representa la relacion entre la cantidad de vapor de agua contenida en la atmósfera y la necesaria para que llegue á su punto de saturacion.

Es un principio de la Física que en las mezclas de gases y vapores cada uno de estos cuerpos ejerce la misma presion que si ocupara todo el espacio en que está contenida la mezcla. Segun esto, designando por f la fuerza elástica del vapor que á la temperatura θ saturaria una masa de aire, tendrémos que ef será la fuerza de expansion del vapor que existe realmente en la atmósfera; y entónces puesto que β mide la presion de la mezcla, resulta que $\beta - ef$ es la que corresponde al aire seco contenido en ella. Fundados en este principio, calcularémos por separado el peso del aire y el del vapor para hallar en seguida su suma, que será el peso de la mezcla. ef

Si se designa por a el coeficiente de dilatacion de los gases, y se toma por unidad la densidad del aire á 0°, su densidad á θ grados será $\frac{1}{1+a\theta}$. Como por otra parte, en igualdad de volúmenes las densidades de los fluidos elásticos son proporcionales á las presiones á que están sometidos, siendo 0.001299 la del aire á la presion 0ᵐ760, su densidad á la presion $\beta - ef$ es: $dens = \frac{peso}{vol}$

$$0.001299 \frac{\beta - ef}{0^m760\,(1 + a\,\theta)}$$

$d : d' :: p : p'$ $0.001299 : d' :: 0.760 : \beta - ef$

$d' = 0.001299 \frac{\beta - ef}{0.760}$ y á θ ... $0.001299 \frac{\beta - ef}{0.760(1+a\theta)}$

Respecto del vapor tenemos que á 0° su densidad es solo 0.62 de la del aire; y en consecuencia á la temperatura θ y á la presion ef, será:

densidad del vapor
á $0^{\circ} = 0.001299 \times 0.62$

$$(0.001299 \times 0.62) \frac{ef}{0^{m}760\,(1 + a\,\theta)}$$

La suma de estos dos valores representa, pues, la densidad del aire en el estado higrométrico e, á saber:

$$p = \frac{0.001299}{1 + a\,\theta} \left(\frac{\beta - ef + 0.62\,ef}{0^{m}760} \right) = \frac{0.001299\,\beta}{0^{m}760\,(1 + a\,\theta)} \left(1 - 0.38\,\frac{ef}{\beta}\right)$$

Sustituyendo este valor en la expresion general (5) del coeficiente barométrico, se obtiene:

$$C = \frac{0^{m}760\,P\ \ (1 + a\,\theta)}{0.001299\,M \left(1 - 0.38\,\frac{ef}{\beta}\right)} = 18316\ \frac{1 + a\,\theta}{1 - 0.38\,\frac{ef}{\beta}}$$

Este resultado indica que en estas condiciones el coefiniente es un poco mayor que el que corresponde al aire seco á 0° de temperatura y $0^{m}760$ de presion. El denominador de la fórmula precedente siempre difiere muy poco de la unidad en atencion de que aun á las mayores temperaturas de la atmósfera es muy pequeña la fuerza elástica f del vapor que contiene. En virtud de estas consideraciones puede simplificarse la expresion de C introduciendo en su denominador valores medios de las diversas cantidades que lo forman. Desde luego en las circunstancias ordinarias de la atmósfera, puede admitirse $e = \frac{1}{2}$, pues si bien en los lugares poco elevados é inmediatos á las costas el aire por lo general se acerca mas á su estado de saturacion ó á $e = 1$, tambien en los países elevados está comunmente muy seco; y así es que en conjunto $e = 0.5$ representa bastante bien el estado higrométrico medio de la atmósfera. En cuanto á la presion β debe tenerse presente que adquiere su mayor valor al nivel del mar, en que es próximamente de $0^{m}760$, y el menor en las altas regiones de la atmósfera cuyo límite corresponde á $\beta = 0$; pero como en las mayores alturas accesibles al hombre no baja generalmente el barómetro de $0^{m}38$ adoptarémos el valor medio $\beta = 0^{m}570$. Respecto de la fuerza elástica del vapor, se sabe que crece con la temperatura del aire, como lo manifiesta la siguiente tabla que contiene parte de los resultados obtenidos experimentalmente por Mr. Regnault, expresados en partes de la columna barométrica.

TEMP.ª	f	TEMP.ª	f
0°	0ᵐ005	20°	0ᵐ017
5	0. 007	25	0. 023
10	0. 009	30	0. 031
15	0. 013	35	0. 040

Por ella se notará que entre los límites 0° y 35°, que comprenden las temperaturas comunes de la atmósfera, puede representarse con bastante aproximacion la fuerza elástica á la temperatura θ, por la ecuacion:

$$f = 0^{m}005 + 0^{m}001\ \theta$$

siendo el coeficiente de θ la diferencia media por cada grado del termómetro centesimal, obtenida por la sustraccion de los números extremos $0^{m}005$ y $0^{m}040$ de la tabla y su division por 35°.

Sustituyendo, pues, $e = 0.5$, $\beta = 0^{m}57$ y $f = 0^{m}005 + 0^{m}001\ \theta$ en el valor de C, obtendrémos:

$$C = 18316\ \frac{1 + a\,\theta}{0.99833 - 0.00033\,\theta} = \frac{\cancel{18316\,(1 + a\,\theta)}}{\cancel{0.99833\,(1 - 0.00033\,\theta)}} = \frac{18316\,(1 + a\,\theta)}{0.99833\left(1 - \frac{0.00033}{0.99833}\theta\right)}$$

$$= \frac{18316\,(1 + a\theta)}{0.99833\,(1 - 0.00033\,\theta)}$$

porque la division en el segundo término reproduce el numerador hasta la diezmilésima

que se puede poner bajo esta forma, atendiendo á la pequeñez del coeficiente numérico de θ:

$$C = 18346\ (1 + a\,\theta)\ (1 + 0.00033\,\theta)$$

$$\cancel{C = 18346\,(1 + a\theta + 0.00033\,\theta + 0.00033\,a\theta^2)}$$

Efectuando la multiplicacion hasta la primera potencia de θ, y recordando que el coeficiente de expansion de los gases es.......... $a = 0.00367$, resulta:

$$C = 18346\ (1 + 0.004\,\theta)$$

Antes de sustituir este valor en la ecuacion (4) que dá la diferencia de nivel, recordemos que θ representa la temperatura de la columna atmosférica. Para obtener este dato se observan las indicaciones de un termómetro comun al mismo tiempo que se miden las alturas barométricas B y b. Este termómetro, llamado *libre* para distinguirlo del fijo que suministra las temperaturas de los barómetros, debe establecerse al aire libre y á la sombra para evitar que alguna causa

tomando en esta $a = 0.00367$

$C = 18346\,(1 + 0.004\,\theta\,(1 + 0.000297\,\theta))$

Para $\theta = 0°$ . . . . $C = 18346$

" $= 5°$ . . . . $C = 18713$

" $= 10°$ . . . . $C =$

anormal altere sus verdaderas indicaciones. Siendo estas T y t en las estaciones inferior y superior respectivamente, se admite que la masa de aire comprendida entre ellas tiene una temperatura media representada por el término medio de las extremas T y t. Esta hipótesis está fundada en que cuando ninguna circunstancia perturba el estado normal de la atmósfera, se observa un decremento gradual de temperatura á medida que aumenta la elevacion sobre el nivel del mar. La variacion es próximamente de 1° del termómetro centesimal por cada 190^m de altura, hecho que parece indicar que las temperaturas de las capas de aire decrecen en progresion aritmética, y en consecuencia justifican aquella suposicion. Tomando, pues,...... $\theta = \frac{1}{2}(T + t)$ en el valor de C y sustituyéndolo en la ecuacion (4) se obtiene:

$$n = 18346 \left(1 + 0.002\,(T + t)\right)(\log B - \log. b) \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

281º Esta fórmula suministra las diferencias de nivel con ménos de $0^m.6$ de error por cada 100^m de altura, de manera que puede emplearse para medir elevaciones que no excedan de unos cuantos centenares de metros; pero cuando se trata de obtener con exactitud desniveles muy considerables, es preciso hacerle ciertas correcciones originadas por la diversa intensidad con que obra la gravedad ó pesantez á diferentes distancias del centro de la tierra. Como para establecer la fórmula precedente se tomaron por datos los pesos del aire y del mercurio tales como resultan de los experimentos hechos al nivel del mar y referidos á la latitud media de 45°, se infiere que variando estas circunstancias, no serán numéricamente los mismos aquellos elementos en atencion á que los pesos varian tambien con la intensidad de la gravedad. Segun esto, tanto el aire como el mercurio pesarán un poco ménos á cierta altura de la atmósfera que en la superficie de la tierra; y aun en la misma superficie habrá alguna diferencia á causa de que no siendo exactamente esférica tampoco son iguales las distancias del centro á todos sus puntos. Las correcciones que se deducen de estas circunstancias son ciertamente muy pequeñas; pero no del todo despreciables en atencion á la magnitud de la relacion que existe entre el peso del mercurio y el del aire.

La gravedad es una fuerza que varia en razon inversa de los cuadrados de las distancias al centro de atraccion, de manera que si designamos por γ la que corresponde á la latitud de 45° y por R' el radio terrestre á la misma latitud, será fácil calcular la intensidad con que obra en las dos estaciones sobre las columnas barométricas B y b, así como sobre la parte media de la columna de aire comprendida entre ellas. Con este objeto representemos por R el radio que corresponde á la latitud en que se ejecutan las observaciones, por G y g respectivamente las intensidades de la gravedad en los puntos en que son B y b las alturas barométricas, y por g' la que obra sobre la columna de aire. Llamando r la altura de la estacion inferior sobre el nivel del mar, tendrémos que su distancia al centro de la tierra es $R+r$; la de la estacion superior será $R+r+n$; y la del medio de la columna de aire $R+r+\frac{1}{2}n$. En consecuencia se tienen las tres ecuaciones:

$$\gamma R'^2 = G(R+r)^2; \quad \gamma R'^2 = g(R+r+n)^2; \quad \gamma R'^2 = g'(R+r+\tfrac{1}{2}n)^2$$

Si tomamos por unidad la pesantez á 45°, las intensidades relativas de las otras son:

$$G = \frac{R'^2}{R^2\left(1+\frac{r}{R}\right)^2} \quad g = \frac{R'^2}{R^2\left(1+\frac{r+n}{R}\right)^2} \quad g' = \frac{R'^2}{R^2\left(1+\frac{r+\frac{1}{2}n}{R}\right)^2}$$

$G = \frac{R'^2}{R^2}\left(1-\frac{2r}{R}\right)$ desechando las 2^as potencias de los quebrados

y como en igualdad de pesos los volúmenes son inversamente proporcionales á las intensidades de la pesantez, las cantidades precedentes deberán ser los coeficientes de B, b y n en la fórmula (6) para que estos elementos queden reducidos á igualdad de circunstancias, y se tendrá:

$$n\,g' = 18346\left(1+0.002\,(T+t)\right)(\log. B\,G - \log. b\,g)$$

El último factor puede abreviarse de este modo: llamando B' y b' las alturas corregidas $B\,G$ y $b\,g$, é introduciendo los valores de G y g, se hallará:

$$\log. B' = \log. B + \log. \frac{R'^2}{R^2} - \frac{2Mr}{R}$$

$\frac{1}{1+a} = 1-a+a^2-a^3 \ldots$

$$\log. b' = \log. b + \log. \frac{R'^2}{R^2} - \frac{2Mr}{R} - \frac{2Mn}{R}$$

cuya diferencia produce en la ecuacion anterior:

$$n\,g' = 18346\left(1+0.002\,(T+t)\right)\left(\log. B - \log. b + \frac{2Mn}{R}\right)$$

de la que se obtiene por último sustituyendo el valor de g':

y suprimiendo el termino $\left(\frac{r+\frac{1}{2}n}{R}\right)^2$ del ultimo factor

$$n = 18346 \frac{R^2}{R'^2}\left(1+0.002\,(T+t)\right)\left(\log. B - \log. b + \frac{2Mn}{R}\right)\left(1+\frac{2r+n}{R}\right) \dots (7)$$

282º Para aplicar esta fórmula general deberia calcularse por el método de aproximaciones sucesivas, suponiendo primero $n = 0$ en el segundo miembro. De esta manera se obtendria el valor aproximativo n' que se introduciria despues en lugar de n; pero como son tan pequeñas las correcciones, es preferible adoptar un procedimiento mas breve que prácticamente dá la misma exactitud. Desde luego la relacion $\frac{R'^2}{R^2}$ que difiere muy poco de la unidad, puede calcularse atendiendo á la figura real de la tierra, y se ha hallado que designando por ϕ la latitud de lugar cuyo radio es R, resulta:

$$\frac{R^2}{R'^2} = 1 + 0.0033 \cos. 2\,\phi$$

El valor del radio á cualq. latitud = a r $r = (1-e^2 \sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}$
Luego $\frac{R^2}{R'^2} = \frac{(1-e^2\sin^2\varphi)}{1-\frac{1}{2}e^2}$ y á la de 45° $= (1-\frac{1}{2}e^2)^{\frac{1}{2}}$

siendo la constante 0.0033 una cantidad que depende de la pequeña excentricidad de los meridianos. Respecto de la correccion $\frac{2Mn}{R}$ correspondiente á la diferencia logarítmica de las alturas barométricas observadas, es tan pequeña que podria despreciarse casi siempre; pero para evitar el error que á veces podria originarse de su completa omision, lo que debe hacerse es calcularla para un valor medio del desnivel n, y adoptar el resultado como cantidad constante para todos los demas casos. De esta manera he hallado que la correccion equivale á aumentar un poco el coeficiente numérico 18346 cambiándolo en 18370. Con esta modificacion y haciendo para abreviar:

$\sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)$

$\frac{R^2}{R'^2} = \frac{1-\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}e^2\cos 2\varphi}{1-\frac{1}{2}e^2}$

$1+\frac{1}{2}e^2\cos 2\varphi$

$e^2 = 0.00667$

$$A = 18370\,(\,1 + 0.0033 \cos. 2\,\phi)$$

$$D = 1 + 0.002\,(T + t)$$

la fórmula queda reducida á

$$n = A\,D\,(\log. B - \log. b)\left(1 + \frac{2\,r + n}{R}\right) \dots\dots\dots\dots (8)$$

Para facilitar las aplicaciones he calculado los logaritmos de A y D que pueden tomarse de las dos tablas de las páginas siguientes, con los argumentos ϕ para la primera y $T + t$ para la segunda.

Aunque el segundo miembro de la fórmula (8) contiene todavía la incógnita n, se calcula con mucha facilidad de la manera que voy á indicar. Representando por n' el valor aproximativo que se obtiene suponiendo nula la cantidad $2r + n$, que es realmente muy pequeña respecto de R, resulta $n = n'\left(1 + \frac{2r + n'}{R}\right)$; y tomando los logaritmos en esta ecuacion, tendrémos:

$$\log. n = \log. n' + \frac{2Mr}{R} + \frac{Mn'}{R}$$

lo cual indica que para hallar el logaritmo del verdadero desnivel basta hacer al del aproximativo las pequeñas correcciones por r y n'. Se recordará que r representa la altura de la estacion inferior sobre el nivel del mar; pero como las mas veces se emplea la fórmula barométrica para calcular la altura absoluta de un punto, resulta que casi siempre la estacion inferior esté al nivel del mar, y en consecuencia se tiene $r = 0$. Aun cuando no sea así, la correccion por r es insignificante, pues para $r = 1000^m$, apenas llega á 0.00014 el valor de $\frac{2Mr}{R}$. En consecuencia, no hay inconveniente en suponer siempre $r = 0$, lo cual convierte la anterior correccion en la siguiente:

$$\log. n = \log. n' + \frac{Mn'}{R} = \log n' + C$$

que está contenida en una de las tablas que van á continuacion, de donde puede tomarse con las primeras cifras de log. n' por argumento.

Con ayuda de estas tablas el cálculo de la fórmula (8) es extremadamente sencillo, como lo manifiestan los siguientes ejemplos. El baron Alejandro de Humboldt, cerca de la cima del Chimborazo observó el barómetro y halló que su altura era de 0^m3773, su temperatura de 10° y la del aire $t = -1.°6$. Al mismo tiempo indicaba el barómetro el nivel del mar 0^m7620 siendo su temperatura igual á la del aire, á saber: $T = 25.°3$. Estas mismas alturas barométricas se han reducido á 0° en la pág. 490, por lo cual los datos para determinar la elevacion de la montaña son:

ESTACION INFERIOR.		ESTACION SUPERIOR.	
$B = 0^m7589$	$T = 25.°3$	$b = 0^m3767$	$t = -1.°6$

La latitud media de las dos estaciones era $\phi = 1°45'$. Con este

TABLA I.—Factor barométrico dependiente de la latitud.

Argumento la latitud geográfica φ promed. de las estac.

ϕ	Log. A	ϕ	Log. A	ϕ	Log. A
0°	4.26554	16°	4.26532	32°	4.26473
1	. 554	17	. 529	33	. 469
2	. 554	18	. 526	34	. 465
3	. 553	19	. 523	35	. 460
4	. 553	20	. 520	36	. 455
5	. 552	21	. 517	37	. 450
6	. 551	22	. 514	38	. 446
7	. 550	23	. 511	39	. 441
8	. 549	24	. 507	40	. 436
9	. 547	25	. 503	41	. 431
10	. 545	26	. 499	42	. 426
11	. 544	27	. 495	43	. 421
12	. 542	28	. 491	44	. 416
13	. 540	29	. 487	45	. 411
14	. 537	30	. 483	46	. 406
15	4.26535	31	4.26478	47	4.26401

argumento la Tabla I dá log. $A = 4.26554$, y con $T + t = 23.°7$ se obtiene por la Tabla II log. $D = 0.02011$. El cálculo será, pues:

$B = 0.7589$ $\quad$ log. $B = 9.88018$ $\quad$ A.............. 4.26554

$b = 0.3767$ $\quad$ log. $b = 9{\cdot}57600$ $\quad$ D.............. 0.02011

$\frac{B}{b} = \frac{0.7589}{0.3767} = 2.0146$ $\quad$ log. B — log. b = 0.30418.............................. 9.48313

n'.............. 3.76878 $\quad n' = 5871.9$

Correc. (Tabla III)... 0.00040

n.............. 3.76918 $\quad n = 5877^{m}3$

Casi todos los autores de fórmulas barométricas han calculado esta altura, que es sin duda una de las mayores á que puede llegar el hombre. Para que se juzgue del grado de exactitud que puede esperarse de la (8) consignaré algunos de los resultados obtenidos por diversas fórmulas.

La del Sr. Moral dá........................ $n = 5877^{m}0$
El Baron de Humboldt calcula.......... $n = 5879.\ 0$
Mr. Biot por su fórmula.................. $n = 5874.\ 8$
La de Laplace produce..................... $n = 5877.\ 0$
Mr. Puissant encuentra.................... $n = 5868.\ 3$ (*)

medio de los 4 primeros $n = 5876.95$

Ejemplo 2º—Para determinar la altura de Guanajuato sobre el nivel del mar, el mismo Sr. de Humboldt observó en esa ciudad el

(*) No he repetido los cálculos de Mr. Puissant (*Traité de Géodesie*, vol 2º, pág. 478); pero atendiendo á la discordancia del resultado, creo que deben tener alguna equivocacion.

Tabla II.

Factor barométrico dependiente de la temperatura del aire.

T + t	Log D.	Dif.		T + t	Log D.	Dif.
50°	0.04139			58°	0.04766	
51	0.04218	79		59	0.04844	78
52	0.04297	79		60	0.04922	78
53	0.04375	78		61	0.04999	77
54	0.04454	79		62	0.05077	78
55	0.04532	78		63	0.05154	77
56	0.04610	78		64	0.05231	77
57	0.04688	78		65	0.05308	77
58	0.04766	78		66	0.05385	77

Log. n	Correccion. C	Log. n	Correccion. C	Log. n	Correccion. C
2.50	0.00002	3.15	0.00010	3.50	0.00022
2.60	. 3	3.20	. 11	3.55	. 24
2.70	. 3	3.25	. 12	3.60	. 27
2.80	. 4	3.30	. 14	3.65	. 30
2.90	. 5	3.35	. 15	3.70	. 34
3.00	. 7	3.40	. 17	3.75	. 38
3.10	. 9	3.45	. 19	3.80	. 43
3.15	0.00010	3.50	0.00022	3.85	0.00048

Log. n	
~~3.85~~	~~0.0~~
~~3.90~~	~~.0~~
~~3.95~~	~~.0~~
~~4.00~~	~~.0~~
~~4.05~~	~~.0~~
~~4.10~~	~~.0~~
~~4.15~~	~~.0~~
~~4.20~~	~~.0~~
~~4.25~~	~~.0~~
~~4.30~~	~~.0~~

barómetro, que le dió una indicacion de 0m.6009, siendo su temperatura de 21.°3, igual á la del aire. Al nivel del mar indicaba el barómetro 0m.7631 cuando su temperatura y la del aire eran de 25.°3. La latitud es $\phi = 21°$, y así es que reduciendo á 0° las dos columnas barométricas, se dispondrá el cálculo como sigue:

Pero si ... puede ... zar por ... log n'...2... que corresp... de su ... á 2510

ESTACION INFERIOR.	ESTACION SUPERIOR.
$B = 0^m.7597$	$b = 0^m.5986$
$T = 25.°3$	$t = 21.°3$

$$\begin{array}{rlr}
\log. B = 9.88064 & A \ldots\ldots\ldots\ldots & 4.26517 \\
\log. b = 9.77714 & D \ldots\ldots\ldots\ldots & 0.03870 \\
\log. B - \log. b = 0.10350 \ldots\ldots\ldots\ldots & & 9.01494 \\
 & n' \ldots\ldots\ldots\ldots & 3.31881 \\
 & \text{Correc. (Tabla III)} \ldots & 0.00014 \\
 & n \ldots\ldots\ldots\ldots & 3.31895 \quad n = 2084^m.2
\end{array}$$

$b = 0.3767$

$\frac{0.7589}{0.3767} = 2.0146$

$\log. b = 9{\cdot}57600$	D.............	0.02011
$\log. B - \log. b = 0.30418$	....	9.48313
	n'.............	3.76878 . . $n' = 5871.9$
	Correc. (Tabla III)...	0.00040
	n..............	3.76918 $n = 5877^{m}3$

Casi todos los autores de fórmulas barométricas han calculado esta altura, que es sin duda una de las mayores á que puede llegar el hombre. Para que se juzgue del grado de exactitud que puede esperarse de la (8) consignaré algunos de los resultados obtenidos por diversas fórmulas.

La del Sr. Moral dá......................	$n =$	$5877^{m}0$
El Baron de Humboldt calcula..........	$n =$	5879. 0
Mr. Biot por su fórmula.................	$n =$	5874. 8
La de Laplace produce....................	$n =$	5877. 0
Mr. Puissant encuentra..................	$n =$	5868. 3 (*)

medio de los 4 primeros $n = 5876.95$

Ejemplo 2º—Para determinar la altura de Guanajuato sobre el nivel del mar, el mismo Sr. de Humboldt observó en esa ciudad el

(*) No he repetido los cálculos de Mr. Puissant (*Traité de Géodesie*, vol 2º, pág. 478); pero atendiendo á la discordancia del resultado, creo que deben tener alguna equivocacion.

TABLA II.—Factor barométrico dependiente de la temperatura del aire.
Argum: la suma de las temp. del aire en las dos estaciones

$T+t$	Log. D	Dif.	$T+t$	Log. D	Dif.	$T+t$	Log. D	Dif.
2°	0.00173	87	18°	0.01536	84	34°	0.02857	81
3	. 0260	86	19	. 1620	83	35	. 2938	81
4	. 0346	86	20	. 1703	84	36	. 3019	81
5	. 0432	86	21	. 1787	83	37	. 3100	81
6	. 0518	86	22	. 1870	83	38	. 3181	81
7	. 0604	85	23	. 1953	83	39	. 3262	80
8	. 0689	86	24	. 2036	83	40	. 3342	81
9	. 0775	85	25	. 2119	83	41	. 3423	80
10	. 0860	85	26	. 2202	82	42	. 3503	80
11	. 0945	85	27	. 2284	82	43	. 3583	80
12	. 1030	85	28	. 2366	83	44	. 3663	80
13	. 1115	84	29	. 2449	82	45	. 3743	79
14	. 1199	85	30	. 2531	81	46	. 3822	80
15	. 1284	84	31	. 2612	82	47	. 3902	79
16	. 1368	84	32	. 2694	82	48	. 3981	79
17	. 1452	84	33	. 2776	81	49	. 4060	79
18	0.01536		34	0.02857		50	0.04139	

Siendo el log. de 6000 = 3.77 no se necesita prolongar

TABLA III.—Correccion del logaritmo del desnivel aproximativo.
Argum: el logaritmo de n'

Log. n'	CORRECCION. C'	Log. n'	CORRECCION. C'	Log. n'	CORRECCION. C'
2.50	0.00002	3.15	0.00010	3.50	0.00022
2.60	. 3	3.20	. 11	3.55	. 24
2.70	. 3	3.25	. 12	3.60	. 27
2.80	. 4	3.30	. 14	3.65	. 30
2.90	. 5	3.35	. 15	3.70	. 34
3.00	. 7	3.40	. 17	3.75	. 38
3.10	. 9	3.45	. 19	3.80	. 43
3.15	0.00010	3.50	0.00022	3.85	0.00048

Log. n'	Correc
3.85	0.00048
3.90	.0005[illegible]
3.95	.0006[illegible]
4.00	.0006[illegible]
4.05	.0007[illegible]
4.10	.0008[illegible]
4.15	.0009[illegible]
4.20	.0010[illegible]
4.25	.0012[illegible]
4.30	.0013[illegible]

Pero si se puede comenzar por log n' ..2.40 que corresponde su numero á 2510

barómetro, que le dió una indicacion de 0^m6009, siendo su temperatura de 21.°3, igual á la del aire. Al nivel del mar indicaba el barómetro 0^m7631 cuando su temperatura y la del aire eran de 25.°3. La latitud es $\phi = 21°$, y así es que reduciendo á 0° las dos columnas barométricas, se dispondrá el cálculo como sigue:

ESTACION INFERIOR.	ESTACION SUPERIOR.
$B = 0^m7597$	$b = 0^m5986$
$T = 25.°3$	$t = 21.°3$

log. B = 9.88064 ... A 4.26517

log. b = 9.77714 ... D 0.03870

log. B — log. b = 0.10350 .... 9.01494

n' 3.31881

Correc. (Tabla III) ... 0.00014

n .... 3.31895 $\quad n = 2084^m2$

283º La simultaneidad de las observaciones se considera como la circunstancia mas favorable á la exactitud de las diferencias de nivel determinadas por medio del barómetro; porque las indicaciones de este instrumento varian de una hora á otra, lo mismo que las del termómetro libre. Aunque nada perturbe el equilibrio normal de la atmósfera, es un hecho constante que la altura barométrica oscila dentro de ciertos límites y con una regularidad notable en nuestros climas. En el espacio de 24^h sufre dos *máximos* y dos *mínimos*, los primeros de los cuales se verifican hácia las 9^h de la mañana y á cosa de las 11^h de la noche; miéntras que los mínimos tienen lugar hácia las 4^h de la mañana y entre las 3^h y las 4^h de la tarde. Ademas de estas oscilaciones diarias, que hasta cierto punto son susceptibles de prediccion á causa de su constante regularidad, hay otras accidentales que de un dia á otro hacen variar la altura barométrica en algunos milímetros, sin que hasta hoy haya un modo seguro de predecirlas. Por todas estas razones es preciso ejecutar observaciones simultáneas siempre que se desea medir un desnivel con toda la precision de que es susceptible el método barométrico. A este fin se ponen de acuerdo los dos observadores, y á intervalos regulares toman las alturas del barómetro y del termómetro despues de haber comparado cuidadosamente sus respectivos instrumentos. La misma comparacion se hace despues de terminada la serie de observaciones con el objeto de tomar en cuenta la pequeña diferencia que pudieran tener.

Tambien es necesario cerciorarse de que los barómetros no contienen aire en la parte superior de la columna, para lo cual se inclina con precaucion el tubo hasta que el mercurio llegue á la extremidad cerrada. Si al chocar con el vidrio produce un sonido metálico y seco, puede tenerse por seguro que está privado de aire, pues cuando este existe amortigua tanto el choque como el sonido. Respecto de los termómetros, se conoce que no tienen aire en que al invertirlos llega la columna mercurial sin interrupcion hasta el extremo del tubo. En estos instrumentos hay otra causa de error originado por la variacion que suele sufrir con el tiempo el *cero* de su escala, ó mas propiamente, la altura del mercurio cuando la temperatura es de 0°. Este fenómeno no se ha explicado todavía satisfactoriamente, y se cree que despues de tres ó cuatro años de construido un termómetro, permanece ya fijo su cero; pero de una ú otra manera conviene cerciorarse de su colocacion de tiempo en tiempo, para lo cual basta sumergir el receptáculo del termómetro en un vaso que contenga trozos de hielo y que esté provisto de una abertura que permita la salida del agua que proviene de la fusion; porque miéntras esta dura, permanece estacionaria la columna termométrica en el punto en que debe estar el cero de la escala. De no ser así, se apunta la lectura que es la correccion constante que deberá restarse con su signo á todas las indicaciones del instrumento.

En las fórmulas barométricas influye de una manera muy notable el factor que depende de las temperaturas del aire, y por eso conviene tener mucho cuidado en la eleccion del lugar en que se coloca el termómetro libre. Ademas de la precaucion de establecerlo á la sombra y en un lugar descubierto, es preciso que no quede expuesto á corrientes de aire que podrian alterar sus indicaciones, las cuales no serian en tal caso las correspondientes á las verdaderas temperaturas de la atmósfera. Observando todas estas precauciones es probable que el método barométrico no produzca un error superior á 1^m ó 2^m en la determinacion de una altura absoluta, sobre todo si no es muy considerable la distancia horizontal de las dos estaciones. Esta última circunstancia me parece bastante esencial para tener alguna seguridad de que las variaciones de temperatura y de presion de las capas atmosféricas sean las mismas que se han supuesto al establecer la fórmula; y por la misma razon conviene abstenerse de aplicar el método barométrico de nivelacion en tiempo tempestuoso y cuando soplan fuertes vientos. En general las mejores condiciones para su aplicacion se reunen en los dias serenos y en las horas del medio dia.

284º Por lo regular es difícil procurarse el concurso de otra persona para hacer observaciones exactamente simultáneas; pero en mi opinion es posible alcanzar el mismo grado de precision por medio de observaciones correspondientes, aun cuando no se practiquen precisamente en los mismos instantes. En varias ciudades se observa con regularidad el barómetro y el termómetro, y como dije al principio que en nuestras latitudes son casi constantes en magnitud y en periodicidad las oscilaciones del primero, creo que es fácil y bastante exacta la reduccion á un solo instante de las observaciones ejecutadas el mismo dia á diversas horas en distintas estaciones. Todo consiste en estudiar con cuidado por algun tiempo la marcha de los instrumentos meteorológicos, y en fijarse en la manera de entender lo que comunmente se llama sus *indicaciones medias*.

Si se observa el barómetro de hora en hora durante las 24^h del dia, y se divide la suma de todos los resultados por su número, se obtendrá la altura barométrica media del dia de la observacion. La misma operacion repetida todos los dias del mes dará un promedio que representa la indicacion media del mes; y finalmente el término medio de los doce resultados mensuales suministrará la indicacion media anual. Otro tanto puede decirse respecto de las temperaturas. Esta serie de observaciones haria conocer perfectamente la marcha de los instrumentos meteorológicos, y en consecuencia permitiria estudiar las leyes á que están sujetas las variaciones atmosféricas en cada localidad; pero se comprende fácilmente que un trabajo de esta naturaleza solo podria llevarse á cabo en un largo período por medio del concurso de muchos observadores. Por fortuna la utilidad práctica de las observaciones meteorológicas no demanda una dedicacion tan asídua, pues basta la observacion horaria de algunos dias para venir en conocimiento de las oscilaciones periódicas de los instrumentos, lo cual á su vez permite reducir á un corto número las observaciones diarias que proporcionan sensiblemente el mismo resultado que las ejecutadas de hora en hora. No solo se hace esto para evitar mucho trabajo innecesario, sino que en la mayor parte de los observatorios meteorológicos se omiten completamente las observaciones de las altas horas de la noche, y únicamente se ejecutan algunas durante el dia, á intervalos escogidos de tal manera, que los promedios de los resultados coincidan sensiblemente con las indicaciones medias que se obtendrian en el mismo período por las observaciones horarias.

Si este método de observacion es suficiente para las necesidades de la meteorología, con mucha mas razon debe serlo para la aplicacion de los instrumentos meteorológicos á la determinacion de las diferencias de nivel, puesto que casi nunca se hacen observaciones nocturnas con este objeto. Ahora bien, si convenimos en tomar por *indicacion media diurna* el promedio de todos los resultados horarios con exclusion de los correspondientes á las altas horas de la noche, será comparativamente mas fácil determinar las oscilaciones periódicas de las lecturas instrumentales, cuyo conocimiento puede ser de tanta importancia práctica. De esta manera cada lectura del barómetro y del termómetro hecha á cualquiera hora del dia podrá reducirse á lo que seria en otro instante determinado, pudiéndose tambien designar el momento en que las indicaciones de aquellos instrumentos son iguales á las medias diurnas, lo cual reduce á una sola observacion todo el trabajo necesario para obtenerlas.

Con el fin ántes indicado he observado el barómetro y el termómetro de hora en hora durante varios dias en los cuatro últimos meses de 1862, ejecutando 15 lecturas diarias desde las 7^h de la mañana hasta las 9^h de la noche. Algunos dias hice las observaciones en México y otros en Chapultepec. Despues de reducir á 0º las alturas barométricas, puede construirse de la manera siguiente la curva que representa sus variaciones. Sobre una recta se toman 14 espacios iguales, que pueden ser de $0^m.01$ cada uno. Los puntos de division representan las horas consideradas como absisas, y por cada uno de ellos se eleva una perpendicular de una longitud proporcional á la altura barométrica correspondiente. Uniendo en seguida los extremos de estas ordenadas se obtiene la curva de la oscilacion barométrica.

No es indispensable que las ordenadas sean proporcionales á toda la altura de la columna, sino simplemente á sus variaciones; de modo que se hace con mas comodidad la construccion restando de cada altura una misma cantidad, y aun se obtiene así mayor exactitud, porque siendo pequeñas las perpendiculares, pueden exagerarse sus dimensiones, adoptando por ejemplo una escala 10 veces mayor que la natural para trazarlas. De esa manera cada milímetro de la columna queda representado por $0^m.01$, y como sus variaciones no exceden generalmente de tres milímetros, resulta que en $0^m.03$ ó $0^m.04$ de altura queda contenida toda la construccion si se resta de todas las indicaciones barométricas la menor de ellas, para adoptar los excesos por ordenadas.

Despues de construida la curva se traza una paralela á la linea de las absisas á una distancia proporcional á la altura barométrica media de las 15 observaciones, despues de restarle tambien la cantidad comun que se haya restado de las otras. Es claro que las absisas de los puntos en que esta recta corte á la curva suministran las horas del dia en que la indicacion barométrica es igual á la media diurna.

Para ejercicio de los lectores que deseen efectuar la construcion pongo en seguida los resultados de los cinco últimos dias que hice observaciones horarias del barómetro y del termómetro en Chapultepec, y que corresponden al 12 y al 19 de Octubre, y al 1°, 19 y 23 de Noviembre de 1862. Las alturas barométricas están ya reducidas á 0° y de las medias diurnas la primera se refiere á todas las observaciones de cada dia, y la segunda á las 12 observaciones ejecutadas desde las 7ʰ de la mañana hasta las 6ʰ de la tarde.

Observaciones horarias del barómetro y del termómetro.—Chapultepec 1862.

Horas.	Barómº	Termº	Barómº	Termº	Barómº	Termº	Barómº	Termº	Barómº	Termº
7ʰ	0ᵐ5865	12.°9	0ᵐ5904	7.°5	0ᵐ5876	5.°4	0ᵐ5890	7.°5	0ᵐ5910	1.°2
8	. 67	13. 4	. 08	9. 9	. 81	7. 6	. 93	9. 7	. 11	3. 8
9	. 66	14. 9	. 10	11. 5	. 82	11. 1	. 95	11. 7	. 11	6. 7
10	. 62	17. 0	. 10	13. 0	. 77	13. 4	. 88	13. 9	. 09	9. 6
11	. 62	17. 5	. 09	14. 2	. 76	14. 5	. 85	15. 5	. 5903	12. 2
12	. 56	18. 0	. 02	14. 6	. 72	15. 5	. 82	16. 0	. 5896	13. 5
1	. 49	18. 5	. 5894	15. 9	. 59	17. 3	. 73	16. 6	. 88	14. 0
2	. 43	18. 8	. 82	17. 5	. 58	17. 7	. 67	17. 3	. 82	14. 5
3	. 42	17. 6	. 78	17. 4	. 51	17. 5	. 61	16. 6	. 78	15. 0
4	. 43	17. 0	. 78	16. 6	. 56	17. 4	. 58	17. 3	. 75	15. 3
5	. 51	15. 0	. 80	15. 6	. 52	16. 7	. 59	16. 8	. 76	14. 6
6	. 55	14. 5	. 87	14. 5	. 59	14. 9	. 62	15. 8	. 79	12. 0
7	. 62	14. 4	. 91	13. 4	. 60	13. 6	. 67	13. 4	. 83	9. 5
8	. 68	14. 4	. 5895	12. 5	. 71	10. 5	. 74	12. 1	. 86	9. 0
9	0. 5869	14. 1	0. 5901	11. 6	0. 5875	10. 6	0. 5880	10. 4	0. 5889	7. 3
1ᵉʳ Mº	0ᵐ5857	15.°9	0ᵐ5895	13.°7	0ᵐ5867	13.°6	0ᵐ5875	14.°1	0ᵐ5892	10.°5
2º ,,	0. 5855	16. 4	0. 5895	14. 0	0. 5867	14. 0	0. 5876	14. 5	0. 5893	10. 9

Por estas y todas las demas observaciones del mismo género he llegado á las consecuencias siguientes respecto del barómetro. 1ª La indicacion barométrica á las doce y media de la mañana es igual á la media del dia. 2ª Las quince observaciones horarias desde las 7ʰ de la mañana hasta las 9ʰ de la noche dan sensiblemente el mismo promedio que las doce observaciones ejecutadas desde las 7ʰ de la mañana hasta las 6ʰ de la tarde, período que comprendiendo todo el tiempo útil para hacer cómodamente las observaciones barométricas, podria adoptarse para representar el intervalo al cual deba referirse lo que he llamado indicacion media diurna. 3ª La presion atmosférica máxima tiene lugar á las 9ʰ de la mañana, y la mínima á las 4ʰ de la tarde, siendo de 0ᵐ003 en término medio la amplitud total de la oscilacion.

Las curvas termométricas, que pueden construirse con las horas por absisas y los grados de temperatura por ordenadas, están léjos de ofrecer la misma regularidad que las curvas barométricas; pero sin embargo, parece que hácia las 10^h de la mañana se tiene una temperatura igual á la media del dia. Este resultado no es útil para la aplicacion del barómetro á la media de las diferencias de nivel, porque lo que se necesita es la temperatura del aire en el instante en que el barómetro indica la presion media, y no su temperatura media durante el dia. Comparando las indicaciones del barómetro y del termómetro con las que tienen lugar á las doce y media, he formado la siguiente tabla, que contiene los promedios de las correcciones que deben hacerse á las lecturas hechas á una hora cualquiera para reducirlas á lo que serian á las doce y media de la mañana.

HORAS.	Correccion del		HORAS.	Correccion del		HORAS.	Correccion del	
	Barómetro.	Termóm?		Barómetro.	Termóm?		Barómetro.	Termóm?
7^h	—0.0010	+ 8.°2	12^h	—0ᵐ0004	+ 0.°2	5^h	+0ᵐ0013	+ 1.°0
8	— . 13	+ 6. 8	1	+ . 4	— 0. 3	6	+ . 9	+ 2. 2
9	— . 14	+ 4. 8	2	+ . 10	— 1. 0	7	+ . 3	+ 3. 6
10	— . 12	+ 2. 8	3	+ . 15	— 0. 7	8	— . 3	+ 4. 7
11	—0.0010	+ 1. 7	4	+0. 0016	— 0. 6	9	—0. 0005	+ 5. 2

Las consecuencias anteriores no deben tenerse por generales para cualquiera localidad, y aun puede ser que en el mismo lugar varien los valores numéricos de las correcciones de una estacion á otra, pues todas las que preceden se han deducido de observaciones hechas solamente en los meses del otoño; pero mi objeto ha sido el de trazar la marcha que debe seguirse para determinar experimentalmente la ley y magnitud de las oscilaciones barométricas y termométricas. Seria muy conveniente que las personas que se ocupan de observaciones meteorológicas las hiciesen horarias dos ó tres veces cada mes, con el fin de llegar á consecuencias mas concluyentes en cada localidad. Señalando este punto como objeto de nuevas y mas numerosas investigaciones, me limito á indicar la utilidad práctica de que son susceptibles, para lo cual adoptaré por ahora los guarismos precedentes á falta de mejores datos.

285º En los cuatro últimos meses de 1865 observé el barómetro y el termómetro en S. Luis Potosí á las doce y media de la mañana durante 107 dias, con la esperanza de conseguir en México observaciones correspondientes que me permitiesen determinar la altura de esta ciudad respecto dc aquella. Las conseguí, en efecto, por la bondad de D. Ignacio Cornejo, encargado en aquella época del observatorio meteorológico de la Escuela de Ingenieros. El Sr. Cornejo observaba á las 9^h de la mañana, á las 2^h y á las 6^h de la tarde; por consiguiente es preciso comenzar por hacer simultáneas sus observaciones con las mias, añadiéndoles el promedio de las reducciones que para esas horas constan en la tabla anterior, á saber:

	CORREC. BAROMª	CORREC. TERMº
A las 9^h	-0^m0014	$+4.°8$
„ „ 2	$+0.\ 0010$	$-1.\ 0$
„ „ 6	$+0.\ 0009$	$+2.\ 2$
Promedios......	$+0^m00017$	$+2.°0$

Reduciendo á 0° las observacionos del Sr. Cornejo, lo mismo que las mias, y haciendo á los promedios de las primeras las correcciones precedentes, se obtienen los siguientes resultados mensuales:

MESES.	Número de observaciones.	En S. Luis. Presion.	Tempª	En México. Presion.	Tempª	NOTAS.
Setiembre....	22 dias	0^m6133	22.°4	0^m5856	21.°3	En México el nivel inferior del barómetro estaba á 19^m9 respecto del piso de la ciudad, y en San Luis á 0^m4.
Octubre......	31 „	0. 6134	22. 2	0. 5856	20. 5	
Noviembre...	30 „	0. 6147	18. 5	0. 5866	18. 6	
Diciembre...	24 „	0. 6132	20. 4	0. 5859	19. 9	
Promedios..........		0^m6136	20.°9	0^m5859	20.°0	

Como las latitudes de México y S. Luis son próximamente 19° 26′ y 22° 9′, tomemos el log. A de la Tabla I para $\phi = 21°$. Haciendo el cálculo con los promedios de todas las observaciones, se tiene:

ESTACION INFERIOR.		ESTACION SUPERIOR.	
$B = 0^m6136$	$T = 20.°9$	$b = 0^m5859$	$t = 20.°8$

log. B.............. 9.78789
log. b................ 9.76782 $\qquad A$........... 4.26517
log. B — log. b = 0.02007........................ 8.30255
D........... 0.03415
n'........... 2.60187
Correc. (Tabla III)... 0.00003
n............ 2.60190 $\quad n = 399^m9$
Dif. de altura de los barómetros = — 19. 5
Altura de México respecto de S. Luis = 380^m4

Los resultados parciales de cada mes concuerdan bastante bien entre sí, con excepcion del último, pues haciendo los cálculos se halla:

Por las observaciones de		Setiembre,	$382^m 4$
,, ,,	,,	,, Octubre,	383. 1
,, ,,	,,	,, Noviembre,	382. 5
,, ,,	,,	,, Diciembre,	374. 1
,, ,,	,,	,, Promedio	$=380^m 5$

Si se desecha el resultado de Diciembre por mas discorde, se tendrá que $382^m 7$ es la diferencia de altura entre las dos ciudades.

En este caso particular seria insignificante el error producido por la omision de las correcciones que se aplicaron para hacer simultáneas las observaciones de las dos ciudades, á causa de la pequeñez del desnivel, y de la triple observacion de México, que suministra promedios casi iguales á las indicaciones del medio dia; pero atendiendo á la magnitud considerable de las oscilaciones que sufren la presion y la temperatura atmosféricas á diversas horas, se comprenderá sin esfuerzo alguno que en ciertos casos no podrá omitirse aquella reduccion sin peligro de cometer un error que puede ascender á varias decenas de metros.

286º Ya que hemos considerado el caso de simultaneidad de observaciones, y tambien el de observaciones correspondientes sin ser simultáneas, procuremos indicar la marcha que creemos mas conveniente para determinar la altura absoluta aproximativa de un punto cuando no se tienen otras observaciones con que comparar las que se hayan ejecutado, ó que aun cuando se tengan, no se conoce la altura de la otra estacion sobre el nivel del mar.

El método que comunmente se sigue en este caso es el de suponer las indicaciones del barómetro y del termómetro al nivel del mar, tomando para la primera, $B = 0^m 7629$ y para la segunda $T = 25°$. Con estos datos aproximativos y los observados b y t en la estacion superior, se calcula la fórmula (8), que suministrará la altura absoluta. Esto se funda en que los valores precedentes de B y T se consideran como la presion y temperatura medias en el Oceano.

Cuando solo se ejecuta un corto número de observaciones en la estacion cuya altura se trata de determinar, creo que el método indicado es en efecto el mas conveniente y sencillo; pero si, como sucede algunas veces, tiene un viagero tiempo y oportunidad de prolongar sus observaciones uno ó mas meses en el mismo punto, juzgo que puede esperar mayor exactitud no adoptando B y T como constantes, sino tomando en cuenta sus variaciones en distintas épocas del año. Por otra parte, la presion de $0^m.7629$ puede acaso considerarse como la media al nivel del mar en las latitudes europeas; pero en manera alguna en nuestros países intertropicales, como lo manifiestan las observaciones ejecutadas en diversos lugares de América. Comparando cuidadosamente los resultados medios de las medidas barométricas hechas en este continente, se llega á la consecuencia de que la presion aumenta desde el ecuador hasta la latitud de 35° casi proporcionalmente al incremento de la latitud, para decrecer en seguida hácia la latitud de 60°. (*) Ademas de esto, en las observaciones mensuales que he podido procurarme, algunas de las cuales corresponden á períodos de muchos años, se nota constantemente que la columna barométrica tiene un *maximum* en el mes de Enero y un *minimum* por Agosto ó Setiembre, lo cual me ha permitido formar una tabla de las presiones mensuales medias, en la que he llevado en cuenta los incrementos que sufren con la latitud, adoptando tambien las variaciones medias de un mes á otro. Como en mi concepto el uso de estos guarismos es ménos arbitrario que la hipótesis de una indicacion barométrica constante al nivel del Oceano, pongo á continuacion la parte de esta tabla que comprende las latitudes de la República.

Presiones medias mensuales al nivel del mar en diferentes latitudes.

MESES.	*15°*	*20°*	*25°*	*30°*	*35°*	MESES.	*15°*	*20°*	*25°*	*30°*	*35°*
Enero....	$0^m.7645$	$0^m.7651$	$0^m.7658$	$0^m.7664$	$0^m.7671$	Julio........	$0^m.7595$	$0^m.7601$	$0^m.7608$	$0^m.7614$	$0^m.7621$
Febrero.	0. 7623	0. 7629	0. 7636	0. 7642	0. 7649	Agosto.....	0. 7583	0. 7589	0. 7596	0. 7602	0. 7609
Marzo...	0. 7625	0. 7631	0. 7638	0. 7644	0. 7651	Setiembre	0. 7585	0. 7591	0. 7598	0. 7604	0. 7611
Abril	0. 7607	0. 7613	0. 7620	0. 7626	0. 7633	Octubre....	0. 7597	0. 7603	0. 7610	0. 7616	0. 7623
Mayo....	0. 7596	0. 7602	0. 7609	0. 7615	0. 7622	Noviembr.	0. 7623	0. 7629	0. 7636	0. 7642	0. 7649
Junio....	0. 7597	8. 7603	0. 7610	0. 7616	0. 7623	Diciembre	0. 7635	0. 7641	0. 7648	0. 7654	0. 7661

Respecto de las temperaturas del aire al mismo nivel, no he tenido oportunidad de consultar una serie bastante numerosa de observaciones, por lo cual solo consignaré los resultados medios obtenidos en algunas de nuestras ciudades y en otras de las costas americanas.

(*) Parece que este fenómeno no es peculiar de América, sino comun á toda la tierra. Vease la «*Meteorología*» de Kaemtz y la «*Geografía del mar*» de Mr. Maury.

Temperaturas medias al nivel del mar en diferentes estaciones.					
LUGARES.	PRIMAVERA.	ESTIO.	OTOÑO.	INVIERNO.	MEDIA ANUAL
Veracruz.............	25.°0	27.°5	26.°0	21.°5	25.°0
La Habana...........	24. 6	27. 4	25. 6	22. 6	25. 0
San Blas.............	——	——	25. 1	——	
Guaymas.............	——	——	——	20. 1	——
Boca del rio Bravo.	——	28. 9	——	——	——
Key West (Florida)	24. 2	27. 9	25. 5	21. 5	24. 7
Nueva-Orleans......	18. 9	26. 5	20. 4	11. 8	19. 6
Charleston...........	——	——	——	——	17. 7
San Diego (Cal.)....	——	——	——	——	15. 4
S. Francisco (Cal.).	——	——	——	——	13. 3

Por la tabla anterior se ve que la temperatura media anual en nuestras costas es efectivamente de 25°.

Sean cuales fueren las causas que hacen crecer la presion al nivel del mar á medida que aumenta la latitud, es probable que tambien se hagan sentir en el interior de los continentes, y por eso me parece preferible adoptar la presion que convenga á la latitud de la estacion cuya altura desea medirse. Determinemos, por ejemplo, la elevacion de México tomando por datos los siguientes de todo el año contado desde Marzo de 1868 hasta Febrero de 1869, que debo á la bondad de D. Juan N. Mier y Terán, encargado actualmente del observatorio meteorológico de la Escuela Nacional Preparatoria. El barómetro tiene una altura de 16^m sobre el nivel de la ciudad, y todas sus indicaciones están ya reducidas á 0°.

Meses.	Presion.	Tempª	Meses.	Presion.	Tempª	Meses.	Presion.	Tempª
Marzo....	0^m5854	18.°6	Julio.....	0^m5857	17.°2	Nov......	0^m5854	15.°4
Abril.....	0. 5854	19. 4	Agosto...	0. 5839	18. 4	Dic.......	0. 5875	14. 2
Mayo....	0. 5860	20. 8	Setiemb.	0. 5835	17. 8	Enero...	0. 5889	13. 8
Junio....	0. 5858	20. 2	Octubre.	0. 5838	17. 2	Febrero.	0. 5878	16. 4

Las medias anuales resultan, pues: $b = 0^m5857$ y $t = 17.°4$. Adoptando al nivel del Oceano las que corresponden á la latitud de 20°, que con poca diferencia es la de México, hallarémos: $B = 0^m7615$ y $T = 25.°0$, y con estos datos la fórmula (8) dá $n = 2262^m$ por altura de la ciudad.

Si quisiera medirse la de S. Luis por las observaciones del otoño de 1865, tendriamos: $b = 0^m6136$, $t = 20.°9$, y adoptando $B = 0^m7619$ y $T = 25.°5$ que segun las tablas corresponden á los mismos meses para la latitud de 22°, encontrarémos $n = 1892^m$, resultado que solo produce una diferencia de 10^m en el desnivel de las dos ciudades respecto de la determinacion hecha por observaciones correspondientes.

Véase la nota relativa á este capítulo, puesta al principio en la obra -

CAPITULO VIII.

NIVELACION TERMO-BAROMÉTRICA.

287º El barómetro de mercurio, cuyo uso como instrumento de nivelacion se ha expuesto en el Capítulo que precede, no es el único que permite la media de la presion atmosférica. Hay otros barómetros tales como el llamado *aneroide*, y el barómetro metálico de Bourdon, que aunque fundados en otros principios, se aplican tambien al mismo objeto.

El barómetro aneroide consiste en una pequeña caja metálica de paredes muy delgadas, y de cuyo interior se extrae el aire: la presion atmosférica que se ejerce en su exterior, no teniendo ninguna fuerza que la equilibre, deprime mas ó ménos, en razon de su intensidad, las paredes de la caja, la cual al variar ligeramente de forma, comunica pequeños movimientos á un juego conveniente de engranes y palancas, que á su vez hacen mover una aguja ó índice que señala la presion correspondiente en un cuadrante dividido en partes equivalentes á los milímetros del barómetro comun.

El barómetro de Bourdon consta de un tubo curvo formado tambien de láminas metálicas muy delgadas. Extraido igualmente el aire de su interior, la presion atmosférica lo obliga á encorvarse mas en proporcion de la fuerza con que obra en su superficie externa, ocasionando de esa manera los pequeños movimientos que se comunican al índice del cuadrante.

Tanto este barómetro como el aneroide son muy sensibles á las variaciones de la presion atmosférica, y mas portátiles que el de mercurio; pero su construccion mas complicada los expone probablemente á frecuentes desarreglos, pues es raro que trasportados de un lugar á otro en que la presion sea muy diferente, marchen enteramente de acuerdo con el de mercurio. Ademas de esto, las correcciones por la temperatura deben ser mas difíciles en atencion á las diversas sustancias de que están construidos; y así es que en caso de usarlos para la nivelacion, lo que me parece mas conveniente es hacer una serie de comparaciones, numerosa y variada, de sus indicaciones con las de un buen barómetro comun, á fin de deducir de ellas el sistema de correcciones que deben aplicárseles en cada caso particular.

288º Hay todavía otro aparato propio para la medida de la presion del aire, el cual se llama *termómetro de ebullicion*, *termo-barómetro* y mas comunmente *ipsómetro*. Su fundamento, enteramente diverso de los que sirven para la construccion de los demas barómetros, es el siguiente. Se sabe que el fenómeno de la ebullicion en los líquidos, se verifica en el momento en que la tension de sus vapores es igual á la presion que se ejerce en su superficie. Como, por otra parte, la tension ó fuerza elástica de un vapor aumenta generalmente con la temperatura, resulta que calentando gradualmente una masa líquida, llega un instante en que la tension del vapor adquiere la potencia necesaria para vencer la resistencia que se opone á su formacion; y de aquí se deduce que debe haber cierta relacion entre la temperatura del líquido, ó por mejor decir, de su vapor en el momento de la ebullicion, y la resistencia ó presion que se opone á ella. Si, pues, averiguada esta relacion, se mide la temperatura del vapor que, como se sabe, es constante en igualdad de circunstancias, vendrémos en conocimiento de la presion correspondiente, la cual puede valuarse en partes de una columna de mercurio del mismo peso, y en consecuencia emplearse en la fórmula barométrica para medir las alturas.

El agua comun es el líquido de que se hace uso en el ipsómetro. Es bien sabido que al nivel del mar, ó cuando la presion atmosférica equivale 0^m760 de mercurio, entra en abullicion á 100° centesimales de temperatura; miéntras que en los lugares elevados hierve á una temperatura mas baja en proporcion de lo que en ellos disminuye el peso del aire. En México, por ejemplo, la ebullicion se verifica á poco ménos de 93°. La relacion en que decrecen la temperatura de la ebullicion del agua, y la presion atmosférica correspondiente, se ha determinado experimentalmente por Mr. Regnault, cuyos resultados tomé por base para la formacion de las pequeñas tablas que se pondrán en seguida, y que suministran la presion cuando se conoce la temperatura; pero ántes de explicar su uso indiquemos el modo de adquirir este último dato, dando á conocer la sencilla construccion del ipsómetro.

Consiste este aparato (fig. 216ª) en una vasija de cobre de 0^m1 próximamente de altura y otro tanto de diámetro, en cuya boca se atornilla una pieza que sostiene un termómetro, de manera que el receptáculo de este quede en el interior del vaso y á poca distancia de una pequeña cantidad de agua que se pone en él. La escala del termómetro solo tiene señalados los últimos grados, generalmente desde 85° hasta 100° ó 101°, cuya extension debe ser suficiente para que puedan apreciarse sus pequeñas fracciones por medio de un vernier provisto de un índice movible á lo largo del tubo termométrico. La llama de una lámpara de alcohol, que se aplica en la parte inferior del vaso metálico, comunica al agua el calor necesario para determinar su ebullicion.

Luego que la temperatura del líquido se aproxima á la del hervor, se ve subir rápidamente la columna mercurial del termómetro hasta el grado que corresponde á la presion atmosférica, punto en el cual permanece fija su parte superior por todo el tiempo que dura la ebullicion. El vapor que va formándose se escapa por una abertura practicada en la base superior de la vasija y baña el tubo termométrico, sin lo cual ejerceria una fuerte presion en la superficie del líquido que impediria el hervor ó que determinaria la explosion del mismo vaso. Cuando la ebullicion está en plena actividad, se lleva el índice á la extremidad de la pequeña columna mercurial, se lee el grado de temperatura y la fraccion que señala el vernier, y se obtiene así el argumento para tomar de la tabla la presion correspondiente, tal como la indicaria un barómetro comun despues de reducida á 0°.

Como el vidrio de que está formado el tubo del termómetro es mal conductor del calórico, tarda algo en dilatarse, y por eso á veces se nota alguna leve oscilacion en la altura del mercurio. Para evitar el pequeño error que podria orignarse de esta circunstancia, conviene dejar trascurrir dos ó tres minutos desde que ha comenzado la ebullicion, ántes de hacer la lectura, ó mejor todavía, repetirla varias veces para cerciorarse de que la columna no cambia ya de altura.

Cuando el agua de que se hace uso es destilada ó químicamente pura, no hay inconveniente en que el receptáculo del termómetro entre en el líquido, pues la temperatura de este es igual á la de su vapor; pero como no siempre es fácil procurarse agua destilada, tampoco hay inconveniente en servirse de la comun, con tal que se tenga cuidado de no sumergir en ella el receptáculo; porque conteniendo algunas sales en disolucion, su temperatura al hervir puede ser notablemente mayor que la que corresponde al agua pura. Afortunadamente la del vapor es la misma, ya sea que provenga de agua pura ó de la que contenga sustancias extrañas, y por esto exponiendo el receptáculo termométrico solamente al baño del vapor se obtendrá siempre la temperatura invariable de este. Por lo general basta que sea de 7 á 8 milímetros la altura del agua que se pone en el interior de la vasija; porque de ese modo sin elevarse hasta el receptáculo, deja tambien mayor espacio libre para la circulacion del vapor.

La escala termométrica del ipsómetro está dividida en grados centígrados en los instrumentos de construccion francesa, y en grados de Farenheit en los ingleses. (*) Aunque es muy fácil la reduccion de unos á otros, con el fin de evitarla he calculado tambien la tabla de presiones para las temperaturas expresadas en grados de Farenheit.

Presiones atmosféricas correspondientes á la temperatura del vapor en la ebullicion del agua.

ESCALA CENTESIMAL.						ESCALA DE FARENHEIT.					
Tempª	Presion.	Dif.	Tempª	Presion.	Dif.	Tempª	Presion.	Dif.	Tempª	Presion.	Dif.
85.°0	0m4330	86	93.°0	0m5884	111	188°	0m4622	101	201°	0m6082	127
85. 5	. 4416	87	93. 5	. 5995	113	189	. 4723	103	202	. 6209	129
86. 0	. 4503	89	94. 0	. 6108	114	190	. 4825	105	203	. 6338	131
86. 5	. 4592	90	94. 5	. 6222	116	191	. 4930	106	204	. 6469	133
87. 0	. 4682	91	95. 0	. 6338	118	192	. 5036	108	205	. 6602	136
87. 5	. 4773	93	95. 5	. 6456	120	193	. 5144	110	206	. 6738	138
88. 0	. 4866	95	96. 0	. 6576	122	194	. 5254	113	207	. 6876	140
88. 5	. 4961	96	96. 5	. 6698	123	195	. 5367	114	208	. 7016	142
89. 0	. 5057	98	97. 0	. 6821	125	196	. 5481	116	209	. 7158	145
89. 5	. 5155	99	97. 5	. 6946	127	197	. 5597	118	210	. 7303	147
90. 0	. 5254	101	98. 0	. 7073	129	198	. 5715	120	211	. 7450	150
90. 5	. 5355	102	98. 5	. 7202	130	199	. 5835	123	212	. 7600	152
91. 0	. 5457	104	99. 0	. 7332	133	200	. 5958	124	213	. 7752	154
91. 5	. 5561	106	99. 5	. 7465	135	201	. 6082		214	0. 7906	
92. 0	. 5667	108	100. 0	. 7600	138						
92. 5	. 5775	109	100. 5	. 7738	140						
93. 0	0. 5884		101. 0	0. 7878							

(*) El irresistible apego de los ingleses á su sistema de medidas se opone á que adopten el decimal aun para la construccion de los instrumentos científicos.

Por la inspeccion de la tabla se advertirá que la presion varia próximamente á razon de 0^{m}002 por un décimo de grado centesimal de temperatura; y como 0^{m}002 de error en la presion produciria otro de mas de 20^m en la altura de la estacion, se comprenderá la importancia de poder apreciar la temperatura del vapor con la mayor presion. Por eso es tan conveniente que cada uno de los 15 ó 20 grados que abraza la escala del ipsómetro tenga por lo ménos 0^{m}01 de extension, y que el vernier dé centésimos de grado.

La pequeña incertidumbre que puede haber en las lecturas que, como se ha visto, es de bastante trascendencia; y mas que esto, la variacion del *cero* que probablemente se hace sentir en el ipsómetro lo mismo que en toda clase de termómetros, son la causa de que este instrumento no sea susceptible de tanta exactitud como el barómetro comun. Sus principales ventajas consisten en ser muy portátil, pues todo el aparato se trasporta fácilmente en una caja de unos cuantos decímetros de lado, y en estar ménos expuestos á un accidente á causa de su menor tamaño. En muchos casos estas ventajas pueden compensar la falta de precision respecto del barómetro, sobre todo cuando no se necesita una exactitud extrema en los resultados, lo que ciertamente es muy frecuente en nivelaciones de este género.

Ademas de los defectos mencionados y que son inherentes al instrumento, pueden presentarse otros especiales de construccion, tales como la desigualdad del tubo capilar en diversos puntos de su longitud, y el error que puede haberse cometido al graduar la escala. Esta última operacion se ejecuta en las fábricas por medio de la comparacion con un barómetro; pero como las experiencias de Regnault no son las únicas que se han hecho para averiguar la correspondencia entre la tension y la temperatura del vapor, existiendo pequeñas

Sus barómetros siempre están divididos en pulgadas y décimos de pulgada, apreciándose con el vernier las fracciones menores. Para reducir las indicaciones de estos barómetros á la medida decimal, se tendrá presente que la pulgada inglesa equivale á 0^{m}0254. Respecto del termómetro de Farenheit se recordará que señala 32° á la temperatura de la fusion del hielo y 212° á la de la ebullicion del agua al nivel del mar; y como en las mismas circunstancias el centesimal indica 0° y 100° respectivamente, tendrémos que 212°—32° de Farenheit equivalen á 100° centesimales, ó se hallarán en la relacion de 9 á 5. Segun esto, designando por f un número cualquiera de grados de Farenheit, y por c el correspondiente de centígrados, se tiene la relacion: $c = \frac{5}{9}(f - 32)$, que se convierte fácilmente en la que sigue:

$$c = 0.556\,f - 17.8$$

Así se halla que, por ejemplo, $f = 203°$ equivale á $c = 95°$.

diferencias entre los resultados de diversos observadores, es probable que la comparacion misma dé lugar á leves errores en la colocacion de las divisiones. Por todo esto, nunca será prudente hacer uso de un ipsómetro sin haberlo comparado con un buen barómetro de mercurio; y siempre que sea posible, debe hacerse la comparacion en distintos lugares diversamente elevados sobre el nivel del mar; porque de esta manera se llegará á conocer el error inicial del instrumento y el que tenga en diversos puntos de su escala, formándose así una pequeña tabla de correcciones de la que se toma por interpolacion la que corresponda á cada lectura.

El ipsómetro con que he viajado hace tiempo se comparó con un barómetro de mercurio, hallándose que cuando este indicaba........ $0^{m}6144$, la temperatura que señalaba aquel era de 200.°83 (Farenheit). Con este dato la tabla de presiones atmosféricas dá........ $0^{m}6061$, que difiere $0^{m}0083$ de la observada. Esta diferencia es, pues, la correccion que debe hacerse á las presiones calculadas con las indicaciones del ipsómetro.

La correccion anterior es el promedio de varias comparaciones bastante acordes entre sí, hechas en S. Luis en Diciembre de 1864; y sin embargo, cuatro años y medio despues (Junio de 1869) he hallado en México por otra serie tambien muy acorde, la correccion $0^{m}0062$. La diferencia de $0^{m}002$ que presentan los dos resultados, ¿proviene de una variacion en el cero, ó de desigualdad en el diámetro del tubo? No puedo resolver por ahora esta duda, que solamente nuevas y variadas comparaciones podrán aclarar; pero juzgo útil exponer este hecho en apoyo de la necesidad de hacer uso del ipsómetro con mucha prudencia, y teniendo siempre la precaucion de compararlo con el barómetro ántes y despues de ejecutar las observaciones á que se aplique; porque procediendo así, se convierte el ipsómetro en un simple indicador de las lecturas que suministraria el barómetro, y en consecuencia pueden esperarse resultados de suficiente exactitud.

Ejemplo.—En Enero de 1865 hice 12 observaciones del ipsómetro en Villela (Estado de Guanajuato), cuyo promedio fué 200.°92 Farenheit, siendo el de la temperatura del aire $t = 17.°2$. Con el primer dato la tabla de presiones indica $0^{m}6072$, y haciéndole la correccion hallada el mes anterior, resulta.................................... $b = 0^{m}6072 + 0^{m}0083 = 0^{m}6155$. Suponiendo al nivel del mar en el mismo mes la presion y temperatura medias $B = 0^{m}7653$ y $T = 21°$, la fórmula (8) del Capítulo precedente produce $n = 1875^{m}$.

289º La fórmula que acaba de aplicarse dá lugar á un cálculo sencillísimo con el auxilio de las tablas de las páginas 502 y 503; pero puede emplearse otra que no contiene la diferencia logarítmica que entra en aquella. Indicaré la nueva fórmula cuyos resultados son bastante exactos siempre que no es muy considerable la diferencia de nivel que se desea determinar, lo cual se conoce de antemano en que las dos indicaciones barométricas no difieren mucho entre sí. Designando por d su diferencia, tendrémos: $B = b + d = b\left(1 + \frac{d}{b}\right)$, y tambien $b = B - d = B\left(1 - \frac{d}{B}\right)$. Tomando los logaritmos de estas dos ecuaciones, se encuentra:

$$\log. B = \log. b + M\left(\frac{d}{b} - \frac{d^2}{2\,b^2} + \ldots\ldots\right)$$

$$\log. b = \log. B - M\left(\frac{d}{B} + \frac{d^2}{2B^2} + \ldots\ldots\right)$$

Estas dán por sustraccion:

$$\log. B - \log. b = \tfrac{1}{2} M\,d\left(\frac{B + b}{B\,b} - \frac{d\,(B^2 - b^2)}{2\,B^2\,b^2}\right)$$

y sustituyendo el valor $d = B - b$, se obtiene:

$$\log. B - \log. b = \tfrac{1}{2}\,M\,\frac{(B + b)\,(B - b)}{B\,b}\left(1 - \frac{(B - b)^2}{2\,B\,b}\right)$$

Siendo pequeña la diferencia de las dos columnas barométricas, puede omitirse su segunda potencia, lo que reduce á 1 el último factor. Sustituyendo en la fórmula (8) del Capítulo anterior y omitiendo la pequeña correccion que depende de r y de n', resulta:

$$n = \tfrac{1}{2}\,A\,D\,M\,\frac{(B + b)\,(B - b)}{B\,b}$$

expresion en la cual puede adoptarse un valor medio y constante del coeficiente barométrico A, y haciendo la multiplicacion por $\frac{1}{2}\,M$, se obtiene por último:

$$n = 3995\,D\,\frac{(B + b)\,(B - b)}{B\,b}$$

Para aplicar esta sencilla fórmula, supongamos que la escala centesimal de un ipsómetro haya dado 96.°38 y 93.°86 por temperaturas del vapor en dos estaciones, siendo 22° y 20° respectivamente las del aire. Calculando por la tabla las presiones atmosféricas correspondientes, se tendrán los datos: $B = 0^{m}6622$; $T = 22°$; $b = 0^{m}6036$; y $t = 20°$; de los que resulta:

Const............	3.60152
D..........	0.03503
$B + b$..........	0.10237
$B - b$..........	8.76790
B..........	—9.82099
b..........	—9.78075
n..........	2.90508 $\quad n = 803^{m}7$

La fórmula exacta (8) daria $n = 803^{m}2$. He visto últimamente otra fórmula aproximativa de Mr. Babinet, acaso mas sencilla que la precedente, y que puede deducirse de esta. Se tiene, en efecto:......... $Bb = \frac{1}{4}\left((B+b)^2 - (B-b)^2\right)$; desechando la pequeña cantidad $(B-b)^2$, resultará sin gran error $Bb = \frac{1}{4}(B+b)^2$, y sustituyendo en la última fórmula, se obtiene: $n = 15980\, D \frac{B-b}{B+b}$. Mr Babinet adopta 16000 por coeficiente constante, lo que á la vez que simplifica el cálculo, compensa el error producido por la omision de los pequeños términos. Entónces la fórmula que, segun su autor, puede aplicarse con buen éxito para medir desniveles que no excedan de 1000^{m}, será:

$$n = 16000\, D\, \frac{B-b}{B+b}$$

Aplicada á nuestro último ejemplo, dá: $n = 802^{m}9$.

290º Todo lo que se ha expuesto en este Capítulo y el anterior manifiesta que con el barómetro, el ipsómetro, ó cualquiera otro instrumento equivalente se mide con bastante precision el desnivel de dos puntos sin necesidad de conocer la distancia que los separa. Como, por otra parte, las fórmulas de la nivelacion trigonométrica son funciones de la distancia k y de la distancia zenital z, se deduce que determinando á n por el método barométrico ó termo-barométrico, y midiendo desde una de las estaciones la distancia zenital de la otra, se tendrán los datos necesarios para el cálculo de k. Una fórmula de la pág 454 dá en efecto:

$$k = n \tan. z - (2.8395)\, k^2 \tan. z$$

y como su segundo término es pequeño, introduciendo el valor aproximativo $k^2 = n^2 \tan.^2 z$, se obtiene:

$$k = n \tan. z - (2.8395)\, n^2 \tan.^3 z$$

Ejemplo.—La distancia zenital del cerro de Ajusco tomada desde la Escuela de Ingenieros, es $z = 86° 44'$. Adoptando 3677^m por altura de la montaña sobre el nivel del mar, segun Burkart, y 2270^m por la de la Escuela, tendrémos $n = 1407^m$.

n	3.14829	n^2	6.2965
tan. z	1.24355	tan.^{3} z	3.7306
	4.39184	const	2.8395
			2.8666

$$k = 24651^m - 735^m = 23916^m$$

Este método, llamado por el Baron de Humboldt *ipsométrico*, ó de *bases verticales*, sirvió á este sabio para levantar las cartas aproximativas de las extensas comarcas que recorrió en América; pero por la forma de la ecuacion se comprende que el mas pequeño error en n ó en z es de mucha trascendencia en el resultado final. Su aplicacion, sin embargo, puede ser de bastante utilidad en casos semejantes, y por tanto merece ocupar un lugar entre los demas métodos de aproximacion que se han expuesto en el Capítulo XVIII de la Planometría.

En las "Tablas Meteorológicas y Físicas preparadas para el Instituto Smithsoniano, por Arnold Guyot - 3a ed. Washington - 1859" se tienen las sigtes tablas, muy útiles para la determinacion de alt. por medio de las presiones atmosféricas:

Serie A: Tabla IV "Valores correspondtes para cada décimos de grado, desde +122° á -76° Fahrenheit, en Centígr. hasta los centésimos ~~(de la que puede estractarse)~~ Tabla VI "Valores correspondtes para cada décimo de grado, desde +100° á +89° Centig. en Fahrenheit hasta los centésimos, que son las temper. corresp. á la ebullicion del agua á diversas presiones

TABLAS.

TABLA DE CUERDAS. Radio = 1

	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	
0′	.0000	.0175	.0349	.0524	.0698	.0872	.1047	.1221	.1395	.1569	.1743	0′
1	.0003	.0177	.0352	.0526	.0701	.0875	.1050	.1224	.1398	.1572	.1746	1
2	.0006	.0180	.0355	.0529	.0704	.0878	.1053	.1227	.1401	.1575	.1749	2
3	.0009	.0183	.0358	.0532	.0707	.0881	.1055	.1230	.1404	.1578	.1752	3
4	.0012	.0186	.0361	.0535	.0710	.0884	.1058	.1233	.1407	.1581	.1755	4
5	.0015	.0189	.0364	.0538	.0713	.0987	.1061	.1235	.1410	.1584	.1758	5
6	.0017	.0192	.0366	.0541	.0715	.0890	.1064	.1238	.1413	.1587	.1761	6
7	.0020	.0195	.0369	.0544	.0718	.0893	.1067	.1241	.1415	.1589	.1763	7
8	.0023	.0198	.0372	.0547	.0721	.0896	.1070	.1244	.1418	.1592	.1766	8
9	.0026	.0201	.0375	.0550	.0724	.0899	.1073	.1247	.1421	.1595	.1769	9
10	.0029	.0204	.0378	.0553	.0727	.0901	.1076	.1250	.1424	.1598	,1772	10
11	.0032	.0207	.0381	.0556	.0730	.0904	.1079	.1253	.1427	.1601	.1775	11
12	.0035	.0209	.0384	.0558	.0733	.0907	.1082	.1256	.1430	.1604	.1778	12
13	.0038	.0212	.0387	.0561	.0736	.0910	.1084	.1259	.1433	.1607	.1781	13
14	.0041	.0215	.0390	.0564	.0739	.0913	.1087	.1262	.1436	.1610	.1784	14
15	.0044	.0218	.0393	.0567	.0742	.0916	.1090	.1265	.1439	.1613	.1787	15
16	.0047	.0221	.0396	.0570	.0745	.0919	.1093	.1267	.1442	.1616	.1789	16
17	.0049	.0224	.0398	.0573	.0747	.0922	.1096	.1270	.1444	.1618	.1792	17
18	.0052	.0227	.0401	.0576	.0750	.0925	.1099	,1273	.1447	.1621	.1795	18
19	.0055	.0230	,0404	.0579	.0753	.0928	.1102	.1276	.1450	.1624	.1798	19
20	.0058	.0233	.0407	.0582	.0756	.0931	.1105	.1279	.1453	.1627	.1801	20
21	.0061	.0236	.0410	.0585	.0759	.0933	.1108	.1282	.1456	.1630	.1804	21
22	.0064	.0239	.0413	.0588	.0762	.0936	.1111	.1285	.1459	.1633	.1807	22
23	.0067	.0241	.0416	.0590	.0765	.0939	.1114	.1288	.1462	.1636	.1810	23
24	.0070	.0244	.0419	.0593	.0768	.0942	.1116	.1291	.1465	,1639	.1813	24
25	.0073	.0247	.0422	.0596	.0771	.0945	.1119	.1294	.1468	.1642	.1816	25
26	.0076	.0250	.0425	.0599	.0774	.0948	.1122	.1296	.1471	.1645	.1818	26
27	.0079	.0253	.0428	.0602	.0776	.0951	.1125	.1299	.1473	.1647	.1821	27
28	.0081	.0256	.0430	.0605	.0779	.0954	.1128	.1302	.1476	.1650	.1824	28
29	.0084	.0259	.0433	.0608	.0782	.0957	.1131	.1305	.1479	.1653	.1827	29
30	.0087	.0262	.0436	.0611	.0785	.0960	.1134	.1308	.1482	.1656	.1830	30
31	.0090	.0265	.0439	.0614	.0788	.0962	.1137	.1311	.1485	.1659	.1833	31
32	.0093	.0268	.0442	.0617	.0791	.0965	.1140	.1314	.1488	.1662	.1836	32
33	.0096	.0271	.0445	.0619	.0794	.0968	.1143	.1317	.1491	.1665	.1839	33
34	.0099	.0273	.0448	.0622	.0797	.0971	.1145	.1320	.1494	.1668	.1842	34
35	.0102	.0276	.0451	.0625	.0800	.0974	.1148	.1323	,1497	.1671	.1845	35
36	.0105	.0279	.0454	.0628	.0803	.0977	.1151	.1325	.1500	.1674	.1847	36
37	.0108	.0282	.0457	.0631	.0806	.0980	.1154	.1328	.1502	.1676	.1850	37
38	.0111	.0285	.0460	.0634	.0808	.0983	.1157	.1331	.1505	.1679	.1853	38
39	.0113	.0288	.0462	.0637	.0811	.0986	.1160	.1334	.1508	.1682	.1856	39
40	.0116	.0291	.0465	.0640	.0814	.0989	.1163	.1337	.1511	.1685	.1859	40
41	.0119	.0294	.0468	.0643	.0817	.0992	.1166	.1340	.1514	.1688	.1862	41
42	.0122	.0297	.0471	.0646	.0820	.0994	.1169	.1343	.1517	.1691	.1865	42
43	.0125	.0300	.0474	.0649	.0823	.0997	.1172	.1346	.1520	.1694	.1868	43
44	.0128	.0303	.0477	.0651	.0826	.1000	.1175	.1349	.1523	.1697	.1871	44
45	.0131	.0305	.0480	.0654	.0829	.1003	.1177	.1352	.1526	.1700	.1873	45
46	.0134	.0308	.0483	.0657	.0832	.1006	.1180	.1355	.1529	.1703	.1876	46
47	.0137	.0311	.0486	.0660	.0835	.1009	.1183	.1357	.1531	.1705	,1879	47
48	.0140	.0314	.0489	.0663	.0838	.1012	.1186	.1360	.1534	.1708	.1882	48
49	.0143	.0317	.0492	.0666	.0840	.1015	.1189	.1363	.1537	.1711	.1885	49
50	.0145	.0320	.0494	.0669	.0843	.1018	.1192	.1366	.1540	.1714	.1888	50
51	.0148	.0323	.0497	.0672	.0846	.1021	.1195	.1369	.1543	.1717	.1891	51
52	.0151	.0326	.0500	.0675	.0849	.1023	.1198	.1372	.1546	.1720	.1894	52
53	.0154	.0329	.0503	.0678	.0852	.1026	.1201	.1375	.1549	.1723	.1897	53
54	.0157	.0332	.0506	.0681	.0855	.1029	.1204	.1378	.1552	.1726	.1900	54
55	.0160	.0335	.0509	.0683	.0858	.1032	.1206	.1381	.1555	.1729	.1902	55
56	.0163	.0337	.0512	.0686	.0861	.1035	.1209	.1384	.1558	.1732	.1905	56
57	.0166	.0340	.0515	.0689	.0864	.1038	.1212	.1386	.1560	.1734	.1908	57
58	.0169	.0343	.0518	.0692	.0867	.1041	.1215	.1389	.1563	.1737	.1911	58
59	.0172	.0346	.0521	.0695	.0869	.1044	.1218	.1392	.1566	.1740	.1914	59
60	.0175	.0349	.0524	.0698	.0872	.1047	.1221	.1395	.1569	.1743	.1917	60

TABLA DE CUERDAS. Radio = 1

	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°	20°	21°	
0′	.1917	.2091	.2264	.2437	.2611	.2783	.2956	.3129	.3301	.3473	.3645	0′
1	.1920	.2093	.2267	.2440	.2613	.2786	.2959	.3132	.3304	.3476	.3648	1
2	.1923	.2096	.2270	.2443	.2616	.2789	.2962	.3134	.3307	.3479	.3650	2
3	.1926	.2099	.2273	.2446	.2619	.2792	.2965	.3137	.3310	.3482	.3653	3
4	.1928	.2102	.2276	.2449	.2622	.2795	.2968	.3140	.3312	.3484	.3656	4
5	.1931	.2105	.2279	.2452	.2625	.2798	.2971	.3143	.3315	.3487	.3659	5
6	.1934	.2108	.2281	.2455	.2628	.2801	.2973	.3146	.3318	.3490	.3662	6
7	.1937	.2111	.2284	.2458	.2631	.2804	.2976	.3149	.3321	.3493	.3665	7
8	.1940	.2114	.2287	.2460	.2634	.2807	.2979	.3152	.3324	.3496	.3668	8
9	.1943	.2117	.2290	.2463	.2636	.2809	.2982	.3155	.3327	.3499	.3670	9
10	.1946	.2119	.2293	.2466	.2639	.2812	.2985	.3157	.3330	.3502	.3673	10
11	.1949	.2122	.2296	.2469	.2642	.2815	,2988	.3160	.3333	.3504	.3676	11
12	.1952	.2125	.2299	.2472	.2645	.2818	.2991	.3163	.3335	.3507	.3679	12
13	.1955	.2128	.2302	.2475	.2648	.2821	.2994	.3166	.3338	.3510	.3682	13
14	.1957	.2131	.2305	.2478	.2651	.2824	.2996	,3169	.3341	.3513	.3685	14
15	.1960	.2134	.2307	.2481	.2654	.2827	.2999	.3172	.3344	.3516	.3688	15
16	.1963	.2137	.2310	.2484	.2657	.2830	.3002	.3175	.3347	.3519	.3690	16
17	.1966	.2140	.2313	.2486	.2660	.2832	.3005	.3178	.3350	.3522	.3693	17
18	.1969	.2143	.2316	.2489	.2662	.2835	.3008	.3180	.3353	.3525	.3696	18
19	.1972	.2146	.2319	.2492	.2665	.2838	.3011	.3183	.3355	.3527	.3699	19
20	.1975	.2148	.2322	.2495	.2668	.2841	.3014	.3186	.3358	.3530	.3702	20
21	.1978	.2151	.2325	.2498	.2671	.2844	.3017	.3189	.3361	.3533	.3705	21
22	.1981	,2154	.2328	.2501	.2674	.2847	.3019	.3192	.3364	.3536	.3708	22
23	.1983	.2157	.2331	.2504	.2677	.2850	.3022	.3195	.3367	.3539	,3710	23
24	.1986	.2160	.2333	.2507	.2680	.2853	.3025	.3198	.3370	.3542	.3713	24
25	.1989	.2163	.2336	.2510	.2683	.2855	.3028	.3200	.3373	.3545	.3716	25
26	.1992	.2166	.2339	.2512	.2685	.2858	.3031	.3203	.3376	.3547	.3719	26
27	.1995	.2169	.2342	.2515	.2688	.2861	.3034	.3206	.3378	.3550	.3722	27
28	.1998	.2172	.2345	.2518	.2691	.2864	.3037	.3209	.3381	.3553	.3725	28
29	.2001	.2174	.2348	.2521	.2694	.2867	.3040	.3212	.3384	.3556	.3728	29
30	.2004	.2177	.2351	.2524	.2697	.2870	.3042	.3215	.3387	.3559	.3730	30
31	.2007	.2180	.2354	.2527	.2700	.2873	.3045	.3218	.3390	.3562	.3733	31
32	.2010	.2183	.2357	.2530	.2703	.2876	.3048	.3221	.3393	.3565	.3736	32
33	.2012	.2186	.2359	.2533	.2706	.2878	.3051	.3223	.3396	.3567	.3739	33
34	.2015	.2189	.2362	.2536	,2709	.2881	.3054	.3226	.3398	.3570	.3742	34
35	.2018	.2192	.2365	.2538	.2711	.2884	.3057	.3229	.3401	.3573	.3745	35
36	.2021	.2195	.2368	.2541	.2714	.2887	.3060	.3232	.3404	.3576	.3748	36
37	.2024	.2198	.2371	.2544	.2717	.2890	.3063	.3235	.3407	.3579	.3750	37
38	.2027	.2200	.2374	.2547	.2720	.2893	.3065	.3238	.3410	.3582	.3753	38
39	.2030	.2203	.2377	.2550	.2723	.2896	.3068	.3241	.3413	.3585	.3756	39
40	.2033	.2206	.2380	.2553	.2726	.2899	.3071	.3244	.3416	.3587	.3759	40
41	.2036	.2209	.2383	.2556	.2729	.2902	.3074	.3246	.3419	.3590	.3762	41
42	.2038	.2212	.2385	.2559	.2732	.2904	.3077	.3249	.3421	.3593	.3765	42
43	.2041	.2215	.2388	.2561	.2734	.2907	.3080	.3252	.3424	.3596	.3768	43
44	.2044	.2218	.2391	.2564	.2737	.2910	.3083	.3255	.3427	.3599	.3770	44
45	.2047	.2221	.2394	.2567	.2740	.2913	.3086	.3258	.3430	.3602	.3773	45
46	.2050	.2224	.2397	.2570	.2743	.2916	.3088	.3261	.3433	.3605	.3776	46
47	.2053	.2226	.2400	.2573	.2746	.2919	.3091	.3264	.3436	.3608	.3779	47
48	.2056	.2229	.2403	.2576	.2749	.2922	.3094	.3267	.3439	.3610	.3782	48
49	.2059	.2232	.2406	.2579	.2752	.2925	.3097	,3269	.3441	.3613	.3785	49
50	.2062	.2235	.2409	.2582	.2755	.2927	.3100	.3272	.3444	.3616	.3788	50
51	.2065	.2238	.2411	.2585	.2758	.2930	.3103	.3275	.3447	.3619	.3790	51
52	.2067	.2241	.2414	.2587	.2760	.2933	.3106	.3278	.3450	.3622	.3793	52
53	.2070	.2244	.2417	.2590	.2763	.2936	.3109	.3281	.3453	.3625	.3796	53
54	.2073	.2247	.2420	.2593	.2766	.2939	.3111	.3284	.3456	.3628	.3799	54
55	.2076	.2250	.2423	.2596	.2769	,2942	.3114	.3287	.3459	.3630	.3802	55
56	.2079	.2253	.2426	.2599	.2772	.2945	.3117	.3289	.3462	.3633	.3805	56
57	.2082	.2255	.2429	.2602	.2775	.2948	.3120	.3292	.3464	.3636	.3808	57
58	.2085	.2258	.2432	.2605	.2778	.2950	.3123	.3295	.3467	.3639	.3810	58
59	.2088	.2261	.2434	.2608	.2781	.2953	.3126	.3298	.3470	.3642	.3813	59
60	.2091	.2264	.2437	.2611	.2783	.2956	.3129	.3301	.3473	.3645	.3816	60

TABLA DE CUERDAS. Radio = 1

	22°	23°	24°	25°	26°	27°	28°	29°	30°	31°	32°	
0′	.3816	.3987	.4158	.4329	.4499	.4669	.4838	.5008	.5176	.5345	.5513	0′
1	.3819	.3990	.4161	.4332	.4502	.4672	.4841	.5010	.5179	.5348	.5516	1
2	.3822	.3993	.4164	.4334	.4505	.4675	.4844	.5013	.5182	.5350	.5518	2
3	.3825	.3996	.4167	.4337	.4508	.4677	.4847	.5016	.5185	.5353	.5521	3
4	.3828	.3999	.4170	.4340	.4510	.4680	.4850	.5019	.5188	.5356	.5524	4
5	.3830	.4002	.4172	.4343	.4513	.4683	.4853	.5022	.5190	.5359	.5527	5
6	.3833	.4004	.4175	.4346	.4516	.4686	.4855	.5024	.5193	.5362	.5530	6
7	.3836	.4007	.4178	.4349	.4519	.4689	.4858	.5027	.5196	.5364	.5532	7
8	.3839	.4010	.4181	.4352	.4522	.4692	.4861	.5030	.5199	.5367	.5535	8
9	.3842	.4013	.4184	.4354	.4525	.4694	.4864	.5033	.5202	.5370	.5538	9
10	.3845	.4016	.4187	.4357	.4527	.4697	.4867	.5036	.5204	.5373	.5541	10
11	.3848	.4019	.4190	.4360	.4530	.4700	.4869	.5039	.5207	.5376	.5543	11
12	.3850	.4022	.4192	.4363	.4533	.4703	.4872	.5041	.5210	.5378	.5546	12
13	.3853	.4024	.4195	.4366	.4536	.4706	.4875	.5044	.5213	.5381	.5549	13
14	.3856	.4027	.4198	.4369	.4539	.4708	.4878	.5047	.5216	.5384	.5552	14
15	.3859	.4030	.4201	.4371	.4542	.4711	.4881	.5050	.5219	.5387	.5555	15
16	.3862	.4033	.4204	.4374	.4544	.4714	.4884	.5053	.5221	.5390	.5557	16
17	.3865	.4036	.4207	.4377	.4547	.4717	.4886	.5055	.5224	.5392	.5560	17
18	.3868	.4039	.4209	.4380	.4550	.4720	.4889	.5058	.5227	.5395	.5563	18
19	.3870	.4042	.4212	.4383	.4553	.4723	.4892	.5061	.5230	.5398	.5566	19
20	.3873	.4044	.4215	.4386	.4556	.4725	.4895	.5064	.5233	.5401	.5569	20
21	.3876	.4047	.4218	.4388	.4559	.4728	.4898	.5067	.5235	.5404	.5571	21
22	.3879	.4050	.4221	.4391	.4561	.4731	.4901	.5070	.5238	.5406	.5574	22
23	.3882	.4053	.4224	.4394	.4564	.4734	.4903	.5072	.5241	.5409	.5577	23
24	.3885	.4056	.4226	.4397	.4567	.4737	.4906	.5075	.5244	.5412	.5580	24
25	.3888	.4059	.4229	.4400	.4570	.4740	.4909	.5078	.5247	.5415	.5583	25
26	.3890	.4061	.4232	.4403	.4573	.4742	.4912	.5081	.5249	.5418	.5585	26
27	.3893	.4064	.4235	.4405	.4576	.4745	.4915	.5084	.5252	.5420	.5588	27
28	.3896	.4067	.4238	.4408	.4578	.4748	.4917	.5086	.5255	.5423	.5591	28
29	.3899	.4070	.4241	.4411	.4581	.4751	.4920	.5089	.5258	.5426	.5594	29
30	.3902	.4073	.4244	.4414	.4584	.4754	.4923	.5092	.5261	.5429	.5597	30
31	.3905	.4076	.4246	.4417	.4587	.4757	.4926	.5095	.5263	.5432	.5599	31
32	.3908	.4079	.4249	.4420	.4590	.4759	.4929	.5098	.5266	.5434	.5602	32
33	.3910	.4081	.4252	.4422	.4593	.4762	.4932	.5100	.5269	.5437	.5605	33
34	.3913	.4084	.4255	.4425	.4595	.4765	.4934	.5103	.5272	.5440	.5608	34
35	.3916	.4087	.4258	.4428	.4598	.4768	.4937	.5106	.5275	.5443	.5611	35
36	.3919	.4090	.4261	.4431	.4601	.4771	.4940	.5109	.5277	.5446	.5613	36
37	.3922	.4093	.4263	.4434	.4604	.4773	.4943	.5112	.5280	.5448	.5616	37
38	.3925	.4096	.4266	.4437	.4607	.4776	.4946	.5115	.5283	.5451	.5619	38
39	.3927	.4098	.4269	.4439	.4609	.4779	.4948	.5117	.5286	.5454	.5622	39
40	.3930	.4101	.4272	.4442	.4612	.4782	.4951	.5120	.5289	.5457	.5625	40
41	.3933	.4104	.4275	.4445	.4615	.4785	.4954	.5123	.5291	.5460	.5627	41
42	.3936	.4107	.4278	.4448	.4618	.4788	.4957	.5126	.5294	.5462	.5630	42
43	.3939	.4110	.4280	.4451	.4621	.4790	.4960	.5129	.5297	.5465	.5633	43
44	.3942	.4113	.4283	.4454	.4624	.4793	.4963	.5131	.5300	.5468	.5636	44
45	.3945	.4116	.4286	4456	.4626	.4796	.4965	.5134	.5303	.5471	.5638	45
46	.3947	.4118	.4289	.4459	.4629	.4799	.4968	.5137	.5306	.5474	.5641	46
47	.3950	.4121	.4292	.4462	.4632	.4802	.4971	.5140	.5308	.5476	.5644	47
48	.3953	.4124	.4295	4465	.4635	.4805	.4974	.5143	.5311	.5479	.5647	48
49	.3956	.4127	.4298	.4468	.4638	.4807	.4977	.5145	5314	.5482	.5650	49
50	.3959	.4130	.4300	.4471	.4641	4810	.4979	.5148	.5317	.5485	5652	50
51	.3962	.4133	.4303	.4474	.4643	.4813	.4982	.5151	.5320	.5488	.5655	51
52	.3965	.4135	.4306	.4476	.4646	.4816	.4985	.5154	.5322	.5490	.5658	52
53	.3967	.4138	.4309	.4479	.4649	4819	4988	5157	.5325	.5493	.5661	53
54	.3970	.4141	.4312	.4482	.4652	.4822	4991	.5160	.5328	.5496	.5664	54
55	.3973	.4144	.4315	.4485	.4655	.4824	.4994	.5162	.5331	.5499	.5666	55
56	.3976	.4147	.4317	.4488	.4658	.4827	.4996	.5165	.5334	.5502	.5669	56
57	.3979	.4150	.4320	.4491	.4660	.4830	.4999	.5168	.5336	.5504	.5672	57
58	.3982	.4153	.4323	.4493	.4663	.4833	5002	.5171	.5339	.5507	.5675	58
59	.3985	.4155	.4326	.4496	.4666	.4836	.5005	5174	.5342	.5510	.5678	59
60	.3987	.4158	.4329	4499	.4669	.4838	.5008	.5176	.5345	.5513	.5680	60

TABLA DE CUERDAS. Radio = 1

	33°	34°	35°	36°	37°	38°	39°	40°	41°	42°	43°	
0′	.5680	.5847	.6014	.6180	.6346	.6511	.6676	.6840	.7004	.7167	.7330	0′
1	.5683	.5850	.6017	.6183	.6349	.6514	.6679	.6843	.7007	.7170	.7333	1
2	.5686	.5853	.6020	.6186	.6352	.6517	.6682	.6846	.7010	.7173	.7335	2
3	.5689	.5856	.6022	.6189	.6354	6520	.6684	.6849	.7012	.7176	.7338	3
4	.5691	.5859	.6025	.6191	.6357	.6522	.6687	.6851	.7015	.7178	.7341	4
5	.5694	.5861	.6028	.6194	.6360	.6525	.6690	.6854	.7018	.7181	,7344	5
9	.5697	.5864	.6031	.6197	.6363	.6528	.6693	.6857	.7020	.7184	.7346	6
7	.5700	.5867	.6034	6200	.6365	.6531	.6695	.6860	7023	.7186	.7349	7
8	.5703	.5870	.6036	.6202	.6368	.6533	.6698	.6862	.7026	.7189	.7352	8
9	.5705	.5872	.6039	.6205	.6371	.6536	.6701	.6865	.7029	.7192	.7354	9
10	.5708	.5875	.6042	.6208	.6374	.6539	.6704	.6868	.7031	.7195	.7357	10
11	.5711	.5878	.6045	.6211	.6376	.6542	.6706	.6870	.7034	.7197	.7360	11
12	.5714	.5881	.6047	.6214	.6379	.6544	.6709	.6873	.7037	.7200	.7362	12
13	.5717	.5884	.6050	.6216	.6382	.6547	.6712	.6876	.7040	.7203	.7365	13
14	.5719	.5886	.6053	.6219	.6385	.6550	.6715	.6879	.7042	.7205	.7368	14
15	.5722	.5889	.6056	.6222	.6387	.6553	.6717	.6881	.7045	.7208	.7371	15
16	.5725	.5892	.6058	.6225	.6390	.6555	.6720	.6884	7048	.7211	.7373	16
17	.5728	.5895	.6061	.6227	.6393	.6558	.6723	.6887	.7050	.7214	.7376	17
18	.5730	.5897	.6064	.6230	.6396	6561	.6725	.6890	.7053	.7216	.7379	18
19	.5733	.5900	.6067	.6233	.6398	.6564	.6728	.6892	.7056	.7219	.7381	19
20	.5736	.5903	.6070	.6236	.6401	.6566	.6731	.6895	.7059	.7222	.7384	20
21	.5739	.5906	.6072	.6238	.6404	.6569	.6734	.6898	.7061	.7224	.7387	21
22	.5742	.5909	.6075	.6241	.6407	.6572	.6736	.6901	.7064	.7227	.7390	22
23	.5744	.5911	.6078	.6244	6410	.6575	.6739	.6903	.7067	.7230	.7392	23
24	5747	.5914	.6081	.6247	.6412	.6577	6742	.6906	.7069	.7232	.7395	24
25	.5750	.5917	.6083	.6249	6415	.6580	.6745	.6909	.7072	.7235	.7398	25
26	.5753	.5920	.6086	.6252	.6418	.6583	.6747	.6911	.7075	.7238	.7400	26
27	.5756	.5922	.6089	.6255	.6421	.6586	.6750	.6914	.7078	.7241	.7403	27
28	.5758	.5925	.6092	.6258	.6423	.6588	.6753	.6917	.7080	.7243	.7406	28
29	.5761	.5928	.6095	.6260	.6426	6591	.6756	.6920	.7083	.7246	.7408	29
30	.5764	.5931	.6097	.6263	.6429	.6594	.6758	.6922	.7086	.7249	.7411	30
31	.5767	.5934	.6100	.6266	6432	.6597	.6761	.6925	7089	.7251	.7414	31
32	.5769	.5936	.6103	.6269	.6434	6599	.6764	.6928	.7091	.7254	.7417	32
33	.5772	.5939	.6106	.6272	.6437	.6602	.6767	.6931	.7094	.7257	.7419	33
34	.5775	.5942	.6108	.6274	.6440	.6605	.6769	.6933	.7097	.7260	.7422	34
35	.5778	.5945	.6111	.6277	.6443	.6608	.6772	.6936	.7099	.7262	.7425	35
36	.5781	.5947	.6114	.6280	.6445	.6610	.6775	.6939	.7102	.7265	.7427	36
37	.5783	.5950	.6117	.6283	.6448	.6613	.6777	.6941	.7105	.7268	.7430	37
38	.5786	.5953	.6119	.6285	.6451	.6616	.6780	.6944	.7108	.7270	.7433	38
39	.5789	.5956	.6122	.6288	.6454	.6619	.6783	.6947	.7110	.7273	.7435	39
40	.5792	.5959	.6125	6291	.6456	.6621	.6786	.6950	.7113	.7276	.7438	40
41	.5795	.5961	.6128	.6294	.6459	.6624	.6788	.6952	.7116	.7279	.7441	41
42	.5797	.5964	.6130	.6296	.6462	.6627	.6791	.6955	.7118	.7281	.7443	42
43	.5800	.5967	.6133	.6299	.6465	.6630	.6794	.6958	.7121	.7284	.7446	43
44	5803	.5970	.6136	.6302	.6467	.6632	.6797	.6961	.7124	.7287	.7449	44
45	.5806	.5972	.6139	6305	.6470	.6635	.6799	.6963	.7127	.7289	.7452	45
46	.5808	5975	.6142	.6307	.6473	.6638	.6802	.6966	.7129	.7292	.7454	46
47	.5811	.5978	.6144	.6310	.6476	.6640	.6805	.6969	.7132	.7295	.7457	47
48	.5814	.5981	.6147	.6313	.6478	6643	.6808	.6971	.7135	.7298	.7460	48
49	.5817	.5984	.6150	.6316	.6481	.6646	.6810	.6974	.7137	.7300	.7462	49
50	.5820	.5986	.6153	.6318	.6484	.6649	.6813	.6977	.7140	.7303	.7465	50
51	.5822	.5989	.6155	.6321	.6487	.6651	.6816	6980	.7143	.7306	.7468	51
52	.5825	.5992	.6158	.6324	.6489	.6654	.6819	.6982	.7146	.7308	.7471	52
53	.5828	.5995	.6161	.6327	.6492	.6657	.6821	.6985	.7148	.7311	.7473	53
54	5831	.5997	.6164	.6330	.6495	.6660	.6824	.6988	.7151	7314	.7476	54
55	.5834	.6000	.6166	.6332	.6498	.6662	.6827	.6991	.7154	.7316	.7479	55
56	.5836	.6003	.6169	.6335	6500	.6665	.6829	.6993	.7156	.7319	.7481	56
57	.5839	.6006	.6172	.6338	.6503	.6668	.6332	.6996	.7159	.7322	.7484	57
58	.5842	.6009	.6175	.6341	.6506	.6671	.6835	.6999	.7162	.7325	.7487	58
59	.5845	.6011	.6178	.6343	.6509	.6673	.6838	.7001	.7165	.7327	.7489	59
60	.5847	.6014	.6180	.6346	.6511	.6676	.6840	.7004	.7167	.7330	.7492	60

TABLA DE CUERDAS. Radio = 1

	44°	45°	46°	47°	48°	49°	50°	51°	52°	53°	54°	
0′	.7492	.7654	.7815	.7975	.8135	.8294	.8452	.8610	.8767	.8924	.9080	0′
1	.7495	.7656	.7817	.7978	.8137	.8297	.8455	.8613	.8770	.8927	.9082	1
2	.7498	.7659	.7820	.7980	.8140	.8299	.8458	.8615	.8773	.8929	.9085	2
3	.7500	.7662	.7823	.7983	.8143	.8302	.8460	.8618	.8775	.8932	.9088	3
4	.7503	.7664	.7825	.7986	.8145	.8304	.8463	.8621	.8778	.8934	.9090	4
5	.7506	.7667	.7828	.7988	.8148	.8307	.8466	.8623	.8780	.8937	.9093	5
6	.7508	.7670	.7831	.7991	.8151	.8310	.8468	.8626	.8783	.8940	.9095	6
7	.7511	.7672	.7833	.7994	.8153	.8312	.8471	.8629	.8786	.8942	.9098	7
8	.7514	.7675	.7836	.7996	.8156	.8315	.8473	.8631	.8788	.8945	.9101	8
9	.7516	.7678	.7839	.7999	.8159	.8318	.8476	.8634	.8791	.8947	.9103	9
10	.7519	.7681	.7841	.8002	.8161	.8320	.8479	.8636	.8794	.8950	.9106	10
11	.7522	,7683	,7844	.8004	,8164	.8323	.8481	.8639	.8796	.8953	.9108	11
12	.7524	.7686	.7847	.8007	.8167	.8326	.8484	.8642	.8799	.8955	.9111	12
13	.7527	.7689	.7849	.8010	.8169	.8328	.8487	.8644	.8801	.8958	.9113	13
14	.7530	.7691	.7852	.8012	.8172	.8331	.8489	.8647	.8804	.8960	.9116	14
15	.7533	.7694	.7855	.8015	.8175	.8334	.8492	.8650	.8807	.8963	.9119	15
16	.7535	.7697	.7857	.8018	.8177	.8336	.8495	.8652	.8809	.8966	.9121	16
17	.7538	.7699	.7860	.8020	.8180	.8339	.8497	.8655	.8812	.8968	.9124	17
18	.7541	.7702	.7863	.8023	.8183	.8341	.8500	.8657	.8814	.8971	.9126	18
19	.7543	.7705	.7865	.8026	.8185	.8344	.8502	.8660	.8817	.8973	.9129	19
20	.7546	.7707	.7868	.8028	.8188	.8347	.8505	.8663	.8820	.8976	.9132	20
21	.7549	.7710	.7871	.8031	.8190	.8349	.8508	.8665	.8822	.8979	.9134	21
22	.7551	.7713	.7873	.8034	.8193	.8352	.8510	.8668	.8825	.8981	.9137	22
23	.7554	.7715	.7876	.8036	.8196	.8355	.8513	.8671	.8828	.8984	.9139	23
24	.7557	.7718	.7879	.8039	.8198	.8357	.8516	.8673	.8830	.8986	.9142	24
25	.7560	.7721	.7882	.8042	.8201	.8360	.8518	.8676	.8833	.8989	.9145	25
26	.7562	.7723	.7884	.8044	.8204	.8363	.8521	.8678	.8835	.8992	.9147	26
27	.7565	.7726	.7887	.8047	.8206	.8365	.8523	.8681	.8838	.8994	.9150	27
28	.7568	.7729	.7890	.8050	.8209	.8368	.8526	.8684	.8841	.8997	.9152	28
29	.7570	.7731	.7892	.8052	.8212	.8371	.8529	.8686	.8843	.8999	.9155	29
30	.7573	.7734	.7895	.8055	.8214	.8373	.8531	.8689	.8846	.9002	.9157	30
31	.7576	.7737	.7898	.8058	.8217	.8376	.8534	.8692	.8848	.9005	.9160	31
32	.7578	.7740	.7900	.8060	.8220	.8378	.8537	.8694	.8851	.9007	.9163	32
33	.7581	.7742	.7903	.8063	.8222	.8381	.8539	.8697	.8854	.9010	.9165	33
34	.7584	.7745	.7906	.8066	.8225	.8384	.8542	.8699	.8856	.9012	.9168	34
35	.7586	.7748	.7908	.8068	.8228	.8386	.8545	.8702	.8859	.9015	.9170	35
36	.7589	.7750	.7911	.8071	.8230	.8389	.8547	.8705	.8861	.9018	.9173	36
37	.7592	.7753	.7914	.8074	.8233	.8392	.8550	.8707	.8864	.9020	.9176	37
38	.7595	.7756	.7916	.8076	.8236	.8394	.8552	.8710	.8867	.9023	.9178	38
39	.7597	.7758	.7919	.8079	.8238	.8397	.8555	.8712	.8869	.9025	.9181	39
40	.7600	.7761	.7922	.8082	.8241	.8400	.8558	.8715	.8872	.9028	.9183	40
41	.7603	.7764	.7924	.8084	.8244	.8402	.8560	.8718	.8874	.9031	.9186	41
42	.7605	.7766	.7927	.8087	.8246	.8405	.8563	.8720	.8877	.9033	.9188	42
43	.7608	.7769	.7930	.8090	.8249	.8408	.8566	.8723	.8880	.9036	.9191	43
44	.7611	.7772	.7932	.8092	.8251	.8410	.8568	.8726	.8882	.9038	.9194	44
45	.7613	.7774	.7935	.8095	.8254	.8413	.8571	.8728	.8885	.9041	.9196	45
46	.7616	.7777	.7938	.8098	.8257	.8415	.8573	.8731	.8887	.9044	.9199	46
47	.7619	.7780	.7940	.8100	.8259	.8418	.8576	.8734	.8890	.9046	.9201	47
48	.7621	.7782	.7943	.8103	.8262	.8421	.8579	.8736	.8893	.9049	.9204	48
49	.7624	.7785	.7946	.8105	.8265	.8423	.8581	.8739	.8895	.9051	.9207	49
50	.7627	.7788	.7948	.8108	.8267	.8426	.8584	.8741	.8898	.9054	.9209	50
51	.7629	.7791	.7951	.8111	.8270	.8429	.8587	.8744	.8900	.9056	.9212	51
52	.7632	.7793	.7954	.8113	.8273	.8431	.8589	.8747	.8903	.9059	.9214	52
53	.7635	.7796	.7956	.8116	.8275	.8434	.8592	.8749	.8906	.9062	.9217	53
54	.7638	.7799	.7959	.8119	.8278	.8437	.8594	.8752	.8908	.9064	.9219	54
55	.7640	.7801	.7962	.8121	.8281	.8439	.8597	.8754	.8911	.9067	.9222	55
56	.7643	.7804	.7964	.8124	.8283	.8442	.8600	.8757	.8914	.9069	.9225	56
57	.7646	.7807	.7967	.8127	.8286	.8444	.8602	.8760	.8916	.9072	.9227	57
58	.7648	.7809	.7970	.8129	.8289	.8447	.8605	.8762	.8919	.9075	.9230	58
59	.7651	.7812	.7972	.8132	.8291	.8450	.8608	.8765	.8921	.9077	.9232	59
60	.7654	.7815	.7975	.8135	.8294	.8452	.8610	.8767	.8924	.9080	.9235	60

	55°	56°	57°	58°	59°	60°	61°	62°	63°	64°	
0′	.9235	.9389	.9543	.9696	.9848	1.0000	1.0151	1.0301	1.0450	1.0598	0′
1	.9238	.9392	.9546	.9699	.9851	1.0003	1.0153	1.0303	1.0452	1.0601	1
2	.9240	.9395	.9548	.9701	.9854	1.0005	1.0156	1.0306	1.0455	1.0603	2
3	.9243	.9397	.9551	.9704	.9856	1.0008	1.0158	1.0308	1.0457	1.0606	3
4	.9245	.9400	.9553	.9706	.9859	1.0010	1.0161	1.0311	1.0460	1.0608	4
5	.9248	.9402	.9556	.9709	.9861	1.0013	1.0163	1.0313	1.0462	1.0611	5
6	.9250	.9405	.9559	.9711	.9864	1.0015	1.0166	1.0316	1.0465	1.0613	6
7	.9253	.9407	.9561	.9714	.9866	1.0018	1.0168	1.0318	1.0467	1.0616	7
8	.9256	.9410	.9564	.9717	.9869	1.0020	1.0171	1.0321	1.0470	1.0618	8
9	.9258	.9413	.9566	.9719	.9871	1.0023	1.0173	1.0323	1.0472	1.0621	9
10	.9261	.9415	.9569	.9722	.9874	1.0025	1.0176	1.0326	1.0475	1.0623	10
11	.9263	.9418	.9571	.9724	.9876	1.0028	1.0178	1.0328	1.0477	1.0626	11
12	.9266	.9420	.9574	.9727	.9879	1,0030	1.0181	1.0331	1.0480	1.0628	12
13	.9268	.9423	.9576	.9729	.9881	1.0033	1.0183	1.0333	1.0482	1.0630	13
14	.9271	.9425	.9579	.9732	.9884	1.0035	1.0186	1.0336	1.0485	1.0633	14
15	.9274	.9428	.9581	.9734	.9886	1.0038	1.0188	1.0338	1.0487	1.0635	15
16	.9276	.9430	.9584	.9737	.9889	1.0040	1.0191	1.0341	1.0490	1.0638	16
17	.9279	.9433	.9587	.9739	.9891	1.0043	1.0193	1.0343	1.0492	1.0640	17
18	.9281	.9436	.9589	.9742	.9894	1.0045	1.0196	1.0346	1.0495	1.0643	18
19	.9284	.9438	.9592	.9744	.9897	1.0048	1.0198	1.0348	1.0497	1.0645	19
20	.9287	.9441	.9594	.9747	.9899	1.0050	1.0201	1.0351	1.0500	1.0648	20
21	.9289	.9443	.9597	.9750	.9902	1.0053	1.0203	1.0353	1.0502	1.0650	21
22	.9292	.9446	.9599	.9752	.9904	1.0055	1.0206	1.0356	1.0504	1.0653	22
23	.9294	.9448	.9602	.9755	.9907	1.0058	1.0208	1.0358	1.0507	1.0655	23
24	.9297	.9451	.9604	.9757	.9909	1.0060	1.0211	1.0361	1.0509	1.0658	24
25	.9299	.9454	.9607	.9760	.9912	1.0063	1.0213	1.0363	1.0512	1.0660	25
26	.9302	.9456	.9610	.9762	.9914	1.0065	1.0216	1.0366	1.0514	1.0662	26
27	.9305	.9459	.9612	.9765	.9917	1.0068	1.0218	1.0368	1.0517	1.0665	27
28	.9307	.9461	.9615	.9767	.9919	1.0070	1.0221	1.0370	1.0519	1.0667	28
29	.9310	.9464	.9617	.9770	.9922	1.0073	1.0223	1;0373	1.0522	1.0670	29
30	.9312	.9466	.9620	.9772	.9924	1.0075	1.0226	1.0375	1.0524	1.0672	30
31	.9315	.9469	.9622	.9775	.9927	1.0078	1.0228	1.0378	1.0527	1.0675	31
32	.9317	.9472	.9625	.9778	.9929	1.0080	1.0231	1.0380	1.0529	1.0677	32
33	.9320	.9474	.9627	.9780	.9932	1.0083	1.0233	1.0383	1.0532	1.0680	33
34	.9323	.9477	.9630	.9783	.9934	1.0086	1.0236	1.0385	1.0534	1.0682	34
35	.9325	.9479	.9633	.9785	.9937	1.0088	1.0238	1.0388	1.0537	1.0685	35
36	.9328	.9482	.9635	.9788	.9939	1.0091	1.0241	1.0390	1.0539	1.0687	36
37	.9330	.9484	.9638	.9790	.9942	1.0093	1.0243	1.0393	1.0542	1.0690	37
38	.9333	.9487	.9640	.9793	.9945	1.0096	1.0246	1.0395	1.0544	1.0692	38
39	.9335	.9489	.9643	.9795	.9947	1.0098	1.0248	1.0398	1.0547	1.0694	39
40	.9338	.9492	.9645	.9798	.9950	1.0101	1.0251	1.0400	1.0549	1.0697	40
41	.9341	.9495	.9648	.9800	.9952	1.0103	1.0253	1.0403	1.0551	1.0699	41
42	.9343	.9497	.9650	.9803	.9955	1.0106	1.0256	1.0405	1.0554	1.0702	42
43	.9346	.9500	.9653	.9805	.9957	1.0108	1.0258	1.0408	1.0556	1.0704	43
44	.9348	.9502	.9655	.9808	.9960	1:0111	1.0261	1.0410	1.0559	1.0707	44
45	.9351	.9505	.9658	.9810	.9962	1.0113	1.0263	1.0413	1.0561	1.0709	45
46	.9353	.9507	.9661	.9813	.9965	1.0116	1.0266	1.0415	1.0564	1.0712	46
47	.9356	.9510	.9663	.9816	.9967	1.0118	1.0268	1.0418	1.0566	1.0714	47
48	.9359	.9512	.9666	.9818	.9970	1.0121	1.0271	1.0420	1.0569	1.0717	48
49	.9361	:9515	.9668	.9821	.9972	1.0123	1.0273	1.0423	1.0571	1.0719	49
50	.9364	.9518	.9671	.9823	.9975	1.0126	1.0276	1.0425	1.0574	1.0721	50
51	.9366	.9520	.9673	.9826	.9977	1.0128	1.0278	1.0428	1.0576	1.0724	51
52	.9369	.9523	.9676	.9828	.9980	1.0131	1.0281	1.0430	1.0579	1.0726	52
53	.9371	.9525	.9678	.9831	.9982	1.0133	1.0283	1.0433	1.0581	1.0729	53
54	.9374	.9528	.9681	.9833	.9985	1.0136	1.0286	1.0435	1.0584	1.0731	54
55	.9377	.9530	.9683	.9836	.9987	1.0138	1.0288	1.0438	1.0586	1.0734	55
56	.9379	.9533	.9686	.9838	.9990	1.0141	1.0291	1.0440	1.0589	1,0736	56
57	.9382	.9536	.9689	.9841	.9992	1.0143	1.0293	1.0443	1.0591	1.0739	57
58	.9384	.9538	.9691	.9843	.9995	1.0146	1.0296	1.0445	1.0593	1,0741	58
59	.9387	.9541	.9694	.9846	.9998	1.0148	1.0298	1.0447	1.0596	1.0744	59
60	.9389	.9543	.9696	.9848	1.0000	1.0151	1.0301	1.0450	1.0598	1.0746	60

TABLA DE CUERDAS. Radio = 1

	65°	66°	67°	68°	69°	70°	71°	72°	73°	
0′	1.0746	1.0893	1,1039	1.1184	1.1328	1.1472	1.1614	1.1756	1.1896	0′
1	1.0748	1.0895	1.1041	1.1186	1.1331	1.1474	1.1616	1.1758	1.1899	1
2	1.0751	1.0898	1.1044	1.1189	1.1333	1.1476	1.1619	1.1760	1.1901	2
3	1.0753	1.0900	1.1046	1.1191	1.1335	1.1479	1.1621	1.1763	1.1903	3
4	1.0756	1.0903	1.1048	1.1194	1.1338	1.1481	1.1624	1.1765	1.1906	4
5	1.0758	1,0905	1.1051	1.1196	1.1340	1.1483	1.1626	1.1767	1.1908	5
6	1.0761	1.0907	1.1053	1.1198	1.1342	1.1486	1.1628	1.1770	1.1910	6
7	1.0763	1.0910	1.1056	1.1201	1.1345	1.1488	1.1631	1.1772	1.1913	7
8	1.0766	1.0912	1.1058	1.1203	1.1347	1.1491	1.1633	1.1775	1.1915	8
9	1.0768	1.0915	1.1061	1.1206	1.1350	1.1493	1.1635	1.1777	1.1917	9
10	1.0771	1.0917	1.1063	1.1208	1.1352	1.1495	1.1638	1.1779	1.1920	10
11	1.0773	1.0920	1.1065	1.1210	1.1354	1.1498	1.1640	1.1782	1.1922	11
12	1.0775	1.0922	1.1068	1.1213	1.1357	1.1500	1.1642	1.1784	1.1924	12
13	1.0778	1.0924	1.1070	1.1215	1.1359	1.1502	1.1645	1.1786	1.1927	13
14	1.0780	1.0927	1.1073	1.1218	1.1362	1.1505	1.1647	1.1789	1.1929	14
15	1.0783	1.0929	1.1075	1.1220	1.1364	1.1507	1.1650	1.1791	1.1931	15
16	1.0785	1.0932	1.1078	1.1222	1.1366	1.1510	1.1652	1.1793	1.1934	16
17	1.0788	1.0934	1.1080	1.1225	1.1369	1.1512	1.1654	1.1796	1.1936	17
18	1.0790	1.0937	1.1082	1.1227	1.1371	1.1514	1.1657	1.1798	1.1938	18
19	1.0793	1.0939	1.1085	1.1230	1.1374	1.1517	1.1659	1.1800	1.1941	19
20	1.0795	1.0942	1.1087	1.1232	1.1376	1.1519	1.1661	1.1803	1.1943	20
21	1.0797	1,0944	1.1090	1.1234	1.1378	1.1522	1.1664	1.1805	1.1946	21
22	1.0800	1.0946	1.1092	1.1237	1.1381	1.1524	1.1666	1.1807	1.1948	22
23	1.0802	1.0949	1.1094	1.1239	1.1383	1.1526	1.1668	1.1810	1.1950	23
24	1.0805	1.0951	1.1097	1.1242	1.1386	1.1529	1.1671	1.1812	1.1952	24
25	1.0807	1.0954	1.1099	1.1244	1.1388	1.1531	1.1673	1.1814	1.1955	25
26	1.0810	1.0956	1.1102	1.1246	1.1390	1.1533	1.1676	1.1817	1.1957	26
27	1.0812	1.0959	1.1104	1.1249	1.1393	1.1536	1.1678	1.1819	1.1959	27
28	1.0815	1.0961	1.1107	1.1251	1.1395	1.1538	1.1680	1.1821	1.1962	28
29	1,0817	1.0963	1.1109	1.1254	1.1398	1.1541	1.1683	1.1824	1.1964	29
30	1.0820	1.0966	1.1111	1.1256	1.1400	1.1543	1.1685	1.1826	1.1966	30
31	1.0822	1.0968	1.1114	1.1258	1.1402	1.1545	1.1687	1.1829	1.1969	31
32	1.0824	1.0971	1.1116	1.1261	1.1405	1.1548	1.1690	1.1831	1.1971	32
33	1.0827	1.0973	1.1119	1.1263	1.1407	1.1550	1,1692	1.1833	1.1973	33
34	1.0829	1.0976	1.1121	1.1266	1.1409	1.1552	1.1694	1.1836	1.1976	34
35	1.0832	1.0978	1.1123	1.1268	1.1412	1.1555	1.1697	1.1838	1.1978	35
36	1.0834	1.0980	1.1126	1.1271	1.1414	1.1557	1.1699	1.1840	1.1980	36
37	1.0837	1.0983	1.1128	1.1273	1.1417	1.1560	1.1702	1.1843	1.1983	37
38	1.0839	1.0985	1.1131	1.1275	1.1419	1.1562	1.1704	1.1845	1.1985	38
39	1.0841	1.0988	1.1133	1.1278	1.1421	1.1564	1.1706	1.1847	1.1987	39
40	1.0844	1.0990	1.1136	1.1280	1.1424	1.1567	1.1709	1.1850	1.1990	40
41	1.0846	1.0993	1.1138	1.1283	1.1426	1.1569	1.1711	1.1852	1.1992	41
42	1.0849	1.0995	1.1140	1.1285	1.1429	1.1571	1.1713	1.1854	1.1994	42
43	1.0851	1.0997	1.1143	1.1287	1.1431	1.1574	1.1716	1.1857	1.1997	43
44	1.0854	1.1000	1.1145	1.1290	1.1433	1.1576	1.1718	1.1859	1.1999	44
45	1.0856	1.1002	1.1148	1.1292	1.1436	1.1579	1.1720	1.1861	1.2001	45
46	1.0859	1.1005	1.1150	1.1295	1.1438	1.1581	1.1723	1.1864	1.2004	46
47	1.0861	1.1007	1.1152	1.1297	1.1441	1.1583	1.1725	1.1866	1.2006	47
48	1.0863	1.1010	1.1155	1.1299	1.1443	1.1586	1.1727	1.1868	1.2008	48
49	1.0866	1.1012	1.1157	1.1302	1.1445	1.1588	1.1730	1.1871	1.2011	49
50	1.0868	1,1014	1.1160	1.1304	1.1448	1,1590	1.1732	1.1873	1.2013	50
51	1.0871	1.1017	1.1162	1.1307	1.1450	1.1593	1.1735	1.1875	1.2015	51
52	1.0873	1.1019	1.1165	1.1309	1.1452	1.1595	1.1737	1.1878	1.2018	52
53	1.0876	1.1022	1.1167	1.1311	1.1455	1.1598	1.1739	1.1880	1.2020	53
54	1.0878	1.1024	1.1169	1.1314	1.1457	1.1600	1.1742	1.1882	1.2022	54
55	1.0881	1.1027	1.1172	1.1316	1.1460	1.1602	1.1744	1.1885	1.2025	55
56	1.0883	1.1029	1.1174	1.1319	1.1462	1.1605	1.1746	1.1887	1.2027	56
57	1.0885	1.1031	1.1177	1.1321	1.1464	1.1607	1,1749	1.1889	1.2029	57
58	1.0888	1.1034	1.1179	1.1323	1.1467	1.1609	1.1751	1.1892	1.2032	58
59	1.0890	1.1036	1.1181	1.1326	1.1469	1.1612	1.1753	1.1894	1.2034	59
60	1.0893	1.1039	1.1184	1.1328	1.1472	1.1614	1.1756	1.1896	1.2036	60

TABLA DE CUERDAS. Radio = 1

	74°	75°	76°	77°	78°	79°	80°	81°	82°	
0′	1.2036	1.2175	1.2313	1.2450	1.2586	1.2722	1.2856	1.2989	1.3121	0′
1	1.2039	1.2178	1.2316	1.2453	1.2589	1.2724	1.2858	1.2991	1.3123	1
2	1.2041	1.2180	1.2318	1.2455	1.2591	1.2726	1.2860	4.2993	1.3126	2
3	1.2043	1.2182	1.2320	1.2457	1.2593	1.2728	1.2862	1.2996	1.3128	3
4	1.2046	1.2184	1.2322	1.2459	1.2595	1.2731	1.2865	1.2998	1.3130	4
5	1.2048	1.2187	1.2325	1.2462	1.2598	1.2733	1.2867	1.3000	1.3132	5
6	1.2050	1.2189	1.2327	1.2464	1.2600	1.2735	1.2869	1.3002	1.3134	6
7	1.2053	1.2191	1.2329	1.2466	1.2602	1.2737	1.2871	1.3004	1.3137	7
8	1.2055	1.2194	1 2332	1.2468	1.2604	1.2740	1.2874	1.3007	1.3139	8
9	1.2057	1.2196	1.2334	1.2471	1.2607	1.2742	1.2876	1.3009	1.3141	9
10	1.2060	1.2198	1.2336	1,2473	1.2609	1.2744	1.2878	1.3011	1.3143	10
11	1.2062	1.2201	1,2338	1.2475	1.2611	1.2746	1.2880	1.3013	1.3145	11
12	1.2064	1.2203	1.2341	1.2478	1.2614	1.2748	1.2882	1.3015	1.3147	12
13	1.2066	1.2205	1.2343	1.2480	1.2616	1.2751	1.2885	1.3018	1.3150	13
14	1.2069	1.2208	1.2345	1.2482	1.2618	1.2753	1.2887	1.3020	1.3152	14
15	1.2071	1.2210	1.2348	1.2484	1.2620	1.2755	1.2889	1.3022	1.3154	15
16	1.2073	1.2212	1.2350	1.2487	1.2623	1.2757	1.2891	1.3024	1.3156	16
17	1.2076	1.2214	1.2352	1.2489	1.2625	1.2760	1.2894	1.3027	1.3158	17
18	1.2078	1.2217	1.2354	1.2491	1.2627	1.2762	1.2896	1.3029	1.3161	18
19	1.2080	1.2219	1.2357	1.2493	1.2629	1.2764	1.2898	1.3031	1.3163	19
20	1.2083	1.2221	1.2359	1.2496	1.2632	1,2766	1.2900	1.3033	1.3165	20
21	1.2085	1.2224	1.2361	1.2498	1.2634	1.2769	1.2903	1.3035	1.3167	21
22	1.2087	1.2226	1.2364	1.2500	1.2636	1.2771	1.2905	1.3038	1.3169	22
23	1.2090	1.2228	1.2366	1.2503	1.2638	1.2773	1.2907	1.3040	1.3172	23
24	1.2092	1.2231	1.2368	1.2505	1.2641	1.2775	1.2909	1.3042	1.3174	24
25	1.2094	1.2233	1.2370	1.2507	1.2643	1.2778	1.2911	1.3044	1.3176	25
26	1.2097	1.2235	1.2373	1.2509	1.2645	1.2780	1.2914	1.3046	1.3178	26
27	1.2099	1.2237	1.2375	1.2512	1.2648	1.2782	1.2916	1.3049	1.3180	27
28	1.2101	1.2240	1.2377	1.2514	1.2650	1.2784	1.2918	1.3051	1.3183	28
29	1.2104	1.2242	1,2380	1.2516	1.2652	1.2787	1.2920	1.3053	1.3185	29
30	1.2106	1.2244	1.2382	1.2518	1.2654	1.2789	1.2922	1.3055	1.3187	30
31	1.2108	1.2247	1.2384	1.2521	1.2656	1.2791	1.2925	1.3057	1.3189	31
32	1.2111	1.2249	1.2386	1.2523	1.2659	1.2793	1.2927	1.3060	1.3191	32
33	1.2113	1.2251	1.2389	1.2525	1.2661	1.2795	1.2929	1.3062	1.3193	33
34	1.2115	1.2254	1.2391	1.2528	1.2663	1.2798	1.2931	1.3064	1.3196	34
35	1.2117	1.2256	1.2393	1.2530	1.2665	1.2800	1.2934	1.3066	1.3198	35
36	1.2120	1.2258	1.2396	1.2532	1.2668	1.2802	1.2936	1.3068	1.3200	36
37	1.2122	1.2260	1.2398	1.2534	1.2670	1.2804	1.2938	1.3071	1.3202	37
38	1.2124	1.2263	1.2400	1.2537	1.2672	1.2807	1.2940	1.3073	1.3204	38
39	1.2127	1.2265	1.2402	1.2539	1.2674	1.2809	1.2942	1.3075	1.3207	39
40	1,2129	1.2267	1.2405	1.2541	1.2677	1.2811	1.2945	1.3077	1.3209	40
41	1.2131	1.2270	1.2407	1.2543	1.2679	1.2813	1.2947	1.3079	1.3211	41
42	1.2134	1,2272	1.2409	1.2546	1.2681	1.2816	1.2949	1.3082	1.3213	42
43	1.2136	1.2274	1.2412	1 2548	1.2683	1.2818	1.2951	1.3084	1.3215	43
44	1.2138	1.2277	1.2414	1.2550	1.2686	1 2820	1.2954	1.3086	1.3218	44
45	1.2141	1.2279	1.2416	1.2552	1.2688	1.2822	1.2956	1.3088	1.3220	45
46	1.2143	1.2281	1.2418	1.2555	1.2690	1.2825	1.2958	1.3090	1.3222	46
47	1.2145	1.2283	1.2421	1.2557	1.2692	1.2827	1.2960	1.3093	1.3224	47
48	1.2148	1.2286	1.2423	1.2559	1.2695	1.2829	1.2962	1.3095	1.3226	48
49	1.2150	1.2288	1.2425	1.2562	1,2697	1.2831	1.2965	1.3097	1.3228	49
50	1,2152	1.2290	1.2428	1.2564	1.2699	1.2833	1.2967	1.3099	1.3231	50
51	1.2154	1.2293	1.2430	1.2566	1.2701	1.2836	1.2969	1.3101	1.3233	51
52	1.2157	1.2295	1.2432	1.2568	1.2704	1.2838	1.2971	1.3104	1.3235	52
53	1.2159	1.2297	1.2434	1.2571	1.2706	1.2840	1.2973	1.3106	1.3237	53
54	1.2161	1.2299	1.2437	1.2573	1.2708	1.2842	1.2976	1.3108	1.3239	54
55	1.2164	1.2302	1.2439	1.2575	1.2710	1.2845	1.2978	1.3110	1.3242	55
56	1.2166	1.2304	1.2441	1.2577	1.2713	1.2847	1.2980	1.3112	1.3244	56
57	1.2168	1.2306	1.2443	1.2580	1.2715	1.2849	1.2982	1.3115	1.3246	57
58	1.2171	1.2309	1.2446	1.2582	1.2717	1.2851	1.2985	1.3117	1.3248	58
59	1.2173	1.2311	1.2448	1.2584	1.2719	1.2854	1.2987	1.3119	1.3250	59
60	1.2175	1,2313	1.2450	1.2586	1.2722	1.2856	1.2989	1.3121	1.3252	60

TABLA DE CUERDAS. Radio = 1

	83°	84°	85°	86°	87°	88°	89°	
0′	1.3252	1.3383	1.3512	1.3640	1.3767	1.3893	1.4018	0′
1	1.3255	1.3385	1.3514	1.3642	1.3769	1.3895	1.4020	1
2	1.3257	1.3387	1.3516	1.3644	1.3771	1.3897	1.4022	2
3	1.3259	1.3389	1.3518	1.3646	1.3773	1.3899	1.4024	3
4	1.3261	1.3391	1.3520	1.3648	1.3776	1,3902	1.4026	4
5	1.3263	1.3393	1.3523	1.3651	1.3778	1,3904	1.4029	5
6	1.3265	1.3396	1.3525	1.3653	1.3780	1.3906	1.4031	6
7	1.3268	1.3398	1.3527	1.3655	1.3782	1.3908	1.4033	7
8	1.3270	1.3400	1.3529	1.3657	1.3784	1.3910	1.4035	8
9	1.3272	1.3402	1.3531	1.3659	1.3786	1.3912	1.4037	9
10	1.3274	1.3404	1.3533	1.3661	1.3788	1.3914	1.4039	10
11	1.3276	1.3406	1.3535	1.3663	1,3790	1.3916	1.4041	11
12	1.3279	1.3409	1.3538	1.3665	1,3792	1.3918	1.4043	12
13	1.3281	1.3411	1.3540	1.3668	1.3794	1.3920	1.4045	13
14	1.3283	1.3413	1.3542	1.3670	1.3797	1.3922	1.4047	14
15	1.3285	1.3415	1.3544	1.3672	1.3799	1.3925	1.4049	15
16	1.3287	1.3417	1.3546	1.3674	1.3801	1.3927	1.4051	16
17	1.3289	1.3419	1.3548	1.3676	1.3803	1.3929	1.4053	17
18	1.3292	1.3421	1.3550	1.3678	1.3805	1.3931	1.4055	18
19	1.3294	1.3424	1.3552	1.3680	1.3807	1.3933	1.4058	19
20	1.3296	1.3426	1.3555	1.3682	1.3809	1.3935	1.4060	20
21	1.3298	1.3428	1.3557	1.3685	1.3811	1.3937	1.4062	21
22	1.3300	1.3430	1.3559	1.3687	1.3813	1.3939	1.4064	22
23	1.3302	1.3432	1.3561	1.3689	1.3816	1.3941	1.4066	23
24	1.3305	1.3434	1.3563	1.3691	1.3818	1.3943	1.4068	24
25	1.3307	1.3437	1.3565	1.3693	1.3820	1.3945	1.4070	25
26	1.3309	1.3439	1.3567	1.3695	1.3822	1.3947	1.4072	26
27	1.3311	1.3441	1.3570	1.3697	1.3824	1.3950	1.4074	27
28	1.3313	1.3443	1.3572	1.3699	1.3826	1.3952	1.4076	28
29	1.3315	1.3445	1.3574	1.3702	1.3828	1.3954	1.4078	29
30	1.3318	1.3447	1.3576	1,3704	1.3830	1.3956	1.4080	30
31	1.3320	1.3449	1.3578	1.3706	1.3832	1.3958	1.4082	31
32	1.3322	1.3452	1.3580	1.3708	1.3834	1.3960	1.4084	32
33	1.3324	1.3454	1.3582	1.3710	1.3837	1.3962	1.4086	33
34	1.3326	1.3456	1.3585	1.3712	1.3839	1.3964	1.4089	34
35	1.3328	1.3458	1.3587	1.3714	1.3841	1.3966	1.4091	35
36	1.3331	1.3460	1.3589	1.3716	1.3843	1.3968	1.4093	36
37	1.3333	1.3462	1.3591	1.3718	1.3845	1.3970	1.4095	37
38	1.3335	1.3465	1.3593	1.3721	1.3847	1.3972	1.4097	38
39	1.3337	1.3467	1.3595	1.3723	1.3849	1.3975	1.4099	39
40	1.3339	1.3469	1.3597	1.3725	1.3851	1.3977	1.4101	40
41	1.3341	1.3471	1.3599	1.3727	1.3853	1.3979	1.4103	41
42	1.3344	1.3473	1.3602	1.3729	1.3855	1.3981	1.4105	42
43	1.3346	1.3475	1.3604	1.3731	1.3858	1.3983	1.4107	43
44	1.3348	1.3477	1.3606	1.3733	1.3860	1.3985	1.4109	44
45	1.3350	1.3480	1.3608	1.3735	1.3862	1.3987	1.4111	45
46	1.3352	1.3482	1.3610	1.3738	1.3864	1.3989	1.4113	46
47	1.3354	1.3484	1.3612	1.3740	1.3866	1.3991	1.4115	47
48	1.3357	1.3486	1.3614	1.3742	1.3868	1.3993	1.4117	48
49	1.3359	1.3488	1.3617	1.3744	1.3870	1.3995	1.4119	49
50	1.3361	1.3490	1.3619	1.3746	1.3872	1.3997	1.4122	50
51	1.3363	1.3492	1.3621	1.3748	1.3874	1.3999	1.4124	51
52	1.3365	1.3495	1.3623	1.3750	1.3876	1.4002	1.4126	52
53	1.3367	1.3497	1.3625	1.3752	1.3879	1.4004	1.4128	53
54	1.3370	1.3499	1.3627	1.3754	1.3881	1.4006	1.4130	54
55	1.3372	1.3501	1.3629	1.3757	1.3883	1.4008	1.4132	55
56	1.3374	1.3503	1.3631	1.3759	1.3885	1.4010	1.4134	56
57	1.3376	1.3505	1.3634	1.3761	1.3887	1.4012	1.4136	57
58	1.3378	1.3508	1.3636	1.3763	1.3889	1.4014	1.4138	58
59	1.3380	1.3510	1.3638	1.3765	1.3891	1.4016	1.4140	59
60	1.3383	1.3512	1.3640	1.3767	1.3893	1.4018	1.4142	60

TABLA

DE COORDENADAS.

Minutos.	Distancia.	0°		1°		2°		Distancia.	Minutos.
		y	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*		
0′	1	1.00000	0.00000	0.99984	0.01745	0.99939	0.03490	1	60′
	2	2·00000	0,00000	1·99969	0·03490	1·99878	0·06980	2	
	3	3·00000	0·00000	2·99954	0.05235	2·99817	0·10470	3	
	4	4.00000	0·00000	3·99939	0.06980	3·99756	0·13960	4	
	5	5.00000	0.00000	4·99923	0.08726	4.99695	0.17450	5	
	6	6,00000	0.00000	5.99908	0.10471	5.99634	0.20940	6	
	7	7.00000	0.00000	6.99893	0.12216	6.99573	0.24430	7	
	8	8.00000	0.00000	7.99878	0·13961	7.99512	0.27920	8	
	9	9.00000	0.00000	8.99862	0.15707	8.99451	0.31410	9	
15′	1	0.99999	0.00436	0.99976	0.02181	0.99922	0.03925	1	45′
	2	1·99998	0·00872	1·99952	0·04363	1·99845	0.07851	2	
	3	2·99997	0·01308	2·99928	0.06544	2·99768	0.11777	3	
	4	3·99996	0·01745	3·99904	0.08725	3·99691	0.15703	4	
	5	4·99995	0·02181	4.99881	0.10907	4.99614	0.19629	5	
	6	5.99994	0·02617	5.99857	0.13089	5.99537	0.23555	6	
	7	6.99993	0·03054	6.99833	0.15270	6.99460	0.27481	7	
	8	7.99992	0·03490	7.99809	0.17452	7.99383	0.31407	8	
	9	8.99991	0.03926	8.99785	0.19633	8.99306	0.35333	9	
30′	1	0.99996	0.00872	0.99965	0.02617	0.99904	0.04361	1	30′
	2	1·99992	0·01745	1·99931	0·05235	1·99809	0·08723	2	
	3	2·99988	0·02617	2·99897	0·07853	2·99714	0,13085	3	
	4	3·99984	0·03490	3·99862	0·10470	3·99619	0·17447	4	
	5	4.99981	0·04363	4·99828	0.13088	4·99524	0·21809	5	
	6	5·99977	0.05235	5.99794	0.15706	5·99428	0·26171	6	
	7	6·99973	0.06108	6.99760	0.18323	6.99333	0·30533	7	
	8	7·99969	0.06981	7.99725	0.20941	7.99238	0·34895	8	
	9	8.99965	0.07853	8.99691	0.23559	8.99143	0.39257	9	
45′	1	0,99991	0.01308	0.99953	0.03053	0.99884	0.04797	1	15′
	2	1·99982	0·02617	1·99906	0·06107	1·99769	0·09595	2	
	3	2·99974	0·03926	2·99860	0·09161	2·99654	0·14393	3	
	4	3·99965	0·05235	3·99813	0·12215	3·99539	0·19191	4	
	5	4·99957	0·06544	4·99766	0·15269	4·99424	0·23989	5	
	6	5·99948	0·07853	5·99720	0·18323	5·99309	0·28786	6	
	7	6·99940	0·09162	6·99673	0·21376	6·99193	0·33584	7	
	8	7·99931	0·10471	7·99626	0·24430	7·99078	0·38382	8	
	9	8,99922	0·11780	8,99580	0,27484	8·98963	0·43180	9	
Minutos.	Distancia.	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	Distancia.	Minutos.
		89°		88°		87°			

TABLA

DE COORDENADAS.

Minutos.	Distancia.	3°		4°		5°		Distancia.	Minutos.
		y	x	y	x	y	x		
	1	0.99863	0.05233	0.99756	0.06975	0.99619	0.08715	1	
	2	1.99726	0.10467	1.99512	0.13951	1.99238	0.17431	2	
	3	2.99589	0.15700	2.99269	0.20926	2.98858	0.26146	3	
	4	3.99452	0.20934	3.99025	0.27902	3.98477	0.34862	4	
0′	5	4.99315	0.26168	4.98782	0.34878	4.98097	0.43577	5	60′
	6	5.99178	0.31401	5.98538	0.41853	5.97716	0.52293	6	
	7	6.99041	0.36635	6.98294	0.48829	6.97336	0.61008	7	
	8	7.98904	0.41868	7.98051	0.55805	7.96955	0.69724	8	
	9	8,98767	0.47102	8.97807	0.62780	8.96575	0,78440	9	
	1	0.99839	0.05669	0.99725	0.07410	0.99580	0.09150	1	
	2	1.99678	0.11338	1.99450	0.14821	1.99160	0.18300	2	
	3	2.99517	0.17007	2.99175	0.22232	2.98741	0.27450	3	
	4	3.99356	0.22677	3.98900	0.29643	3.98321	0.36600	4	
15′	5	4.99195	0.28346	4.98625	0.37054	4.97902	0.45750	5	45′
	6	5.99035	0.34015	5.98350	0.44465	5.97482	0.54900	6	
	7	6.98874	0.39684	6.98075	0,51875	6.97063	0.64051	7	
	8	7.98713	0.45354	7.97800	0,59286	7.96643	0.73201	8	
	9	8.98552	0,51023	8,97525	0.66697	8.96224	0.82351	9	
	1	0.99813	0.06104	0.99691	0.07845	0.99539	0.09584	1	
	2	1.99626	0.12209	1.99383	0.15691	1.99079	0.19169	2	
	3	2.99440	0.18314	2.99075	0.23537	2.98618	0.28753	3	
	4	3.99253	0.24419	3.98766	0.31383	3.98158	0.38338	4	
30′	5	4.99067	0.30524	4.98458	0.39229	4.97698	0.47922	5	30′
	6	5.98880	0.36629	5.98150	0.47075	5.97237	0.57507	6	
	7	6.98694	0.42733	6.97842	0.54921	6.96777	0.67092	7	
	8	7.98507	0.48838	7.97533	0.62767	7.96316	0.76676	8	
	9	8,98321	0,54943	8,97225	0.70613	8.95856	0.86261	9	
	1	0.99785	0.06540	0.99656	0.08280	0.99496	0.10018	1	
	2	1.99571	0.13080	1.99313	0.16561	1.98993	0.20037	2	
	3	2.99357	0.19620	2.98969	0.24842	2.98490	0.30056	3	
	4	3.99143	0.26161	3.98626	0.33123	3.97987	0.40075	4	
45′	5	4.98929	0.32701	4.98282	0.41404	4.97484	0.50094	5	15′
	6	5.98715	0.39241	5.97939	0.49684	5.96981	0.60112	6	
	7	6.98501	0.45782	6.97595	0.57965	6.96477	0.70131	7	
	8	7.98287	0.52322	7.97252	0.66246	7,95974	0.80150	8	
	9	8.98073	0.58862	8.96908	0.74527	8.95471	0.90169	9	
		x	y	x	y	x	y		
Minutos.	Distancia.	86°		85°		84°		Distancia.	Minutos.

TABLA
DE COORDENADAS.

Minutos.	Distancia.	6° y	6° x	7° y	7° x	8° y	8° x	Distancia.	Minutos.
	1	0.99452	0.10452	0.99254	0.12186	0.99026	0.13917	1	
	2	1.98904	0.20905	1.98509	0.24273	1.98053	0.27834	2	
	3	2.98356	0.31358	2.97763	0.36560	2.97080	0.41751	3	
	4	3.97808	0.41811	3.97018	0.48747	3.96107	0.55669	4	
0′	5	4.97261	0.52264	4.96273	0.60934	4.95134	0.69586	5	60′
	6	5.96713	0.62717	5.95519	0.73121	5.94160	0.83503	6	
	7	6.96165	0.73169	6.94782	0.85308	6.93187	0.97421	7	
	8	7.95617	0.88622	7.94038	0.97495	7.92214	1.11338	8	
	9	8.95069	0.94075	8.93291	1.09682	8.91241	1.25255	9	
	1	0.99405	0.10886	0.99200	0.12619	0.98965	0,14349	1	
	2	1.98811	0.21773	1.98400	0.25239	1.97930	0.28698	2	
	3	2.98216	0.32660	2.97601	0.37859	2.96895	0.43047	3	
	4	3.97622	0.43546	3.96801	0.50479	3.95860	0.57397	4	
15′	5	4.97028	0.54433	4.96002	0.63099	4.94825	0.71746	5	45′
	6	5.96433	0.65320	5.95202	0.75719	5.93790	0.86095	6	
	7	6.95839	0.76206	6.94403	0.88339	6.92755	1.00444	7	
	8	7.95245	0.87093	7.93603	1.00959	7.91721	1.14794	8	
	9	8.94650	0.97980	8.92804	1.13579	8.90686	1.29143	9	
	1	0.99357	0.11320	0.99144	0.13052	0.98901	0.14780	1	
	2	1.98714	0.22640	1.98288	0.26105	1.97803	0.29561	2	
	3	2.98071	0.33960	2.97433	0.39157	2.96704	0.44342	3	
	4	3.97428	0.45281	3.96577	0.52210	3.95606	0.59123	4	
30′	5	4.96786	0.56601	4.95722	0.65263	4.94508	0.73904	5	30′
	6	5.96143	0.67921	5.94866	0.78315	5.93409	0.88685	6	
	7	6.95500	0.79242	6.94011	0.91368	6.92311	1.03466	7	
	8	7.94857	0.90562	7.93155	1.04420	7.91212	1.18247	8	
	9	8.94214	1.01882	8.92300	1.17473	8.90114	1.33028	9	
	1	0.99306	0.11753	0.99086	0.13485	0.98836	0.15212	1	
	2	1.98613	0.23507	1.98173	0.26970	1.97672	0.30424	2	
	3	2.97920	0.35261	2.97259	0.40455	2.96508	0.45637	3	
	4	3 97227	0.47014	3.96346	0.53940	3.95344	0.60849	4	
45′	5	4.96534	0.58768	4.95432	0.67425	4.94180	0.76061	5	15′
	6	5.95841	0.70522	5.94519	0.80910	5.93016	0.91274	6	
	7	6.95147	0.82276	6.93606	0.94395	6.91853	1.06486	7	
	8	7.94454	0.94029	7.92692	1.07880	7.90689	1.21698	8	
	9	8.93761	1.05783	8.91779	1.21365	8.89525	1.36911	9	
Minutos.	Distancia.	83° x	83° y	82° x	82° y	81° x	81° y	Distancia.	Minutos.

TABLA
DE COORDENADAS.

Minutos.	Distancia.	9° y	9° x	10° y	10° x	11° y	11° x	Distancia.	Minutos.
	1	0.98768	0.15643	0.98480	0.17364	0.98162	0.19081	1	
	2	1.97537	0.31286	1.96961	0.34729	1.96325	0.38162	2	
	3	2.96306	0.46930	2.95442	0.52094	2.94488	0.57243	3	
	4	3.95075	0.62573	3.93923	0.69459	3.92650	0.76324	4	
0′	5	4.93844	0.78217	4.92403	0.86824	4.90813	0.95405	5	60′
	6	5.92612	0.93860	5.90884	1.04188	5.88976	1.14486	6	
	7	6.91381	1.09504	6 89365	1.21553	6.87139	1.33566	7	
	8	7.90150	1.25147	7.87846	1.38918	7.85301	1.52648	8	
	9	8.88919	1.40791	8.86327	1,56283	8.83464	1.71729	9	
	1	0.98699	0.16074	0.98404	0.17794	0.98078	0.19509	1	
	2	1.97399	0.32148	1.96808	0.35588	1.96157	0.39018	2	
	3	2.96098	0.48222	2.95212	0.53383	2.94235	0.58527	3	
	4	3.94798	0.64297	3.93616	0.71177	3.92314	0.78036	4	
15′	5	4.93498	0.80371	4.92020	0.88971	4.90392	0.97545	5	45′
	6	5.92197	0.96445	5.90424	1.06766	5.88471	1.17054	6	
	7	6.90897	1.12519	6.88828	1.24560	6.86549	1.36563	7	
	8	7.89597	1.28594	7.87232	1.42354	7.84628	1.56072	8	
	9	8.88296	1.44668	8.85636	1.60149	8.82706	1.75581	9	
	1	0.98628	0.16504	0.98325	0.18223	0.97992	0.19936	1	
	2	1.97257	0.33009	1.96650	0.36447	1.95984	0.39873	2	
	3	2.95885	0.49514	2.94976	0.54670	2.93977	0.59810	3	
	4	3:94514	0.66019	3.93301	0.72894	3.91969	0.79747	4	
30′	5	4.93142	0.82523	4.91627	0.91117	4.89962	0.99683	5	30′
	6	5.91771	0.99028	5.89952	1.09341	5.87954	1.19620	6	
	7	6.90399	1.15533	6.88278	1.27564	6.85947	1.39557	7	
	8	7.89028	1.32038	7.86603	1.45788	7.83939	1.59494	8	
	9	8.87657	1,48542	8.84929	1.64011	8.81932	1.79431	9	
	1	0.98555	0.16935	0.98245	0.18652	0.97904	0.20364	1	
	2	1.97111	0.33870	1.96490	0.37304	1.95809	0.40728	2	
	3	2.95666	0.50805	2.94735	0.55957	2.93713	0.61092	3	
	4	3.94222	0.67740	3.92980	0.74609	3.91618	0.81456	4	
45′	5	4.92778	0.84675	4.91225	0.93262	4.89522	1.01820	5	15′
	6	5.91333	1.01610	5.89470	1.11914	5.87427	1.22185	6	
	7	6.89889	1.18545	6.87715	1.30566	6.85331	1.42549	7	
	8	7.88444	1.35480	7.85960	1.49219	7.83236	1.62913	8	
	9	8.87000	1.52415	8.84205	1.67871	8.81140	1,83277	9	
Minutos.	Distancia.	x	y	x	y	x	y	Distancia.	Minutos.
		80°		79°		78°			

TABLA

DE COORDENADAS.

Minutos.	Distancia.	12°		13°		14°		Distancia.	Minutos.
		y	x	y	x	y	x		
	1	0.97814	0.20791	0.97437	0.22495	0.97029	0.24192	1	
	2	1.95629	0.41582	1.94874	0.44990	1.94059	0.48384	2	
	3	2.93444	0.62373	2.92311	0.67485	2.91088	0.72576	3	
	4	3.91259	0.83164	3.89748	0.89980	3.88118	0.96768	4	
0′	5	4.89073	1.03955	4.87185	1.12475	4.85147	1.20961	5	60′
	6	5.86888	1.24747	5.84622	1.34970	5.82177	1.45153	6	
	7	6.84703	1.45538	6.82059	1.57465	6.79206	1.69345	7	
	8	7.82518	1.66329	7.79496	1.79960	7.76236	1.93537	8	
	9	8.80332	1.87120	8.76933	2.02455	8.73266	2.17729	9	
	1	0.97723	0.21217	0.97337	0.22920	0.96923	0.24615	1	
	2	1.95446	0.42435	1.94675	0.45840	1.93846	0.49230	2	
	3	2.93169	0.63653	2.92013	0.68760	2.90769	0.73845	3	
	4	3.90892	0.84871	3.89351	0.91680	3.87692	0.98461	4	
15′	5	4.88615	1.06088	4.86689	1.14600	4.84615	1.23076	5	45′
	6	5.86338	1.27306	5.84027	1.37520	5.81538	1.47691	6	
	7	6.84061	1.48524	6.81365	1.60440	6.78461	1.72307	7	
	8	7.81784	1.69742	7.78703	1.83360	7.75384	1.96922	8	
	9	8.79507	1.90959	8.76041	2.06280	8.72307	2.21537	9	
	1	0.97629	0.21644	0.97237	0.23344	0.96814	0.25038	1	
	2	1.95259	0.43288	1.94474	0.46689	1.93629	0.50076	2	
	3	2.92888	0.64932	2.91711	0.70033	2.90444	0.75114	3	
	4	3.90518	0.86576	3.88948	0.93378	3.87259	1.00152	4	
30′	5	4.88148	1.08220	4.86185	1.16722	4.84073	1.25190	5	30′
	6	5.85777	1.29864	5.83422	1.40067	5.80888	1.50228	6	
	7	6.83407	1.51508	6.80659	1.63411	6.77703	1.75266	7	
	8	7.81036	1.73152	7.77896	1.86756	7.74518	2.00304	8	
	9	8.78666	1.94796	8.75133	2.10100	8,71332	2.25342	9	
	1	0.97534	0.22069	0.97134	0.23768	0.96704	0.25460	1	
	2	1.95068	0.44139	1.94268	0.47537	1.93409	0.50920	2	
	3	2.92602	0.66209	2.91402	0.71305	2.90113	0.76380	3	
	4	3.90136	0.88278	3.88536	0.95074	3.86818	1.01840	4	
45′	5	4.87671	1.10348	4.85671	1.18843	4.83523	1.27301	5	15′
	6	5.85205	1.32418	5.82805	1.42611	5,80227	1.52761	6	
	7	6.82739	1.54488	6.79939	1.66380	6.76932	1.78221	7	
	8	7.80273	1.76557	7.77073	1.90148	7.73636	2:03681	8	
	9	8.77808	1.98627	8.74207	2.13917	8.70341	2.29141	9	
Minutos.	Distancia.	x	y	x	y	x	y	Distancia.	Minutos.
		77°		76°		75°			

TABLA

DE COORDENADAS.

Minutos.	Distancia.	15°		16°		17°		Distancia.	Minutos.
		y	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*		
	1	0.96592	0.25881	0.96126	0.27563	0.95630	0.29237	1	
	2	1.93185	0.51763	1.92252	0.55127	1.91260	0.58474	2	
	3	2.89777	0.77645	2.88378	0.82691	2.86891	0.87711	3	
	4	3.86370	1.03527	3.84504	1.10254	3.82521	1.16948	4	
0′	5	4.82962	1.29409	4.80630	1.37818	4.78152	1.46185	5	60′
	6	5.79555	1.55291	5.76757	1.65382	5.73782	1.75423	6	
	7	6.76148	1.81173	6.72883	1.92946	6.69413	2.04660	7	
	8	7.72740	2.07055	7.69009	2.20509	7.65043	2.33897	8	
	9	8.69333	2.32937	8.65135	2.48073	8.60674	2,63134	9	
	1	0.96478	0.26303	0.96005	0.27982	0.95502	0.29654	1	
	2	1.92957	0.52606	1.92010	0.55965	1.91004	0.59308	2	
	3	2.89436	0.78909	2.88015	0.83948	2.86506	0.88962	3	
	4	3.85914	1.05212	3.84020	1.11931	3.82008	1.18616	4	
15′	5	4.82393	1.31515	4.80025	1.39914	4.77510	1.48270	5	45′
	6	5.78872	1.57818	5.76030	1.67897	5.73012	1.77924	6	
	7	6.75351	1.84121	6.72035	1.95880	6.68514	2.07579	7	
	8	7.71829	2.10424	7.68040	2.23863	7.64016	2.37233	8	
	9	8.68308	2.36728	8,64045	2.51846	8.59518	2.66887	9	
	1	0.96363	0.26723	0.95882	0.28401	0,95371	0.30070	1	
	2	1.92726	0.53447	1.91764	0.56803	1.90743	0.60141	2	
	3	2.89089	0.80171	2.87646	0.85204	2.86115	0.90211	3	
	4	3.85452	1.06895	3.83528	1.13606	3.81486	1.20282	4	
30′	5	4.81815	1.33619	4.79410	1.42007	4.76858	1.50352	5	30′
	6	5.78178	1.60343	5.75292	1.70409	5.72230	1.80423	6	
	7	6.74541	1.87066	6.71174	1.98810	6.67601	2.10494	7	
	8	7.70904	2.13790	7.67056	2.27212	7.62973	2.40564	8	
	9	8.67267	2.40514	8.62938	2.55613	8.58345	2.70635	9	
	1	0.96245	0.27144	0.95757	0.28819	0.95239	0.30486	1	
	2	1.92491	0.54288	1.91514	0.57639	1.90479	0.60972	2	
	3	2.88736	0.81432	2.87271	0.86458	2.85718	0.91449	3	
	4	3.84982	1.08576	3.83028	1.15278	3.80958	1.21945	4	
45′	5	4.81227	1.35720	4.78785	1.44098	4.76197	1.52432	5	15′
	6	5.77473	1.62864	5.74542	1.72917	5.71437	1.82918	6	
	7	6.73718	1.90008	6.70299	2.01737	6.66677	2.13405	7	
	8	7.69964	2.17152	7.66057	2.30557	7.61916	2.43891	8	
	9	8.66209	2.44296	8.61814	2.59376	8.57156	2.74377	9	
Minutos.	Distancia.	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	Distancia.	Minutos.
		74°		73°		72°			

TABLA

DE COORDENADAS.

Minutos.	Distancia.	18° y	18° x	19° y	19° x	20° y	20° x	Distancia.	Minutos.
	1	0.95105	0.30901	0.94551	0.32556	0.93969	0.34202	1	
	2	1.90211	0.61803	1.89103	0.65113	1.87938	0.68404	2	
	3	2.85316	0.92705	2.83655	0.97670	2.81907	1.02606	3	
	4	3.80422	1.23606	3.78207	1.30227	3.75877	1.36808	4	
0′	5	4.75528	1.54508	4.72759	1.62784	4.69846	1.71010	5	60′
	6	5.70633	1.85410	5.67311	1.95340	5.63815	2.05212	6	
	7	6.65739	2.16311	6.61863	2.27897	6.57784	2.39414	7	
	8	7.60845	2.47213	7.56414	2.60454	7.51754	2.73616	8	
	9	8.55950	2.78115	8.50966	2.93011	8.45723	3.07818	9	
	1	0.94969	0.31316	0.94408	0.32969	0.93819	0.34611	1	
	2	1.89939	0.62632	1.88817	0.65938	1.87638	0.69223	2	
	3	2.84909	0.93949	2.83226	0.98907	2.81457	1.03835	3	
	4	3.79879	1.25265	3.77635	1.31876	3.75276	1.38446	4	
15′	5	4.74849	1.56581	4.72044	1.64845	4.69095	1.73058	5	45′
	6	5.69819	1.87898	5.66453	1.97814	5.62914	2.07670	6	
	7	6.64789	2.19214	6.60862	2.30783	6.56733	2.42281	7	
	8	7.59759	2.50531	7.55271	2.63752	7.50553	2.76893	8	
	9	8.54729	2.81847	8.49680	2.96721	8.44372	3.11505	9	
	1	0.94832	0.31730	0.94264	0.33380	0.93667	0.35020	1	
	2	1.89664	0.63460	1.88528	0.66761	1.87334	0.70041	2	
	3	2.84497	0.95191	2.82792	1.00142	2.81001	1.05062	3	
	4	3.79329	1.26921	3.77056	1.33522	3.74668	1.40082	4	
30′	5	4.74161	1.58652	4.71320	1.66903	4.68336	1.75103	5	30′
	6	5.68994	1.90382	5.65584	2.00284	5.62003	2.10124	6	
	7	6.63826	2.22113	6.59849	2.33664	6.55670	2.45145	7	
	8	7.58658	2.53843	7.54113	2.67045	7.49337	2.80165	8	
	9	8.53491	2.85574	8.48377	3.00426	8.43004	3.15186	9	
	1	0.94693	0.32143	0.94117	0.33791	0.93513	0.35429	1	
	2	1.89386	0.64287	1.88235	0.67583	1.87027	0.70858	2	
	3	2.84079	0.96431	2.82352	1.01375	2.80540	1.06287	3	
	4	3.78772	1.28575	3.76470	1.35166	3.74054	1.41716	4	
45′	5	4.73465	1.60719	4.70588	1.68958	4.67567	1.77145	5	15′
	6	5.68158	1.92863	5.64705	2.02750	5.61081	2.12574	6	
	7	6.62851	2.25007	6.58823	2.36541	6.54594	2.48003	7	
	8	7.57544	2.57151	7.52940	2.70333	7.48108	2.83432	8	
	9	8.52237	2.89295	8.47058	3.04125	8.41621	3.18861	9	
Minutos.	Distancia.	x	y	x	y	x	y	Distancia.	Minutos.
		71°		70°		69°			

TABLA
DE COORDENADAS.

Minutos.	Distancia.	21°		22°		23°		Distancia.	Minutos.
		y	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*		
	1	0.93358	0.35836	0.92718	0.37460	0.92050	0.39073	1	
	2	1.86716	0.71673	1.85436	0.74921	1.84100	0.78146	2	
	3	2.80074	1.07510	2.78155	1.12381	2.76151	1.17219	3	
	4	3.73432	1.43347	3.70873	1.49842	3.68201	1.56292	4	
0′	5	4.66790	1.79183	4.63591	1.87303	4.60252	1.95365	5	60′
	6	5.60148	2.15020	5.56310	2.24763	5.52302	2.34438	6	
	7	6.53506	2.50857	6.49028	2.62224	6.44353	2.73511	7	
	8	7.46864	2.86694	7.41747	2.99685	7.36403	3.12584	8	
	9	8.40222	3.22531	8.34465	3.37145	8.28454	3.51657	9	
	1	0.93200	0.36243	0.92554	0.37864	0.91879	0.39474	1	
	2	1.86401	0.72487	1.85108	0.75729	1.83758	0.78948	2	
	3	2.79602	1.08731	2.77662	1.13594	2.75637	1.18423	3	
	4	3.72803	1.44975	3.70216	1.51459	3.67516	1.57897	4	
15′	5	4.66004	1.81219	4.62770	1.89324	4.59395	1.97372	5	45′
	6	5.59204	2.17462	5.55324	2.27189	5.51274	2.36846	6	
	7	6.52405	2.53706	6.47878	2.65054	6.43153	2.76320	7	
	8	7.45606	2.89950	7.40432	3.02918	7.35032	3.15795	8	
	9	8.38807	3.26194	8.32986	3.40783	8.26912	3.55269	9	
	1	0.93041	0.36650	0.92388	0.38268	0.91706	0.39874	1	
	2	1.86083	0.73300	1.84776	0.76536	1.83412	0.79749	2	
	3	2.79125	1.09950	2.77164	1.14805	2.75118	1.19624	3	
	4	3.72167	1.46600	3.69552	1.53073	3.66824	1.59499	4	
30′	5	4.65208	1.83250	4.61940	1.91341	4.58530	1.99374	5	30′
	6	5.58250	2.19900	5.54328	2.29610	5.50236	2.39249	6	
	7	6.51292	2.56550	6.46716	2.67878	6.41942	2,79124	7	
	8	7.44334	2.93200	7.39104	3.06146	7.33648	3.18999	8	
	9	8.37375	3.29851	8.31492	3.44415	8.25354	3.58874	9	
	1	0.92881	0.37055	0.92220	0.38671	0.91531	0.40274	1	
	2	1.85762	0.74111	1.84440	0.77342	1.83062	0.80549	2	
	3	2.78643	1.11167	2.76660	1.16013	2.74593	1.20824	3	
	4	3.71524	1.48222	3.68880	1.54684	3.66124	1.61098	4	
45′	5	4.64405	1.85278	4.61100	1.93355	4.57655	2.01373	5	15′
	6	5.57286	2.22334	5.53320	2.32026	5.49186	2.41648	6	
	7	6.50167	2.59390	6.45540	2.70697	6.40718	2.81922	7	
	8	7.43048	2.96445	7.37760	3.09368	7.32249	3.22197	8	
	9	8.35929	3.33501	8.29980	3.48039	8.23780	3.62472	9	
Minutos.	Distancia.	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	Distancia.	Minutos.
		68°		67°		66°			

TABLA
DE COORDENADAS.

Minutos.	Distancia.	24°		25°		26°		Distancia.	Minutos.
		y	x	y	x	y	x		
	1	0.91354	0.40673	0.90630	0.42261	0.89879	0.43837	1	
	2	1.82709	0.81347	1.81261	0.84523	1.79758	0.87674	2	
	3	2.74063	1.22020	2.71892	1.26785	2.69638	1.31511	3	
	4	3.65418	1.62694	3.62523	1.69047	3.59517	1.75348	4	
0′	5	4.56772	2.03368	4.53153	2.11309	4.49397	2.19185	5	60′
	6	5.48127	2.44041	5.43784	2.53570	5.39276	2.63022	6	
	7	6.39481	2.84715	6.34415	2.95832	6.29155	3.06859	7	
	8	7.30836	3.25389	7.25046	3.38094	7.19035	3.50696	8	
	9	8.22190	3.66062	8.15677	3.80356	8,08914	3.94533	9	
	1	0.91176	0.41071	0.90445	0.42656	0.89687	0.44228	1	
	2	1.82352	0.82143	1.80891	0.85313	1.79374	0.88457	2	
	3	2.73528	1.23215	2.71336	1.27970	2.69061	1.32686	3	
	4	3.64704	1.64287	3.61782	1.70627	3.58749	1.76915	4	
15′	5	4.55881	2.05359	4.52227	2.13284	4.48436	2.21144	5	45′
	6	5.47057	2.46431	5.42673	2.55941	5.38123	2.65373	6	
	7	6.38233	2.87503	6.33118	2.98598	6.27810	3.09602	7	
	8	7.29409	3.28575	7.23564	3.41254	7.17498	3.53830	8	
	9	8.20585	3.69647	8.14009	3.83911	8.07185	3.98059	9	
	1	0.90996	0.41469	0.90258	0.43051	0.89493	0.44619	1	
	2	1.81992	0.82938	1.80517	0.86102	1.78986	0.89239	2	
	3	2.72988	1.24407	2.70775	1.29153	2.68480	1.33859	3	
	4	3.63984	1.65877	3.61034	1.72204	3.57973	1.78479	4	
30′	5	4.54980	2.07346	4.51292	2.15255	4.47467	2.23098	5	30′
	6	5.45976	2.48815	5.41551	2.58306	5.36960	2.67718	6	
	7	6.36972	2.90285	6.31809	3.01357	6.26454	3.12338	7	
	8	7.27969	3.31754	7.22068	3.44408	7.15947	3.56958	8	
	9	8.18965	3.73223	8.12326	3.87459	8.05440	4.01578	9	
	1	0.90814	0.41866	0.90069	0.43444	0.89297	0.45009	1	
	2	1.81628	0.83732	1.30139	0.86889	1.78595	0.90019	2	
	3	2.72442	1.25598	2.70209	1.30333	2.67893	1.35029	3	
	4	3.63257	1.67464	3.60279	1.73778	3.57191	1.80039	4	
45′	5	4.54071	2.09330	4.50349	2.17222	4.46489	2.25049	5	15′
	6	5.44885	2.51196	5.40418	2.60667	5.35787	2.70059	6	
	7	6.35700	2.93062	6.30488	3.04111	6.25085	3.15068	7	
	8	7.26514	3,34928	7.20558	3.47556	7.14383	3.60078	8	
	9	8.17328	3.76794	8.10628	3.91000	8.03681	4.05088	9	
Minutos.	Distancia.	x	y	x	y	x	y	Distancia.	Minutos.
		65°		64°		63°			

TABLA

DE COORDENADAS.

Minutos.	Distancia.	27°		28°		29°		Distancia.	Minutos.
		y	x	y	x	y	x		
	1	0.89100	0.45399	0.88294	0.46947	0.87462	0.48481	1	
	2	1.78201	0.90798	1.76589	0.93894	1.74924	0.96962	2	
	3	2.67301	1.36197	2.64884	1.40841	2.62386	1.45443	3	
	4	3.56402	1.81596	3.53179	1.87788	3.49848	1.93924	4	
0′	5	4.45503	2.26995	4.41473	2.34735	4.37310	2.42405	5	60′
	6	5 34603	2.72394	5.29768	2.81682	5.24772	2.90886	6	
	7	6.23704	3.17793	6.18063	3.28630	6.12234	3.39367	7	
	8	7.12805	3,63193	7.06358	3.75577	6.99696	3.87848	8	
	9	8.01905	4.08591	7.94652	4.22524	7.87156	4.36329	9	
	1	0.88901	0.45787	0.88089	0.47332	0.87249	0.48862	1	
	2	1.77803	0.91574	1.76178	0.94664	1.74499	0.97724	2	
	3	2.66705	1.37362	2.64267	1.41996	2.61748	1.46566	3	
	4	3.55606	1.83149	3.52356	1.89328	3.48998	1.95448	4	
15′	5	4.44508	2.28937	4.40445	2.36660	4.36248	2.44310	5	45′
	6	5.33410	2.74724	5.28534	2.83992	5.23497	2.93172	6	
	7	6.22311	3.20511	6.16623	3.31324	6.10747	3.42034	7	
	8	7.11213	3.66299	7.04712	3.78656	6.97996	3.90896	8	
	9	8.00115	4.12086	7.92801	4.25988	7.85246	4.39759	9	
	1	0.88701	0.46174	0,87881	0.47715	0.87035	0.49242	1	
	2	1.77402	0.92349	1.75763	0.95431	1.74071	0.98484	2	
	3	2.66103	1.38524	2.63645	1.43147	2.61106	1.47727	3	
	4	3.54804	1.84699	3.51526	1.90863	3.48142	1.96969	4	
30′	5	4.43505	2.30874	4.39408	2.38579	4.35177	2.46211	5	30′
	6	5.32206	2.77049	5.27290	2.86295	5.22213	2.95454	6	
	7	6.20907	3.23224	6.15171	3.34011	6.09248	3.44696	7	
	8	7.09608	3.69398	7.03053	3.81727	6.96284	3.93938	8	
	9	7.98309	4,15573	7.90935	4.29442	7.83320	4.43181	9	
	1	0.88498	0.46561	0.87672	0.48098	0.86819	0.49621	1	
	2	1.76997	0.93122	1.75345	0.96197	1.73639	0.99243	2	
	3	2,65496	1.39684	2.63018	1.44296	2.60459	1.48864	3	
	4	3.53995	1.86245	3.50690	1.92395	3.47279	1.98486	4	
45′	5	4.42493	2.32807	4.38363	2.40494	4.34099	2.48108	5	15′
	6	5.30992	2.79368	5.26036	2.88593	5.20919	2.97729	6	
	7	6.19491	3.25930	6.13708	3.36692	6.07739	3.47351	7	
	8	7.07990	3.72491	7.01381	3.84791	6.94559	3.96973	8	
	9	7.96488	4.19053	7.89054	4.32889	7.81378	4.46594	9	
Minutos.	Distancia.	x	y	x	y	x	y	Distancia.	Minutos.
		62°		61°		60°			

TABLA

DE COORDENADAS.

Minutos.	Distancia.	30° y	30° x	31° y	31° x	32° y	32° x	Distancia.	Minutos.
	1	0.86602	0,50000	0.85716	0.51503	0,84804	0,52991	1	
	2	1.73205	1.00000	1.71433	1.03007	1.69609	1.05983	2	
	3	2.59807	1.50000	2.57150	1.54511	2.54414	1.58975	3	
	4	3.46410	2.00000	3.42866	2.06015	3.39219	2.11967	4	
0′	5	4.33012	2.50000	4.28583	2.57519	4.24024	2.64959	5	60′
	6	5.19615	3.00000	5.14300	3.09022	5.08828	3.17951	6	
	7	6.06217	3.50000	6.00017	3.60526	5.93633	3.70943	7	
	8	6.92820	4.00000	6.85733	4.12030	6.78438	4.23935	8	
	9	7.79422	4.50000	7.71450	4.63534	7.63243	4.76927	9	
	1	0.86383	0.50377	0.85491	0.51877	0.84572	0.53361	1	
	2	1.72767	1.00754	1.70982	1.03754	1.69145	1.06722	2	
	3	2.59150	1.51132	2.56473	1.55631	2.53718	1.60084	3	
	4	3.45534	2.01509	3.41964	2.07509	3.38291	2.13445	4	
15′	5	4.31917	2.51887	4.27456	2.59386	4.22863	2.66807	5	45′
	6	5.18301	3.02264	5.12947	3.11263	5.07436	3.20168	6	
	7	6.04684	3.52641	5.98438	3.63141	5.92009	3.73530	7	
	8	6.91068	4.03019	6.83929	4.15018	6.76582	4.26891	8	
	9	7.77451	4.53396	7.69420	4.66895	7.61155	4.80253	9	
	1	0.86162	0.50753	0.85264	0.52249	0.84339	0.53730	1	
	2	1.72325	1.01507	1.70528	1.04499	1.68678	1.07460	2	
	3	2.58488	1.52261	2.55792	1.56749	2.53017	1.61190	3	
	4	3.44651	2.03015	3.41056	2.08999	3.37356	2.14920	4	
30′	5	4.30814	2.53769	4.26320	2.61249	4.21695	2.68650	5	30′
	6	5.16977	3.04523	5.11584	3.13499	5.06034	3.22380	6	
	7	6.03140	3.55276	5.96948	3.65749	5.90373	3.76110	7	
	8	6.89303	4.06030	6.82112	4.17998	6.74713	4.29840	8	
	9	7.75466	4.56784	7.67376	4.70248	7.59052	4.83570	9	
	1	0.85940	0.51129	0.85035	0.52621	0.84103	0.54097	1	
	2	1.71881	1.02258	1.70070	1.05242	1.68207	1.08194	2	
	3	2.57821	1.53387	2.55105	1.57864	2.52311	1.62292	3	
	4	3.43762	2.04517	3.40140	2.10485	3.36415	2.16389	4	
45′	5	4.29703	2.55646	4.25176	2.63107	4.20519	2.70487	5	15′
	6	5.15643	3.06775	5.10211	3.15728	5.04623	3.24584	6	
	7	6.01584	3.57905	5.95246	3.68349	5.88827	3.78682	7	
	8	6.87525	4.09034	6.80281	4.20971	6.72831	4.32779	8	
	9	7.73465	4.60163	7.65316	4.73592	7.56935	4.86877	9	
Minutos.	Distancia.	59° x	59° y	58° x	58° y	57° x	57° y	Distancia.	Minutos.

TABLA
DE COORDENADAS.

Minutos.	Distancia.	33° y	33° x	34° y	34° x	35° y	35° x	Distancia.	Minutos.
	1	0,83867	0.54463	0.82903	0.55919	0.81915	0.57357	1	
	2	1.67734	1.08927	1.65807	1.11838	1.63830	1.14715	2	
	3	2.51601	1.63391	2.48711	1.67757	2.45745	1.72072	3	
	4	3.35468	2.17855	3.31615	2.23677	3.27660	2.29430	4	
0′	5	4.19335	2.72319	4.14518	2.79596	4.09576	2.86788	5	60′
	6	5.03202	3.26783	4.97422	3.35515	4.91491	3.44145	6	
	7	5.87069	3.81247	5.80326	3.91435	5.73406	4.01503	7	
	8	6.70936	4.35711	6.63230	4.47354	6.55321	4.58861	8	
	9	7.54803	4.90175	7.46133	5.03273	7.37236	5.16218	9	
	1	0.83628	0.54829	0.82659	0.56280	0.81664	0.57714	1	
	2	1.67257	1.09658	1.65318	1.12560	1.63328	1.15429	2	
	3	2.50885	1.64487	2.47977	1.68841	2.44992	1.73143	3	
	4	3.34514	2.19317	3.30636	2.25121	3.26656	2.30858	4	
15′	5	4.18143	2.74146	4.13295	2.81402	4.08320	2.88572	5	45′
	6	5.01771	3.28975	4.95954	3.37682	4.89984	3.46287	6	
	7	5.85400	3.83805	5.78613	3.93963	5.71649	4.04001	7	
	8	6.69028	4.38634	6.61272	4.50243	6.53313	4.61716	8	
	9	7.52657	4.93463	7.43931	5.06524	7.34977	5.19430	9	
	1	0.83388	0.55193	0.82412	0.56640	0.81411	0.58070	1	
	2	1.66777	1.10387	1.64825	1.13281	1.62823	1.16140	2	
	3	2.50165	1.65581	2.47237	1 69921	2.44234	1.74210	3	
	4	3.33554	2.20774	3.29650	2.26562	3.25646	2.32281	4	
30′	5	4.16942	2.75968	4.12063	2.83203	4.07057	2.90351	5	30′
	6	5.00331	3.31162	4.94475	3.39843	4.88469	3.48421	6	
	7	5.83720	3.86355	5.76888	3.96484	5.69880	4.06492	7	
	8	6.67108	4.41549	6.59300	4.53124	6.51292	4.64562	8	
	9	7.50497	4.96743	7,41713	5.09765	7.32703	5.22632	9	
	1	0.83147	0.55557	0.82164	0.56999	0.81157	0.58425	1	
	2	1.66294	1.11114	1.64329	1.13999	1.62314	1.16850	2	
	3	2.49441	1.66671	2.46494	1.70999	2.43472	1.75275	3	
	4	3.32588	2.22228	3.28658	2.27998	3.24629	2.33700	4	
45′	5	4.15735	2.77785	4.10823	2.84998	4.05787	2.92125	5	15′
	6	4.98882	3.33342	4.92988	3.41998	4.86944	3.50550	6	
	7	5.82029	3.88899	5.75152	3.98997	5.68101	4.08975	7	
	8	6.65176	4.44456	6.57317	4.55997	6.49260	4.67400	8	
	9	7.48323	5.00013	7.39482	5.12997	7.30416	5.25825	9	
Minutos.	Distancia.	x	y	x	y	x	y	Distancia.	Minutos.
		56°		55°		54°			

TABLA
DE COORDENADAS.

Minutos.	Distancia.	36°		37°		38°		Distancia.	Minutos.
		y	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*		
	1	0.80901	0.58778	0.79863	0.60181	0.78801	0.61566	1	
	2	1.61803	1.17557	1.59727	1.20363	1.57602	1.23132	2	
	3	2.42705	1.76335	2.39590	1.80544	2.36403	1.84698	3	
	4	3.23606	2.35114	3.19454	2.40726	3.15204	2.46264	4	
0′	5	4.04508	2.93892	3.99317	3.00907	3.94005	3.07830	5	60′
	6	4.85410	3.52671	4.79181	3.61089	4.72806	3.69396	6	
	7	5.66311	4.11449	5.59044	4.21270	5.51607	4.30963	7	
	8	6.47213	4.70228	6.38908	4.81452	6.30408	4.92529	8	
	9	7.28115	5.29006	7.18771	5.41633	7.09209	5.54095	9	
	1	0.80644	0.59130	0.79600	0.60529	0.78531	0.61909	1	
	2	1.61288	1.18261	1.59200	1.21058	1.57063	1.23818	2	
	3	2.41933	1.77392	2.38800	1.81588	2.35595	1.85728	3	
	4	3.22577	2.36523	3.18400	2.42117	3.14126	2.47637	4	
15′	5	4.03222	2.95654	3.98001	3.02647	3.92658	3.09547	5	45′
	6	4.83866	3.54785	4.77601	3.63176	4.71190	3.71456	6	
	7	5.64511	4.13916	5.57201	4.23705	5.49721	4.33365	7	
	8	6.45155	4.73047	6.36801	4.84235	6.28253	4.95275	8	
	9	7.25800	5.32178	7.16401	5.44764	7.06785	5.57184	9	
	1	0.80385	0.59482	0.79335	0.60876	0.78260	0.62251	1	
	2	1.60771	1.18964	1.58670	1.21752	1.56521	1.24502	2	
	3	2.41157	1.78446	2.38005	1.82628	2.34782	1.86754	3	
	4	3.21542	2.37929	3.17341	2.43504	3.13043	2.49005	4	
30′	5	4.01928	2.97411	3.96676	3.04380	3.91304	3.11257	5	30′
	6	4.82314	3.56893	4.76011	3.65256	4.69564	3.73508	6	
	7	5.62699	4.16375	5.55347	4.26132	5.47825	4.35760	7	
	8	6.43085	4.75858	6.34682	4.87009	6.26086	4.98011	8	
	9	7.23471	5.35340	7.14017	5.47885	7.04347	5.60263	9	
	1	0.80125	0.59832	0.79068	0.61221	0.77988	0.62592	1	
	2	1.60250	1.19664	1.58137	1.22443	1.55946	1.25184	2	
	3	2.40376	1.79497	2.37206	1.83665	2.33965	1.87777	3	
	4	3.20501	2.39329	3.16275	2.44886	3.11953	2.50369	4	
45′	5	4.00626	2.99162	3.95344	3.06108	3.89942	3.12961	5	15′
	6	4.80752	3.58994	4.74413	3.67330	4.67930	3.75554	6	
	7	5.60877	4.18827	5.53482	4.28552	5.45919	4.38146	7	
	8	6.41003	4.78659	6.32551	4.89773	6.23907	5.00738	8	
	9	7.21128	5.38492	7.11620	5.50995	7.01896	5.63331	9	
Minutos.	Distancia.	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	Distancia.	Minutos.
		53°		52°		51°			

TABLA

DE COORDENADAS.

Minutos.	Distancia.	39°		40°		41°		Distancia.	Minutos.
		y	x	y	x	y	x		
	1	0.77714	0,62932	0.76604	0.64278	0.75470	0.65605	1	
	2	1.55429	1.25864	1.53208	1.28557	1.50941	1.31211	2	
	3	2.33143	1.88796	2.29813	1.92836	2.26412	1.96817	3	
	4	3.10858	2.51728	3.06417	2.57115	3.01883	2.62423	4	
0′	5	3.88573	3.14660	3.83022	3.21393	3.77354	3.28029	5	60′
	6	4.66287	3.77592	4.59626	3.85672	4.52825	3:93635	6	
	7	5.44002	4.40524	5.36231	4.49951	5.28296	4.59241	7	
	8	6.21716	5.03456	6.12835	5.14230	6.03767	5.24847	8	
	9	6.99431	5.66388	6.89439	5.78508	6.79238	5.90453	9	
	1	0.77439	0.63270	0.76323	0.64612	0.75184	0.65934	1	
	2	1.54878	1.26541	1.52646	1.29224	1.50368	1.31869	2	
	3	2.32317	1.89811	2.28969	1.93837	2.25552	1.97803	3	
	4	3.09757	2.53082	3.05293	2.58449	3.00736	2.63738	4	
15′	5	3.87196	3.16352	3.81616	3.23062	3.75920	3.29672	5	45′
	6	4.64635	3.79623	4.57939	3.87674	4.51104	3.95607	6	
	7	5.42074	4.42893	5.34262	4.52286	5.26288	4.61542	7	
	8	6.19514	5.06164	6.10586	5.16899	6.01472	5,27476	8	
	9	6.96953	5,69434	6.86909	5.81511	6.76656	5.93411	9	
	1	0,77162	0.63607	0.76040	0.64944	0.74895	0.66262	1	
	2	1.54324	1.27215	1.52081	1.29889	1.49791	1.32524	2	
	3	2.31487	1.90823	2.28121	1.94834	2.24686	1.98786	3	
	4	3.08649	2.54431	3.04162	2.59779	2.99582	2.65048	4	
30′	5	3.85812	3.18039	3.80203	3.24724	3.74477	3.31310	5	30′
	6	4.62974	3.81646	4.56243	3.89668	4.49373	3.97572	6	
	7	5.40137	4.45254	5.32284	4.54613	5.24268	4.63834	7	
	8	6.17299	5.08862	6.08324	5.19558	5.99164	5.30096	8	
	9	6.94462	5.72470	6.84365	5.84503	6.74060	5.96358	9	
	1	0.76884	0.63943	0.75756	0.65276	0.74605	0.66588	1	
	2	1.53768	1.27887	1.51513	1.30552	1.49211	1.33176	2	
	3	2.30652	1.91831	2.27269	1.95828	2.23817	1.99764	3	
	4	3.07536	2.55775	3.03026	2.61104	2.98422	2.66352	4	
45′	5	3,84420	3.19719	3.78782	3.26380	3.73028	3.32940	5	15′
	6	4.61305	3.83663	4.54539	3.91656	4.47634	3.99529	6	
	7	5.38189	4.47607	5.30295	4.56932	5.22240	4.66117	7	
	8	6.15073	5.11551	6.06052	5.22208	5.96845	5.32705	8	
	9	6.91957	5.75495	6.81808	5.87484	6.71451	5.99293	9	
Minutos.	Distancia.	x	y	x	y	x	y	Distancia.	Minutos.
		50°		49°		48°			

TABLA

DE COORDENADAS.

Minutos.	Distancia.	42°		43°		44°		Distancia.	Minutos.
		y	x	y	x	y	x		
	1	0.74314	0,66913	0.73135	0.68199	0.71933	0.69465	1	
	2	1.48628	1.33826	1.46270	1.36399	1.43867	1.38931	2	
	3	2.22943	2.00739	2.19406	2.04599	2.15801	2.08397	3	
	4	2.97257	2.67652	2.92541	2.72799	2.87735	2.77863	4	
0′	5	3.71572	3.34565	3.65676	3.40999	3.59669	3.47329	5	60′
	6	4.45886	4.01478	4.38812	4.09199	4.31603	4.16795	6	
	7	5.20201	4.68391	5.11947	4.77398	5.03537	4.86260	7	
	8	5.94515	5.35304	5.85082	5.45598	5.75471	5.55726	8	
	9	6.68830	6.02217	6.58218	6.13798	6.47405	6.25192	9	
	1	0.74021	0.67236	0.72837	0.68518	0.71630	0.69779	1	
	2	1.48043	1.34473	1.45674	1.37036	1.43260	1.39558	2	
	3	2.22065	2.01710	2.18511	2.05554	2.14890	2.09337	3	
	4	2.96087	2.68946	2.91348	2.74073	2.86520	2.79116	4	
15′	5	3.70109	3.36183	3.64185	3.42591	3.58151	3.48895	5	45′
	6	4.44130	4.03420	4.37022	4.11109	4.29781	4.18674	6	
	7	5.18152	4.70656	5.09859	4.79628	5.01411	4.88453	7	
	8	5.92174	5.37893	5.82696	5.48146	5.73041	5.58232	8	
	9	6.66196	6,05130	6.55533	6.16664	6.44671	6.28011	9	
	1	0.73727	0.67559	0.72537	0.68835	0.71325	0.70090	1	
	2	1.47455	1.35118	1.45074	1.37670	1.42650	1.40181	2	
	3	2.21183	2.02677	2.17612	2.06506	2.13975	2.10272	3	
	4	2.94910	2.70236	2.90149	2.75341	2.85300	2.80363	4	
30′	5	3.68638	3.37795	3.62687	3.44177	3.56625	3.50454	5	30′
	6	4.42366	4.05354	4.35224	4.13012	4.27950	4.20545	6	
	7	5.16094	4.72913	5.07762	4.81848	4.99275	4.90636	7	
	8	5.89821	5.40472	5.80299	5.50683	5.70600	5.60727	8	
	9	6.63549	6.08031	6.52836	6.19519	6.41925	6.30818	9	
	1	0.73432	0.67880	0.72236	0.69151	0.71018	0.70401	1	
	2	1.46864	1.35760	1.44472	1.38302	1.42037	1.40802	2	
	3	2.20296	2.03640	2.16709	2.07453	2.13055	2.11204	3	
	4	2.93729	2.71520	2.88945	2.76605	2.84074	2.81605	4	
45′	5	3.67161	3.39400	3.61182	3.45756	3.55092	3.52007	5	15′
	6	4.40593	4.07280	4.33418	4.14907	4.26111	4.22408	6	
	7	5.14025	4.75160	5.05654	4.84059	4.97129	4.92810	7	
	8	5.87458	5.43040	5.77891	5.53210	5.68148	5.63211	8	
	9	6.60890	6.10920	6.50127	6.22361	6.39166	6.33613	9	
Minutos.	Distancia.	x	y	x	y	x	y	Distancia.	Minutos.
		47°		46°		45°			

TABLA
DE COORDENADAS.

	45°		
	y	x	
1	0.70710	0.70710	1
2	1.41421	1.41421	2
3	2.12132	2.12132	3
4	2.82842	2.82842	4
5	3.53553	3.53553	5
6	4.24264	4.24264	6
7	4.94974	4.94974	7
8	5.65685	5.65685	8
9	6.36396	6.36396	9
	x	y	
	45°		

Correccion que debe hacerse á una línea de 100^{m} cuando se ha medido con alguna de las siguientes inclinaciones.

INCLINACION.	CORRECCION.	INCLINACION.	CORRECCION.	INCLINACION.	CORRECCION.	INCLINACION.	CORRECCION.
3° 0′	0^{m}137	7° 15′	0^{m}800	11° 30′	2^{m}008	15° 45′	3^{m}754
3 15	. 161	7 30	. 856	11 45	2. 095	16 0	3. 874
3 30	. 187	7 45	. 913	12 0	2. 185	16 15	3. 995
3 45	. 214	8 0	. 973	12 15	2. 277	16 30	4. 118
4 0	. 244	8 15	1. 035	12 30	2. 370	16 45	4. 243
4 15	. 275	8 30	1. 098	12 45	2. 466	17 0	4. 370
4 30	. 308	8 45	1. 164	13 0	2. 553	17 15	4. 498
4 45	. 343	9 0	1. 231	13 15	2. 662	17 30	4. 628
5 0	. 381	9 15	1. 300	13 30	2. 763	17 45	4. 760
5 15	. 420	9 30	1. 371	13 45	2. 866	18 0	4. 894
5 30	. 460	9 45	1. 444	14 0	2. 970	18 15	5. 030
5 45	. 503	10 0	1. 519	14 15	3. 077	18 30	5. 168
6 0	. 548	10 15	1. 596	14 30	3. 185	18 45	5. 307
6 15	. 594	10 30	1. 675	14 45	3. 295	19 0	5. 448
6 30	. 643	10 45	1. 755	15 0	3. 407	19 15	5. 591
6 45	. 663	11 0	1. 837	15 15	3. 521	19 30	5. 736
7 0	0. 745	11 15	1. 921	15 30	3. 637	19 45	5. 882

INDICE.

PARTE PRIMERA.—PLANOMETRIA.

PARTE SEGUNDA.—AGRIMENSURA.

PARTE TERCERA.—AGRODESIA.

PARTE CUARTA.—NIVELACION.

TABLAS.

ERRATAS DE IMPORTANCIA.

Corregidas —

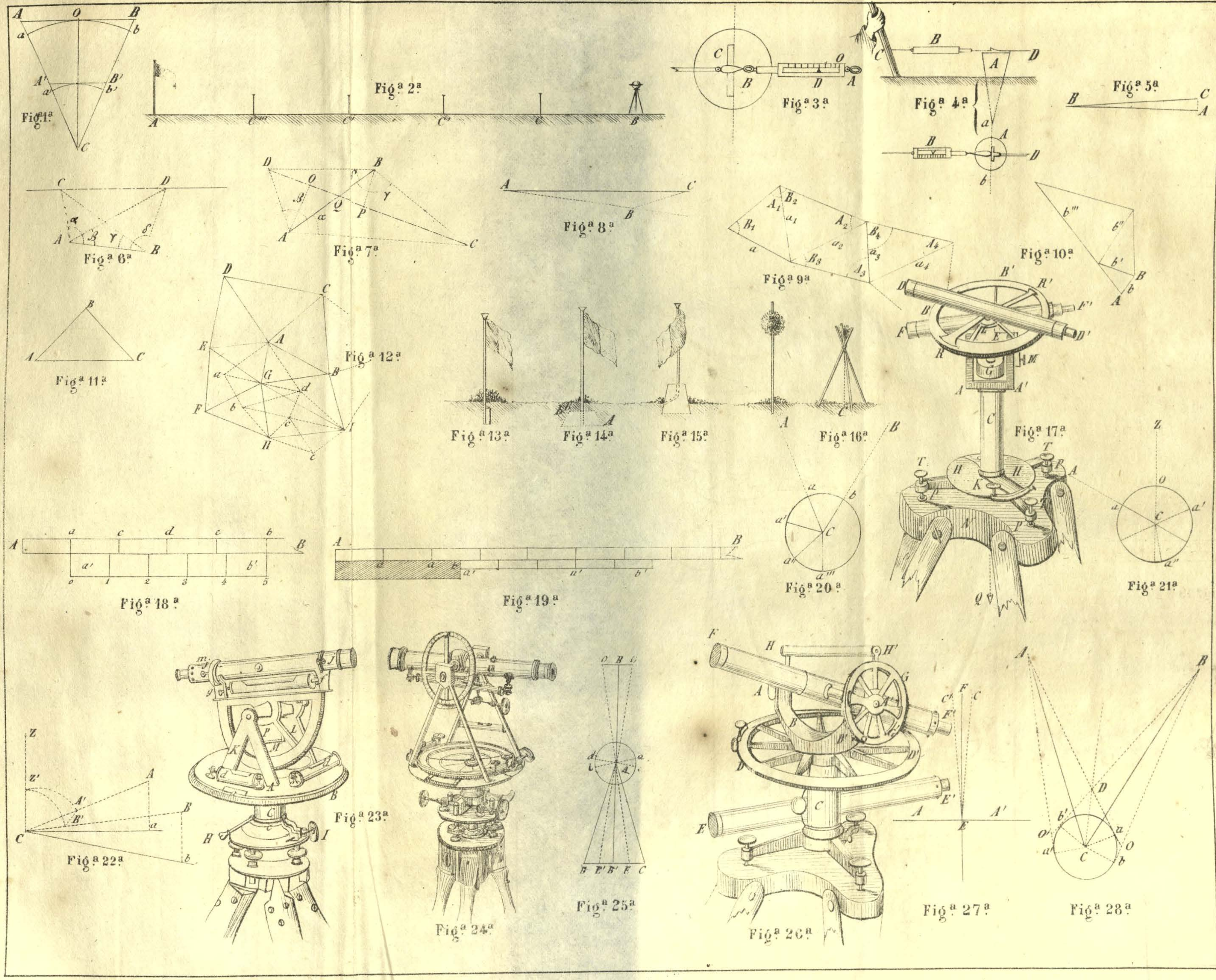
Pág.	LUGAR.	DICE.	DEBE DECIR.
24.....	linea 1ª	que 150°	que 120°
87.....	linea 12ª	núm. 36,	núm. 32,
91.....	6ª columna de la tabla	9.288	0.288
102.....	linea 17ª	*flecha*	*fecha*
124.....	linea 15ª	cada ángulo	cada triángulo
128.....	linea 1ª	24.1	34.1
130.....	en el ejemplo	Const...... 6.63778	Const...... 9.63778
id....	idem	3.46973—	6.46973—
134.....	penúltima linea	$-MP$	$-MPR$
156.....	linea 15ª	partiendo de F	partiendo de J
211.....	linea 6ª	distancias á los	distancias ó los
213.....	linea 18ª	coodenas	coordenadas
230.....	3ª columna de la tabla	60° 37′5 *S E*	65° 37′5 *S E*
251.....	linea 15ª	la brújula ocupe	la burbuja ocupe
319.....	linea 30ª	la base y la altura	la base y la mitad de la altura
417.....	linea 7ª	los tres restantes	los dos restantes
449.....	linea 4ª	las estadales	los estadales
id....	linea 22ª	á tan. z	á cot. z
512.....	última columna de la tabla	$0^{m}6621$	$0^{m}7621$
519.....	linea 34ª	fué $200^{m}92$	fué 200°.92

NOTA.—En el ejemplo numérico de la pág. 18 se cometió una equivocacion en la distaucia $b-c$, que debe ser —1860.89 en vez de —1860.99. La influencia de este error aunque modifica ligeramente los elementos del resto del cálculo, no altera de un modo sensible el resultado final, de manera que el valor de CD puede suponerse correcto.

Tambien en la segunda fórmula de la pág. 80 el ángulo $(O-d)$ debe ser $(B-d)$. En consecuencia la primera aplicacion numérica será como sigue:

r	9.89818
sen. O	9.95938
sen. $(B-d)$	9.99998—
	9.85754—
sen. B	—9.89541
D sen. 1″	—8.21705
	1-74508—

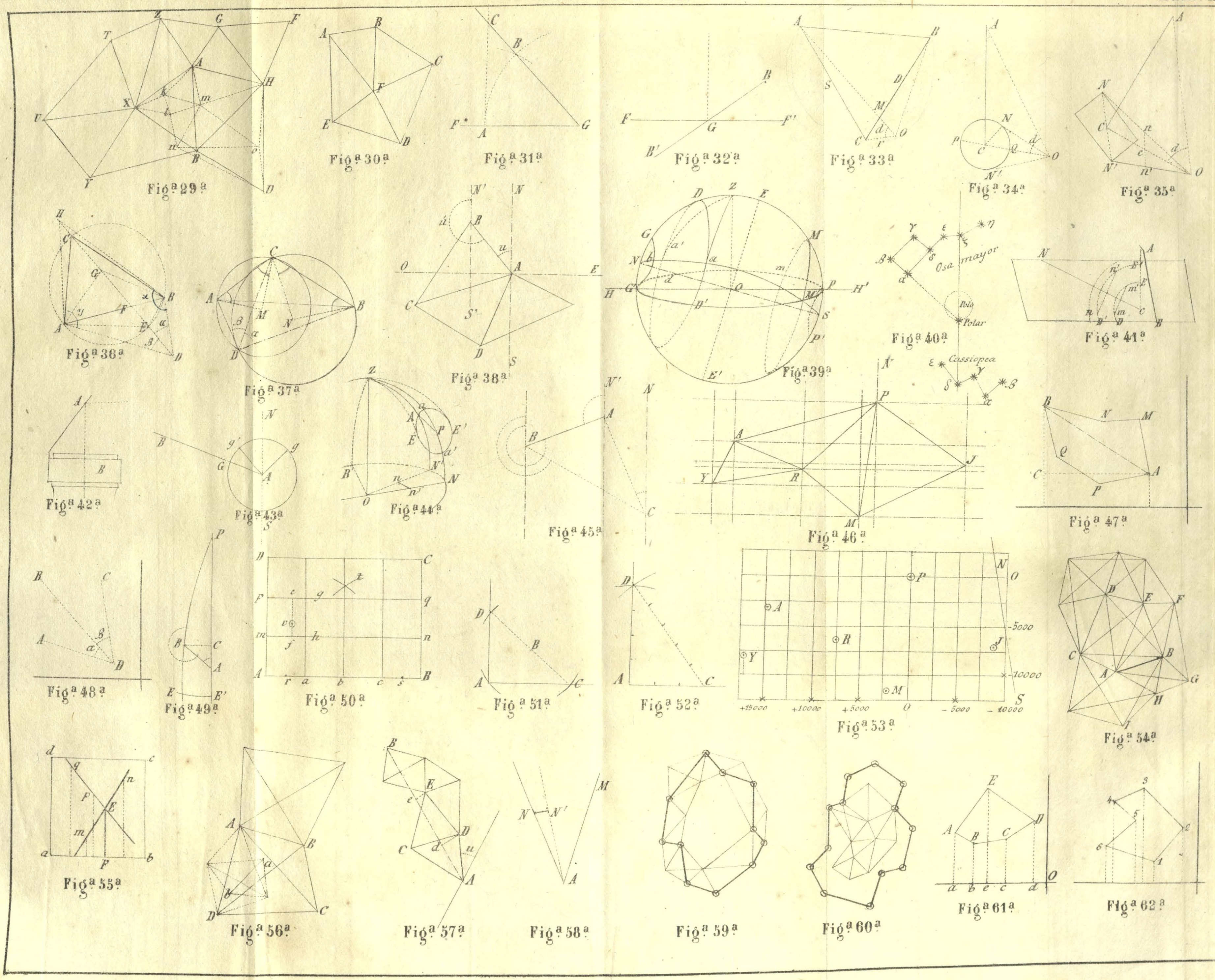
$$x-O=-55''.6$$


Figª 1ª
Figª 2ª
Figª 3ª
Figª 4ª
Figª 5ª
Figª 6ª
Figª 7ª
Figª 8ª
Figª 9ª
Figª 10ª
Figª 11ª
Figª 12ª
Figª 13ª
Figª 14ª
Figª 15ª
Figª 16ª
Figª 17ª
Figª 18ª
Figª 19ª
Figª 20ª
Figª 21ª
Figª 22ª
Figª 23ª
Figª 24ª
Figª 25ª
Figª 26ª
Figª 27ª
Figª 28ª

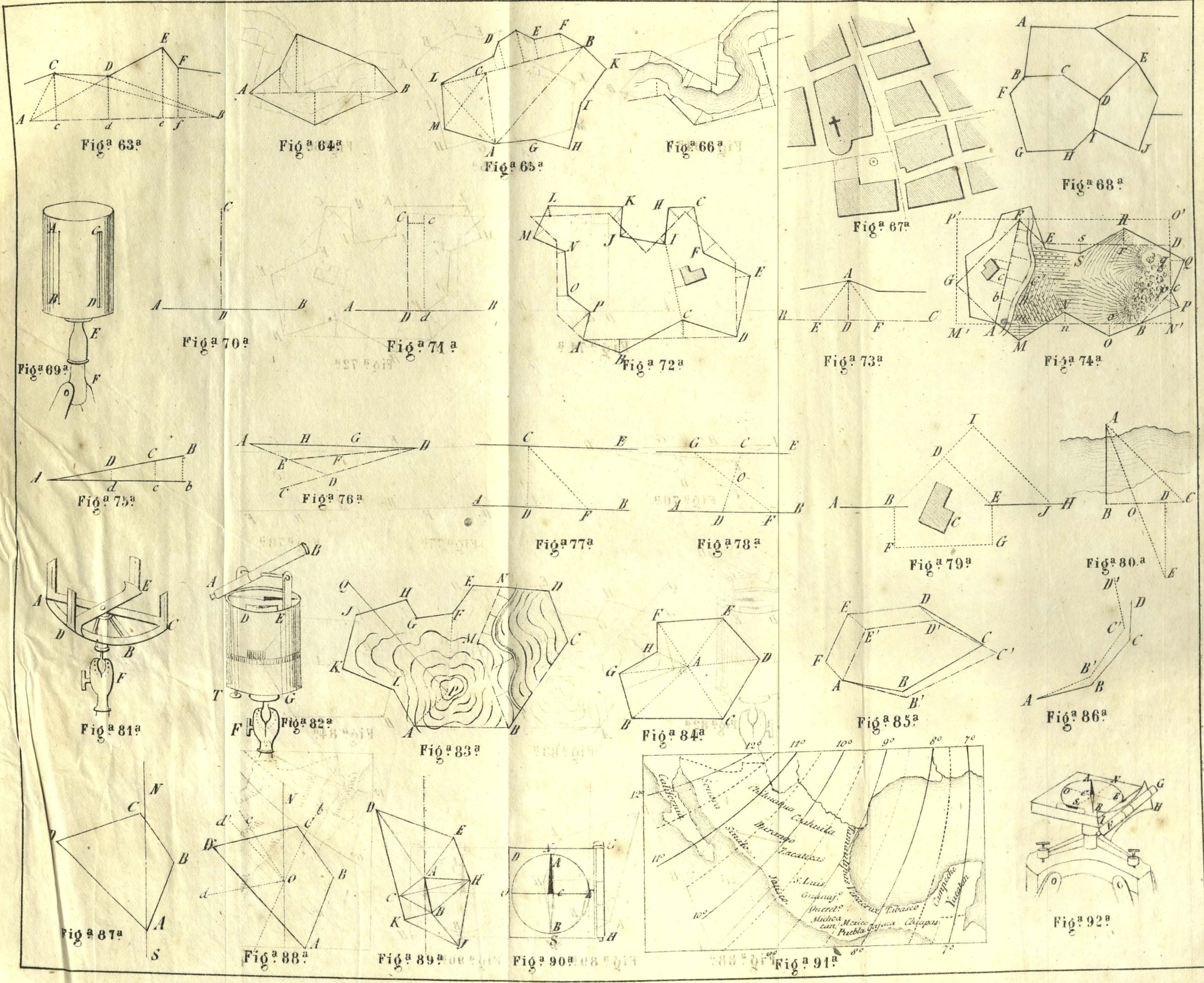
1
1
1
1
12
12
13

13
15
21
21
23
25
31
41
44
i
51
51

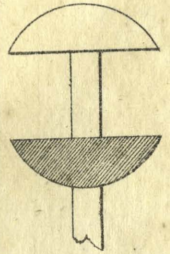
qu
te
el
la



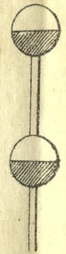
Figª 29ª
Figª 30ª
Figª 31ª
Figª 32ª
Figª 33ª
Figª 34ª
Figª 35ª
Figª 36ª
Figª 37ª
Figª 38ª
Figª 39ª
Figª 40ª
Figª 41ª
Figª 42ª
Figª 43ª
Figª 44ª
Figª 45ª
Figª 46ª
Figª 47ª
Figª 48ª
Figª 49ª
Figª 50ª
Figª 51ª
Figª 52ª
Figª 53ª
Figª 54ª
Figª 55ª
Figª 56ª
Figª 57ª
Figª 58ª
Figª 59ª
Figª 60ª
Figª 61ª
Figª 62ª



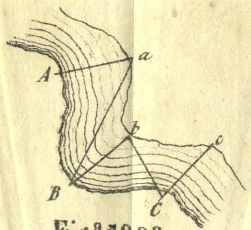
Figª 63ª
Figª 64ª
Figª 65ª
Figª 66ª
Figª 67ª
Figª 68ª
Figª 69ª
Figª 70ª
Figª 71ª
Figª 72ª
Figª 73ª
Figª 74ª
Figª 75ª
Figª 76ª
Figª 77ª
Figª 78ª
Figª 79ª
Figª 80ª
Figª 81ª
Figª 82ª
Figª 83ª
Figª 84ª
Figª 85ª
Figª 86ª
Figª 87ª
Figª 88ª
Figª 89ª
Figª 90ª
Figª 91ª
Figª 92ª
California
Chihuahua
Coahuila
Durango
Sinaloa
Zacatecas
Tamaulipas
S. Luis
Jalisco
Veracruz
Tabasco
Campeche
Yucatan
Chiapas
Oajaca
Puebla
Mexico



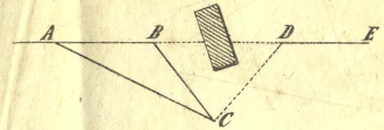
Figª 121ª



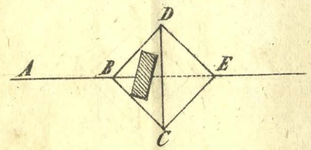
Figª 122ª



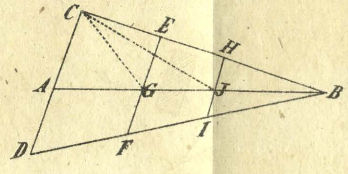
Figª 123ª



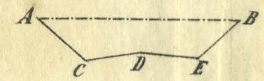
Figª 124ª



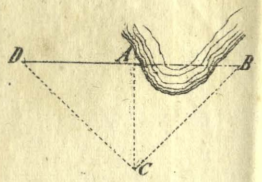
Figª 125ª



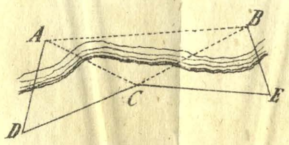
Figª 126ª



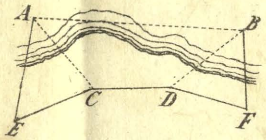
Figª 127ª



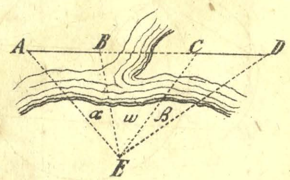
Figª 128ª



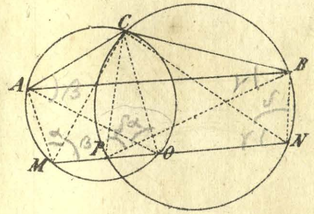
Figª 129ª



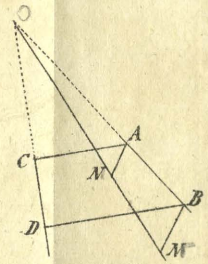
Figª 130ª



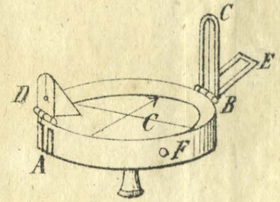
Figª 131ª



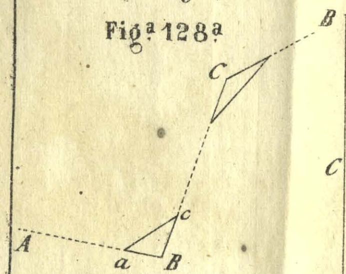
Figª 132ª



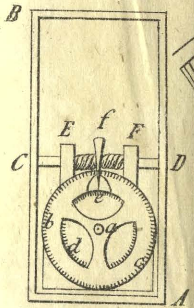
Figª 133ª



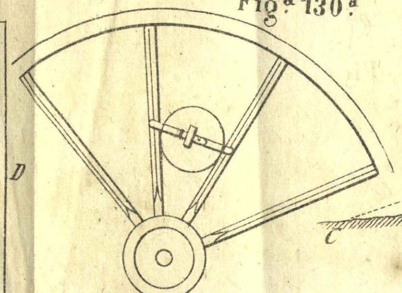
Figª 134ª



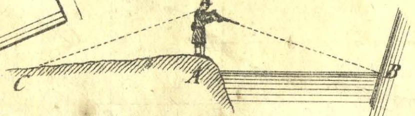
Figª 135ª



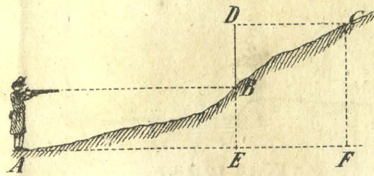
Figª 136ª



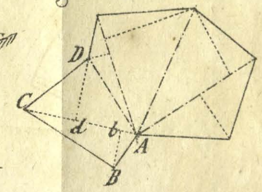
Figª 137ª



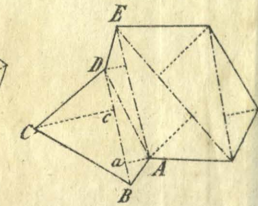
Figª 138ª



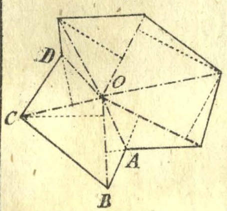
Figª 139ª



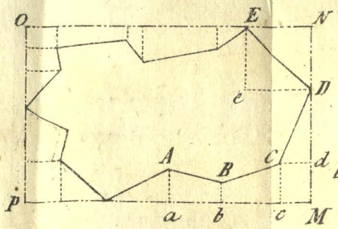
Figª 140ª



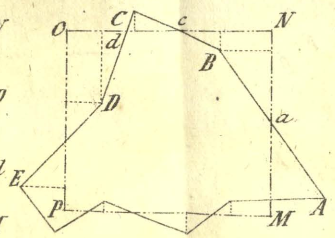
Figª 141ª



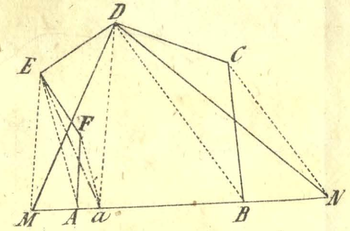
Figª 142ª



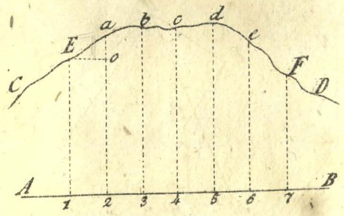
Figª 143ª



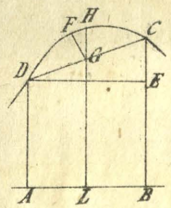
Figª 144ª



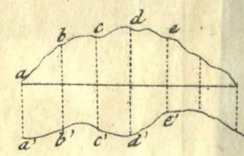
Figª 145ª



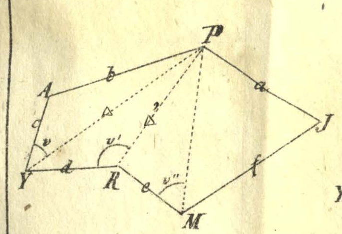
Figª 146ª



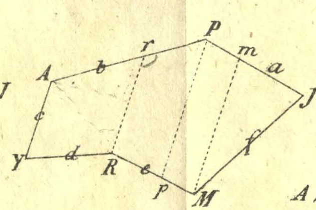
Figª 147ª



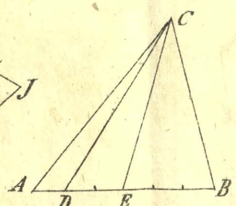
Figª 148ª



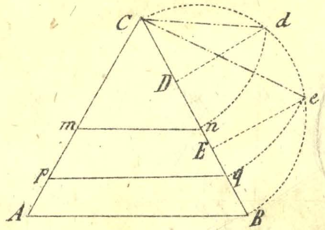
Figª 149ª



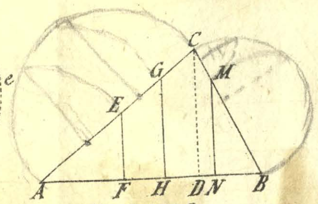
Figª 150ª



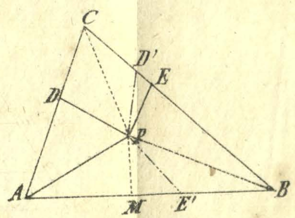
Figª 151ª



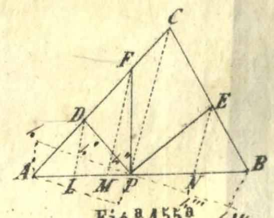
Figª 152ª



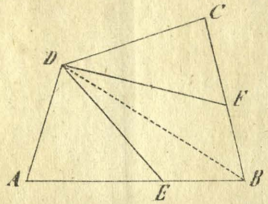
Figª 153ª

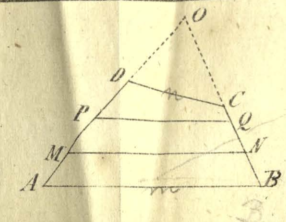


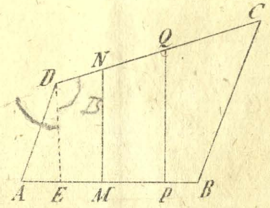
Figª 154ª

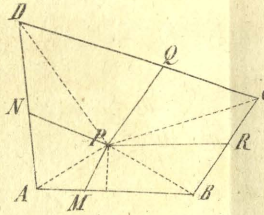


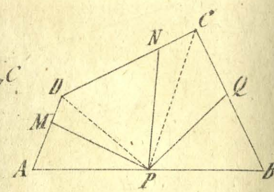
Figª 155ª

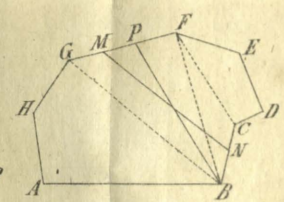

Figª 156ª

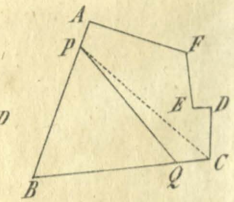

Figª 157ª

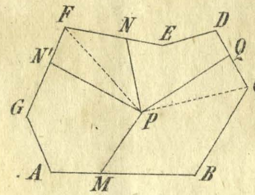

Figª 158ª

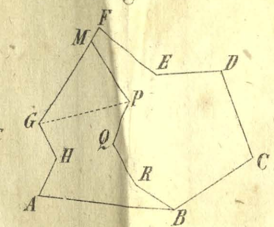

Figª 159ª

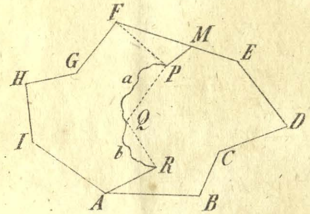

Figª 160ª

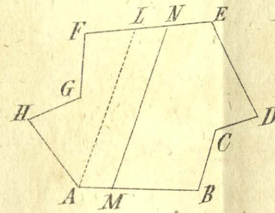

Figª 161ª

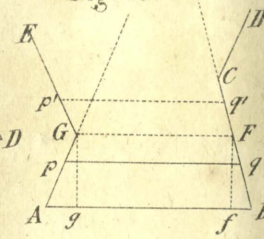

Figª 162ª

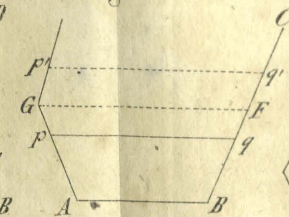

Figª 163ª

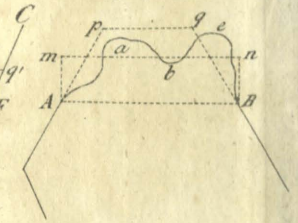

Figª 164ª

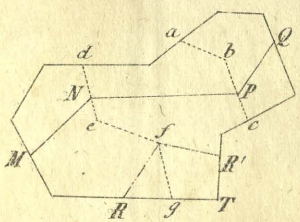

Figª 165ª

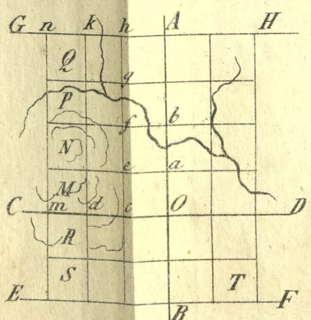

Figª 166ª


Figª 167ª


Figª 168ª

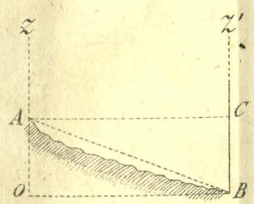

Figª 169ª

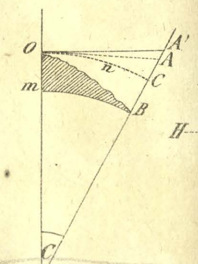

Figª 170ª

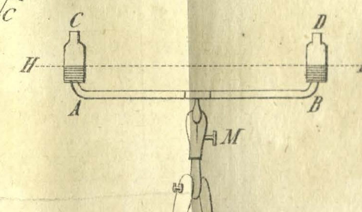

Figª 171ª

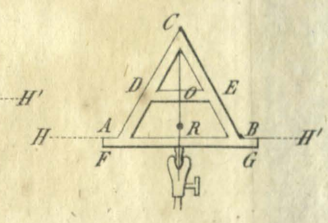
6	5	4	3	2	1
7	8	9	10	11	12
18	17	16	15	14	13
19	20	21	22	23	24
30	29	28	27	26	25
31	32	33	34	35	36

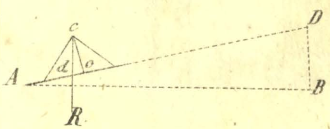
Figª 172ª

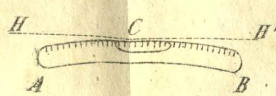

Figª 173ª

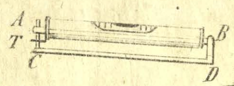

Figª 174ª

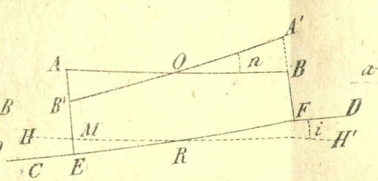

Figª 175ª

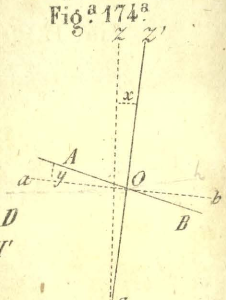

Figª 176ª

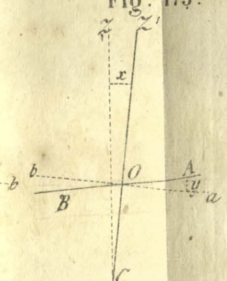

Figª 177ª

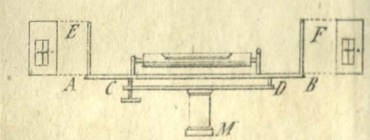

Figª 178ª

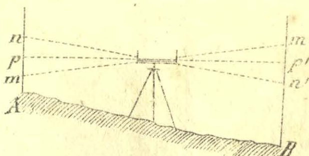

Figª 179ª


Figª 180ª

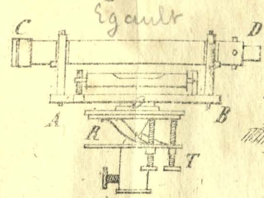

Figª 181ª

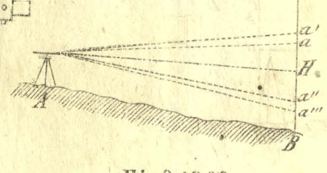

Figª 182ª


Figª 183ª

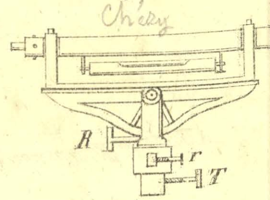

Figª 184ª

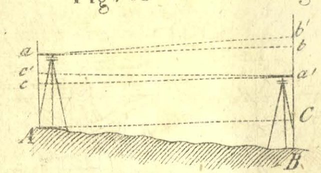
Egault

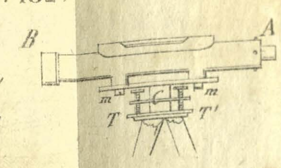

Figª 185ª

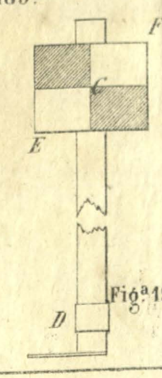

Figª 186ª

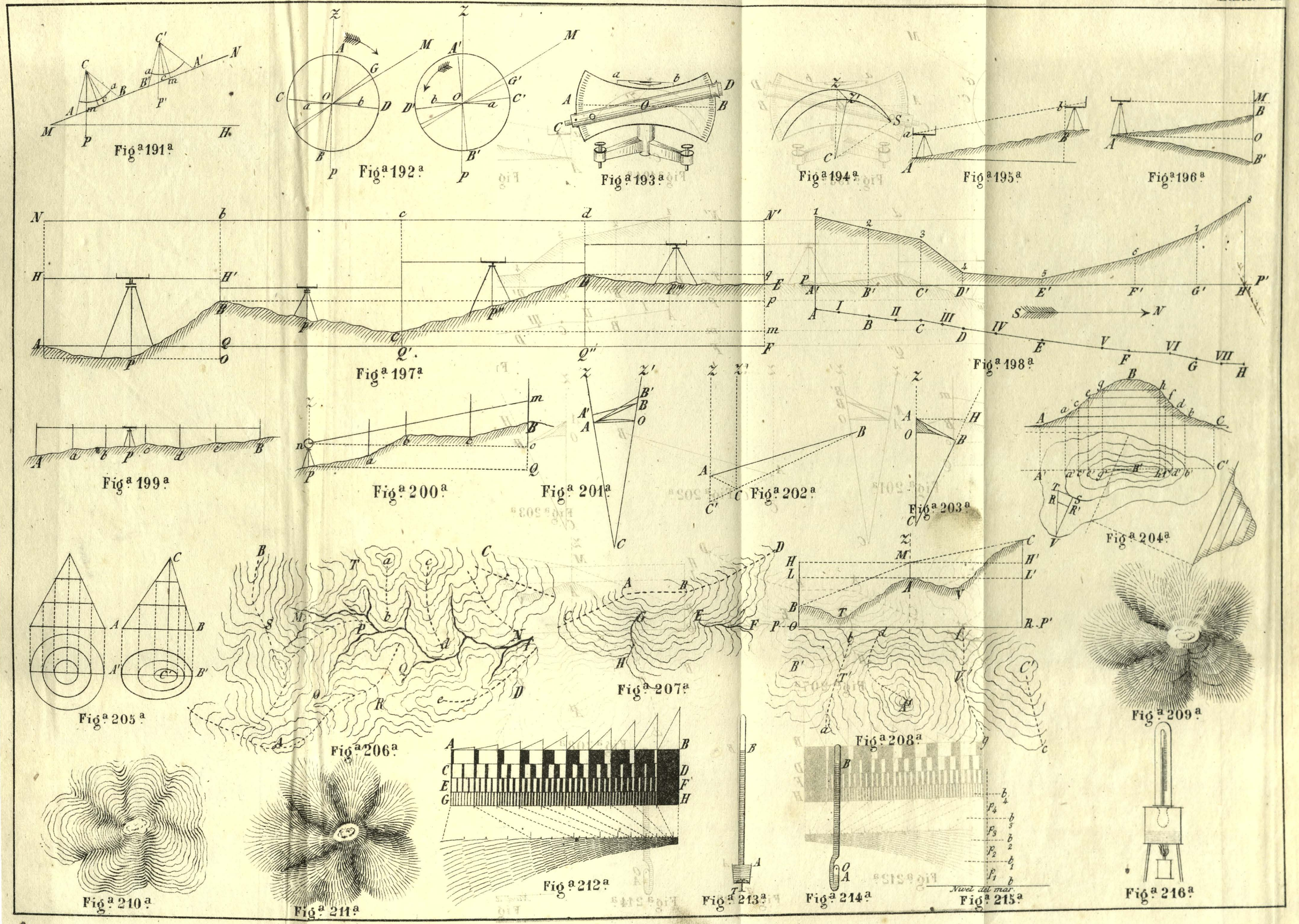
Chézy

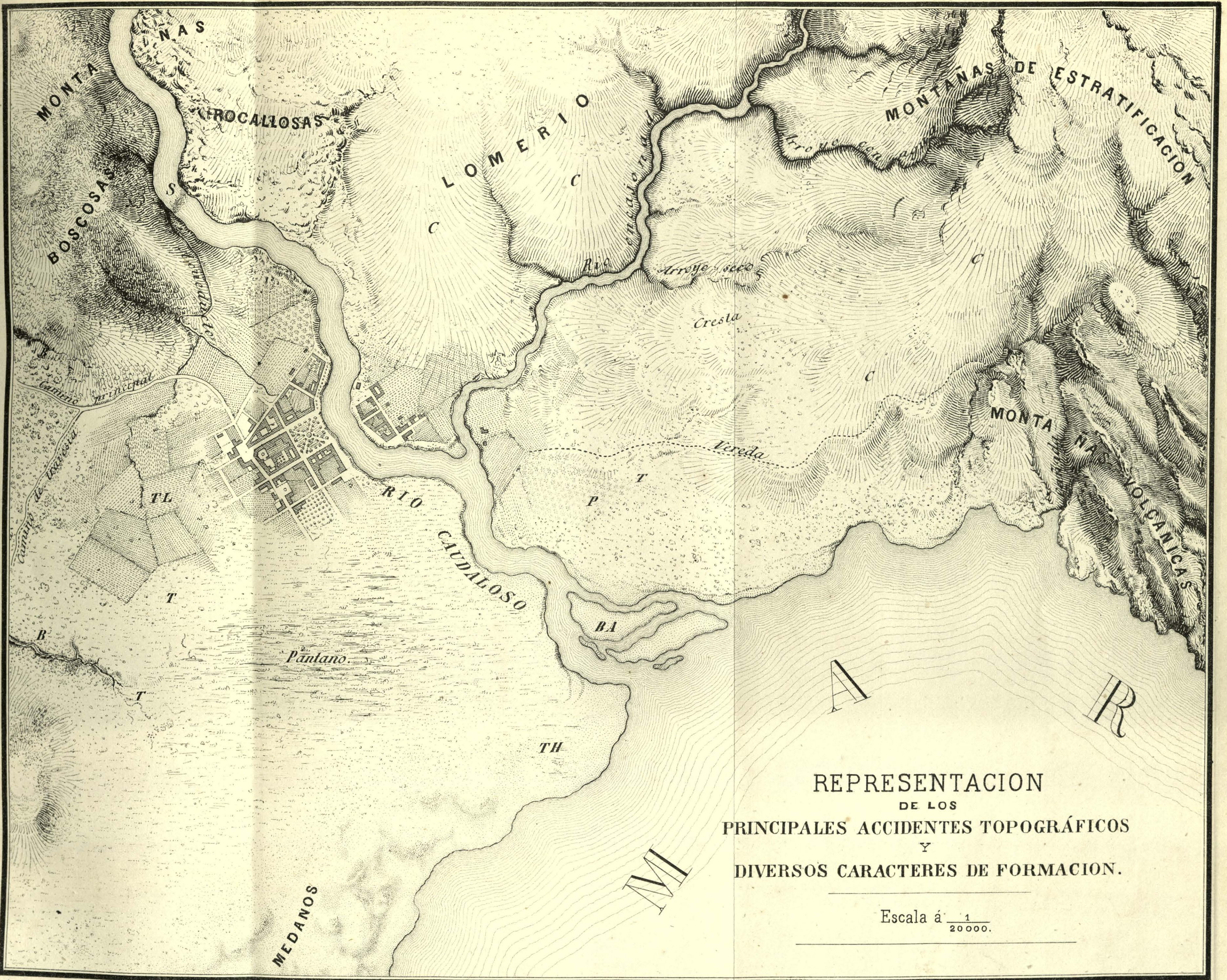

Figª 187ª


Figª 188ª


Figª 189ª


Figª 190ª


Figª 191ª
Figª 192ª
Figª 193ª
Figª 194ª
Figª 195ª
Figª 196ª
Figª 197ª
Figª 198ª
Figª 199ª
Figª 200ª
Figª 201ª
Figª 202ª
Figª 203ª
Figª 204ª
Figª 205ª
Figª 206ª
Figª 207ª
Figª 208ª
Figª 209ª
Figª 210ª
Figª 211ª
Figª 212ª
Figª 213ª
Figª 214ª
Nivel del mar.
Figª 215ª
Figª 216ª



A. Diaz, dibujó. L. Arteaga, litografº.